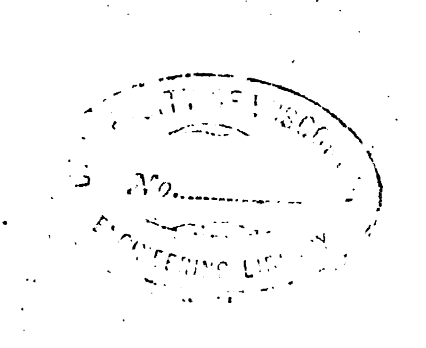
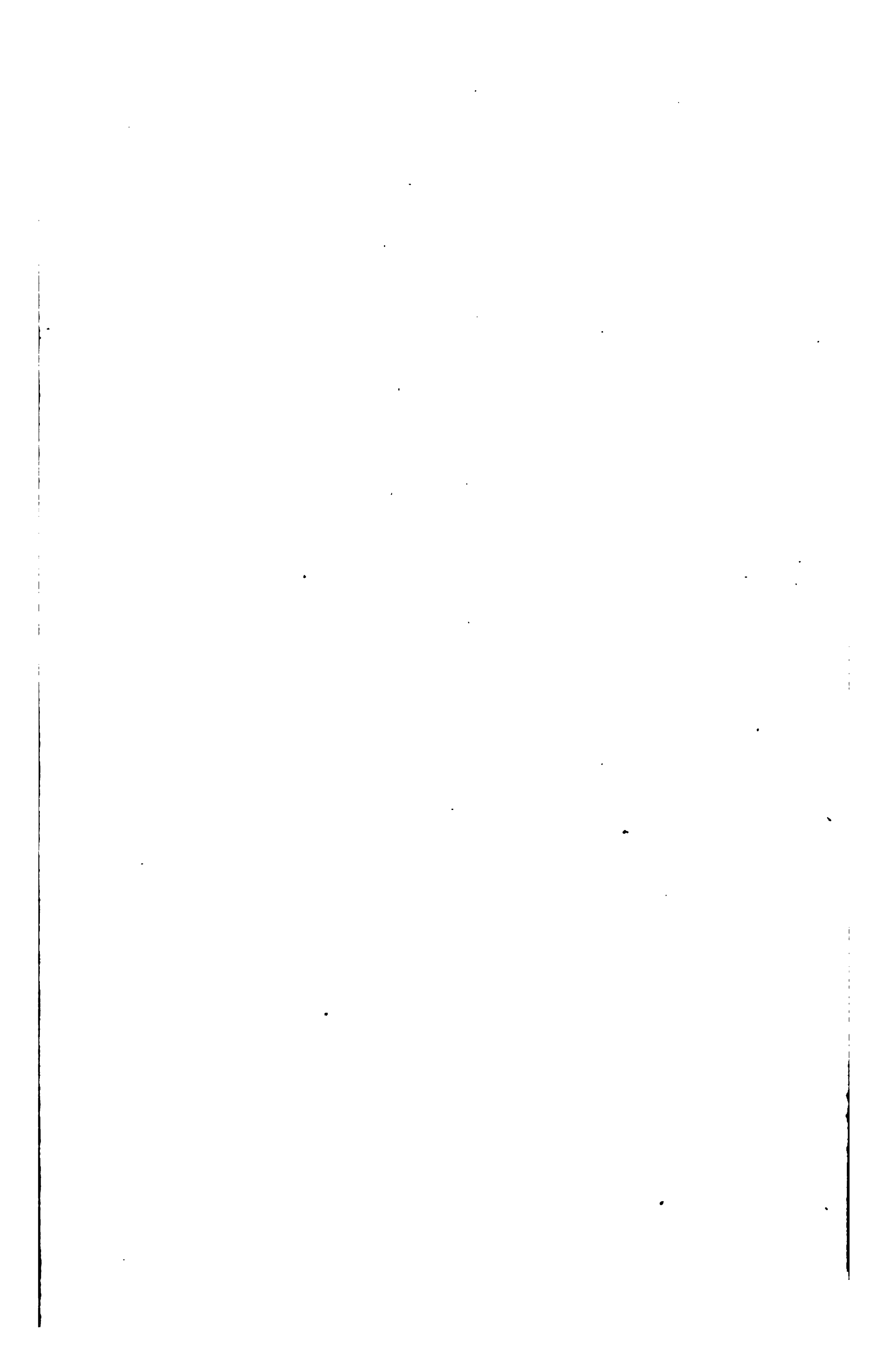
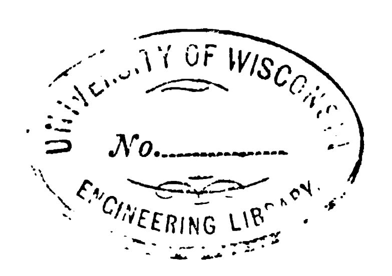








LEHRBUCH

DER

TECHNISCHEN MECHANIK.

LEHRBUCH

DER

TECHNISCHEN MECHANIK

VON

AUGUST RITTER, DR. PHIL.,

GEH. REG.-RATH UND PROFESSOR AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

MIT 782 HOLZSCHNITTEN.

FÜNFTE AUFLAGE.

LEIPZIG, 1884.

BAUMGÄRTNERS BUCHHANDLUNG.

Vorwort zur fünften Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch umfasst ausschliesslich diejenigen Gebietstheile der Mechanik, welche der elementaren Behandlungsweise zugänglich sind, und enthält im Wesentlichen Dasjenige, was an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen in dem ersten Jahres-Cursus der Mechanik vorgetragen wird.

Die Bearbeitung der neuen Auflage bot Gelegenheit, das Buch durch verschiedene neue Beispiele und Anwendungen, sowie durch Hinzufügung von 32 neuen Figuren zu bereichern.

Aachen, den 28. April 1884.

A. Ritter.

Inhaltsverzeichniss.

ERSTER ABSCHNITT.

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

ZWEITER ABSCHNITT.

Mechanik des materiellen Punktes.

DRITTER ABSCHNITT.

Statik fester Körper oder Lehre vom Gleichgewicht eines Systems von unveränderlich mit einander verbundenen materiellen Punkten.

VIERTER ABSCHNITT.

Dynamik fester Körper oder Lehre von der Bewegung eines nicht im Gleichgewichtszustande befindlichen Systems von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten.

FÜNFTER ABSCHNITT.

Statik elastischer Körper.

SECHSTER ABSCHNITT.

Dynamik elastischer Körper.

SIEBENTER ABSCHNITT.

Statik flüssiger Körper.

ACHTER ABSCHNITT.

Dynamik flüssiger Körper.

ERSTER ABSCHNITT.

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

ERSTES CAPITEL.

Einleitung.

§ 1.

Mechanik, Geometrie, Physik.

Die Mechanik ist die Lehre von den Wirkungen der Kräfte.

Die Wirkungen der Kräfte bestehen darin: Körper-Bewegungen hervorzubringen oder zu vernichten, Aenderungen in den Bewegungszuständen der Körper hervorzubringen, oder das Zustandekommen solcher Aenderungen zu verhindern.

Die Bewegungen der Körper können aufgefasst werden als Aenderungen räumlicher Grössen. Bei der Bewegung eines Körpers ändern sich die Entfernungen seiner Punkte von anderen Punkten, und mit diesen Längengrössen ändern sich zugleich andere Raumgrössen, welche nach geometrischen Gesetzen mit denselben verknüpft sind. Soweit ausschliesslich die räumlichen Beziehungen zwischen diesen Raumgrössen-Aenderungen dabei berücksichtigt werden, fällt die Lehre von den Bewegungen der Körper in das Gebiet der reinen Geometrie.

Die Bewegungen der Körper können auch aufgefasst werden als Zeit-Aenderungen, insofern während der Bewegung eines jeden Körpers eine gewisse Zeitgrösse verfliesst, und jedem Werthe der dabei sich ändernden Raumgrösse ein bestimmter Zeitpunkt entspricht. Die Untersuchung der Beziehungen, welche zwischen jenen geometrischen Aenderungen und den sie begleitenden Zeit-Aenderungen stattfinden, bildet den Inhalt der „geometrischen Bewegungslehre", einer Wissenschaft, welche als Anhang und Er-

weiterung der Geometrie betrachtet werden kann, und welche den Uebergang von der Geometrie zur Mechanik als Zwischenglied vermittelt.

Die Mechanik geht in ihren Untersuchungen noch um einen Schritt weiter, indem sie ausser jenen Raum- und Zeit-Aenderungen auch die physikalischen Ursachen und Gesetze der Bewegungen in das Gebiet ihrer Untersuchungen hineinzieht. Sie stellt sich die Aufgabe: nach geometrischen und physikalischen Principien die Bewegungen der Körper aus ihren Ursachen zu erklären.

Die Mechanik ist daher eine Wissenschaft, welche zum Theil auf geometrischen, zum Theil auf physikalischen Grundlagen beruht.

Aufgabe der Physik ist es: überall in der Natur dem Vorkommen und Ursprunge der Kräfte nachzuforschen, zu untersuchen, unter welchen äusseren Umständen die Kräfte in der Natur auftreten, von welchen Ursachen Grösse und Richtung derselben abhängen, nach welchen Gesetzen sie auf die Bewegungen der Körper einwirken.

Die Mechanik dagegen hat es nicht mit dem Ursprunge, sondern lediglich mit der Wirkung der Kräfte zu thun. Sie nimmt die Kräfte ihren Grössen und Richtungen nach als gegeben an und untersucht auf Grundlage der von der Geometrie und Physik ermittelten Gesetze: wie die Bewegungszustände der Körper durch sie verändert werden. Als Endziel der Mechanik ist die allgemeine Beantwortung der Frage zu betrachten: „Wenn beliebige gegebene Kräfte — gleichviel, welchen Ursprung sie haben mögen — auf beliebige gegebene Körper wirken, welche Bewegungen gehen daraus hervor?“

Die Möglichkeit einer allgemeinen Lösung dieses Problems beruht auf der erfahrungsmässig feststehenden Thatsache: dass die Wirkungen der Kräfte in gewissem Grade unabhängig sind von der Qualität ihres Ursprungs und von der Qualität der bewegten Körper, dass sie vielmehr ausschliesslich abhängen von gewissen Zuständen und Eigenschaften, die sich als messbare Grössen definiren lassen, dass der Zusammenhang zwischen diesen quantitativen Ursachen und ihren Wirkungen von gewissen einfachen Gesetzen beherrscht wird, welche — soweit unsere Erfahrungen reichen — für alle Arten von Kräften, für alle Arten von Körpern, an allen Orten und zu allen Zeiten unveränderlich dieselbe Geltung behalten.

Diese Grundgesetze der Mechanik dürfen nicht als noth-

wendige Verstandeswahrheiten aufgefasst werden gleich denjenigen Gesetzen, durch welche die Lehrsätze der reinen Mathematik mit den ihr zum Grunde gelegten Definitionen der Grössenbegriffe verknüpft sind. Sie sind vielmehr als Naturgesetze zu betrachten, zu deren Kenntniss wir nur auf dem Wege der Erfahrung gelangen konnten; als physikalische Hypothesen, zu deren Rechtfertigung nur geltend gemacht werden kann: dass alle aus ihnen abgeleiteten Folgerungen von der Erfahrung bestätigt werden.

Die Kenntniss dieser Naturgesetze reicht hin, um das oben aufgestellte allgemeine Problem in ein rein mathematisches zu verwandeln. Die Aufgabe der Mechanik besteht darin: aus diesen mechanischen Grundgesetzen mit Hülfe mathematischer Untersuchungen gewisse Lehrsätze und Regeln abzuleiten, nach welchen das Verhalten der Körper unter Einwirkung von Kräften in gegebenen speciellen Fällen im Voraus sich bestimmen lässt.

Eine mathematische Untersuchung und Behandlung mechanischer Vorgänge setzt indessen als unerlässliche Bedingung voraus, dass alle diejenigen Zustände und Eigenschaften, welche bei den Bewegungen der Körper und bei den Wirkungen der Kräfte in Betracht kommen, zuvor als messbare Grössen definirt werden. Es ergiebt sich hieraus die Nothwendigkeit: dem eigentlichen Inhalte der Mechanik gewisse Grössen-Definitionen und Begriffs-Erklärungen voranzustellen, welche zum Theil dem Gebiete der geometrischen Bewegungslehre angehören, zum Theil aber auf die physikalischen Grundbegriffe der Bewegungslehre Bezug haben. Zu den ersteren gehören die Begriffe Geschwindigkeit, Beschleunigung, Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen, zu den letzteren die Begriffe Kraft und Masse.

§ 2.

Begriff des materiellen Punktes.

Die Grundbegriffe der Mechanik können nicht erklärt werden, ohne dass dabei von Bewegungen die Rede ist, folglich auch von Gegenständen, die sich bewegen. Die einfachste Form, unter welcher ein sich bewegender Gegenstand gedacht werden kann, ist der geometrische Punkt; und soweit es sich lediglich um die Grundbegriffe der geometrischen Bewegungslehre handelte, würde die Erklärung derselben am einfachsten angeknüpft werden können an die Bewegung des geometrischen Punktes. Da indessen

der weitere Verlauf der Untersuchungen, namentlich die Entwickelung der physikalischen Grundbegriffe, es ohnehin erforderlich machen wird, den sich bewegenden Gegenstand als physikalisches Object aufzufassen, so empfiehlt es sich, von vornherein die Erklärung der Grundbegriffe anzuknüpfen an die Bewegung des materiellen Punktes, zu dessen Begriffe die nachfolgenden Betrachtungen führen.

Um die Bewegung irgend eines Körpers mit vollkommener Genauigkeit zu bestimmen, müsste man die Bewegung jedes einzelnen seiner Theile bestimmen. So lange man sich einen solchen Theil noch als ausgedehnt, also wiederum aus Theilen zusammengesetzt, denkt, so lange also noch von verschiedenen Stellen innerhalb desselben die Rede sein kann, würde für den Theil abermals dasselbe gelten, was für das Ganze galt. Man müsste sich also die Theilung bis ins Unendliche fortgesetzt denken und die Bewegung jedes einzelnen dieser unendlich kleinen Theile bestimmen. Da eine solche Theilung in Gedanken wenigstens ausgeführt werden kann, so ist es zulässig, von den kleinsten Theilen des Körpers wie von Punkten zu reden, in deren jedem eine unendlich kleine Menge von Materie ihren Sitz hat, und die man deshalb „materielle Punkte“ nennt.

Wie weit eine solche Auffassung der Wirklichkeit entspricht, ob die Zahl der materiellen Theile, aus welchen ein Körper besteht, wirklich eine unendlich grosse, oder eine bestimmte endliche Zahl ist, welche Beschaffenheit ferner diese kleinsten Theile haben: darüber fehlt uns bislang jede nähere Kenntniss. Zwar lehren Physik und Chemie: dass ein jeder Körper höchst wahrscheinlich eine bestimmte endliche Zahl von kleinsten Theilen, sogenannten Atomen, enthält, welche bisher weder durch mechanische noch durch chemische Mittel in noch kleinere Theile zerlegt werden konnten. Doch sind wir keineswegs zu der Behauptung berechtigt, dass hiermit schon die Grenze der Theilbarkeit wirklich erreicht sei. Vielmehr deuten manche Erscheinungen der Elektricität, des Magnetismus und des Lichtes auf die Möglichkeit hin, dass ein solches chemisches Atom noch der Schauplatz sehr verwickelter mechanischer Vorgänge sein könne. So lange nicht weitere Forschungen der Chemie und Molecular-Physik mehr Licht über diesen Gegenstand verbreiten, so lange es namentlich der Lehre von den sogenannten „Imponderabilien“ nicht gelingt, die dunklen Beziehungen der Materie zu dem raumerfüllenden Aether weiter aufzuklären, muss diese Frage einstweilen offen gelassen werden. Für die Mechanik ist es — bei dem gegenwärtigen Zustande dieser Wissenschaft wenigstens — vorderhand gleichgültig, ob man die Materie eines Körpers aus sehr vielen, oder aus unendlich vielen Theilen bestehend annehmen will.

Man denkt sich also die Körper zusammengesetzt aus einzelnen materiellen Punkten, die auf irgend eine Art mit einander

verbunden sind, und gelangt auf diese Weise zu dem Begriffe eines „Systems von materiellen Punkten“. Um die Bewegung eines solchen Systems genau zu bestimmen, muss man die Bewegung jedes einzelnen materiellen Punktes in demselben bestimmen.

Die Bahnlinien, welche die einzelnen materiellen Punkte bei der Bewegung eines solchen Systems beschreiben, werden im Allgemeinen von einander verschieden sein. Doch giebt es viele Fälle, in denen diese Unterschiede (z. B. wegen Kleinheit des Körpers) sehr unbedeutend sind, und kommen unter den Anwendungen der Mechanik überdies häufig Angaben vor, bei denen es von keinem Interesse ist und gar nicht verlangt wird, die Bewegung in allen ihren Einzelheiten zu erforschen, bei denen man vielmehr nur darauf ausgeht, die Bewegung eines Körpers im Grossen und Ganzen zu bestimmen, ohne auf die Bewegungsunterschiede der einzelnen Theile weiter Rücksicht zu nehmen. In solchen Fällen ist es zulässig, den ganzen Körper — welche Form und Grösse er übrigens haben möge — wie einen einzelnen materiellen Punkt zu behandeln, in welchem die ganze Materie des Körpers ihren Sitz hat, und die Bahn seiner Bewegung als eine Linie anzusehen.

So wird z. B. häufig die Bewegung einer Kanonenkugel, oder gar eines ganzen Weltkörpers durch eine einfache Linie dargestellt, ebenso auf Eisenbahnkarten die Bewegung eines ganzen Eisenbahnzuges, auf Seekarten die Bewegung eines ganzen Seeschiffes als Linie verzeichnet, weil in einer grossen Zahl von Fällen nach den speciellen Bewegungen der einzelnen Theile dieser Körper gar nicht weiter gefragt wird.

Man behält sich dabei vor, diese gröbere Anschauungsweise sofort fahren zu lassen und solche Körper wiederum als Systeme von materiellen Punkten zu behandeln — wie es der exacteren Auffassung entspricht — sobald die grössere Bestimmtheit der Fragestellung dies erfordert.

Der Lehre von der Bewegung eines Systems von materiellen Punkten muss die Lehre von der Bewegung des einfachen materiellen Punktes vorangehen. Unter einem einfachen materiellen Punkte kann man sich einen beliebigen Körper denken, bei welchem entweder seiner Kleinheit wegen oder aus Gründen, die in der Natur der Aufgabe liegen, es nicht erforderlich ist, auf seine räumliche Ausdehnung Rücksicht zu nehmen, den man deshalb ansehen darf als einen geometrischen Punkt, begabt mit den quantitativen und qualitativen Eigenschaften der in ihm vereinigt

gedachten Materie, dessen Bahn daher als eine geometrische Linie betrachtet werden darf.

Es ist zur Erklärung der Grundbegriffe nothwendig, die Bewegungen der Körper zunächst aus diesem vereinfachenden Gesichtspunkte aufzufassen, weil andernfalls die unendliche Mannigfaltigkeit in den Bewegungen der einzelnen Theile eines Körpers jedesmal mit in Betracht kommen und zu einer endlosen Reihe von Fragen Veranlassung bieten würde.

ZWEITES CAPITEL.

Entwickelung der Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung.

§ 3.

Geometrische Darstellung der Bewegungen.

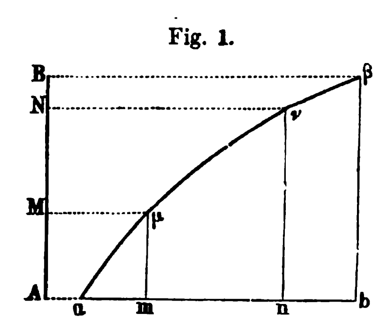
Wenn man die Bewegung eines materiellen Punktes aus ihren Ursachen erklären will, so muss man sich zunächst eine klare Vorstellung verschaffen von allem Denjenigen, was dazu gehört, um die Bewegung eines materiellen Punktes zu charakterisiren.

Es sei — um mit dem einfachsten Falle anzufangen — eine geradlinige Strecke AB (Fig. 1) als Bahnlinie eines materiellen Punktes gegeben (z. B. eine bestimmte Eisenbahnstrecke, auf welcher ein Eisenbahnwagen sich bewegt), auch die Art und Weise genau bekannt, in welcher die Bahn von dem materiellen Punkte durchlaufen wurde, und die Forderung gestellt: man solle von dieser Bewegung eine Beschreibung liefern, die so beschaffen ist, dass ein Anderer, der von dieser Bewegung Nichts wusste, eine vollkommen deutliche Vorstellung von dieser Bewegung daraus sich bilden könne. Diese Aufgabe kann auf folgende Weise gelöst werden.

Angenommen: dass ein Beobachter mit allen Hülfsmitteln zur Beobachtung von Längen- und Zeit-Grössen versehen, den materiellen Punkt in seiner Bewegung verfolgt und für jeden Zeitpunkt den Ort des materiellen Punktes oder die bereits zurückgelegte Wegeslänge beobachtet und notirt habe; oder — noch besser —

angenommen: dass mehrere Beobachter sich zu diesem Zwecke vereinigen, längs der Bahnstrecke sich aufstellen und mit der Uhr in der Hand ein Jeder den Zeitpunkt beobachten, in welchem der materielle Punkt an seinem Beobachtungsposten vorübergeht. Das Gesammt-Resultat aller dieser Beobachtungen lässt sich auf folgende einfache Weise bildlich darstellen.

Fig. 1.



Man zeichne eine gerade Linie ab (Fig. 1), welche ebenso viele Längeneinheiten als die ganze Dauer der Bewegung Zeiteinheiten enthält, z. B. so viele Meter als die Zeit Secunden enthält. Jeder Theil dieser Linie ab kann dann als Repräsentant eines Zeitabschnitts, jeder Punkt derselben als Repräsentant eines bestimmten Zeitpunktes angesehen werden. Es sei m derjenige Zeitpunkt, in welchem der materielle Punkt die Stelle M der Bahn erreichte. Man errichte in dem Punkte m das Perpendikel $m\mu$ und mache dasselbe gleich AM; ebenso wenn n der Zeitpunkt ist, in welchem der materielle Punkt an die Stelle N der Bahn gelangte, so errichte man in n das Perpendikel $n\nu = AN$ und verfahre auf gleiche Weise in Bezug auf die übrigen Zeitpunkte. Je grösser die Zahl der Beobachtungen war, um so mehr wird dann die auf solche Art gefundene Punkten-Reihe $\mu, \nu \ldots$ die Form einer zusammenhängenden Linie $a\mu\nu\beta$ annehmen, welche für jeden Zeitpunkt den zugehörigen Ort des materiellen Punktes anzeigt, und in ihrer Form das Gesetz der ganzen Bewegung veranschaulicht. Im Besitze einer solchen Zeichnung kann man nachher jede Frage, welche in Betreff der Art der Bewegung sich stellen lässt, sogleich beantworten, und der oben gestellten Forderung ist damit vollkommen genügt.

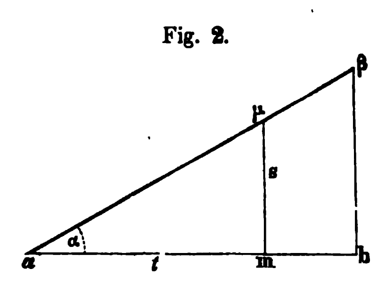
Wie sich auf diese Weise jede beliebige gegebene Bewegung geometrisch veranschaulichen lässt, so kann man auch umgekehrt eine beliebige gegebene Linie $a\beta$ als geometrische Darstellung einer noch unbekannten Bewegung ansehen und kann sich die Aufgabe stellen: aus dieser geometrischen Darstellung das Gesetz und die Eigenschaften der unbekannten Bewegung abzuleiten.

§ 4.

Gleichförmige Bewegung.

Am einfachsten gestaltet sich diese Aufgabe, wenn die geometrische Darstellung der zu untersuchenden Bewegung in Form einer geraden Linie $a\beta$ gegeben ist (Fig. 2). Man erkennt aus der Figur sogleich: dass die Linie $\overline{b\beta}$ die ganze Länge des Weges und die Linie $\overline{ab}$ die ganze Dauer der Bewegung darstellt, ferner: dass die während der Zeit $\overline{am} = t$ zurückgelegte Wegeslänge $\overline{m\mu} = s$ war.

Fig. 2.



Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke $am\mu$ und $ab\beta$ folgt die Gleichung:

$$\frac{s}{t} = \frac{\overline{b\beta}}{\overline{ab}},$$

welche nicht nur für den beliebig gewählten Zeitpunkt m, sondern auch für jeden anderen Zeitpunkt gültig ist. Die Bewegung ist daher so beschaffen: dass das Verhältniss der zurückgelegten Wegeslänge zu der verflossenen Zeit für jeden Zeitpunkt denselben Werth hat, oder: dass die verflossenen Zeiten sich stets verhalten wie die in diesen Zeiten zurückgelegten Wegeslängen. Eine solche Bewegung wird eine gleichförmige Bewegung genannt.

Jene Verhältnisszahl $\frac{s}{t}$, oder die zurückgelegte Wegeslänge dividirt durch die Anzahl der dazu verbrauchten Zeiteinheiten, stellt die Wegeslänge dar, welche in jeder einzelnen Zeiteinheit zurückgelegt wurde, und diese Wegeslänge wird die Geschwindigkeit der Bewegung genannt.

Bezeichet man die Geschwindigkeit der Bewegung mit c, so lässt sich das Gesetz der Bewegung durch die Gleichung darstellen:

$$1)\quad \frac{s}{t} = c, \quad \text{oder:} \quad s = c\,.\,t.$$

Die Kenntniss der Geschwindigkeit c reicht also hin, um für jeden Zeitpunkt die zurückgelgte Wegeslänge zu bestimmen.

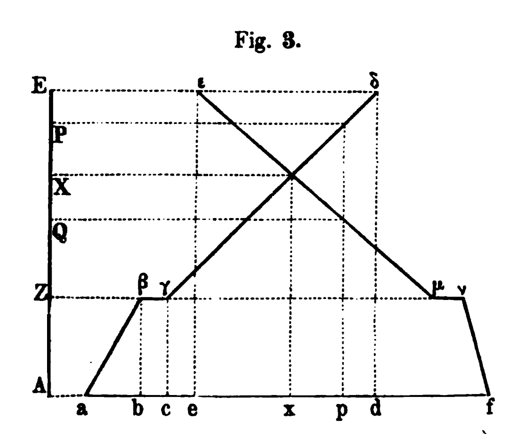
In der geometrischen Darstellung erscheint die Geschwindigkeit c als Tangente des Winkels α, den die Linie $a\beta$ mit der

Zeitlinie *ab* einschliesst. Man kann also an dem grösseren oder geringeren Steigungsverhältniss der Linie $\alpha\beta$ die grössere oder geringere Geschwindigkeit der dargestellten Bewegung erkennen und da, wo mehrere Bewegungen zusammen in einer Figur dargestellt sind, sofort die schnelleren Bewegungen von den langsameren unterscheiden.

Eine Linie, welche parallel der Zeitlinie läuft, bei welcher also die Tangente des Neigungswinkels Null ist, würde eine Bewegung mit der Geschwindigkeit Null, also den Ruhezustand darstellen. Eine Linie, welche einen rechten Winkel mit der Zeitlinie einschliesst, würde dagegen eine Bewegung mit unendlich grosser Geschwindigkeit bedeuten. Einer Linie endlich, welche abwärts statt aufwärts steigt, würde eine Bewegung mit negativer Geschwindigkeit oder eine rückläufige Bewegung entsprechen.

So würde z. B. die Linie $a\beta\gamma\delta$ (Fig. 3) als geometrische Darstellung der Bewegung eines Eisenbahnzuges gelten können, welcher im Zeitpunkte *a* die Anfangsstation *A* verlässt, im Zeitpunkte *b* die Zwischenstation *Z* erreicht, bis zum Zeitpunkte *c* daselbst verweilt und im Zeitpunkte *d* an der Endstation *E* ankommt; ebenso die Linie $\varepsilon\mu\nu f$ als Darstellung der Bewegung eines auf ähnliche Weise in der Zeit *ef* von *E* nach *A* zurückfahrenden Zuges. Derartige graphische Darstellungen von Eisenbahnfahrplänen geben — namentlich bei grösserer Zahl der Zwischenstationen und rascher Aufeinanderfolge der hin- und zurückfahrenden Züge — ein übersichtliches Bild von dem Verkehre auf der Bahnstrecke, von der Vertheilung der Züge in einem bestimmten Zeitpunkte, sowie von den verschiedenen Zeitpunkten, in welchen an einer bestimmten Stelle die Züge in der einen oder anderen Richtung vorüberfahren, und sind in dieser Beziehung den tabellarisch angeordneten Zusammenstellungen der Ankunft- und Abfahrt-Zeiten vorzuziehen. Aus der obigen Figur würde man z. B. auf den ersten Blick erkennen, dass im Zeitpunkte *x* die beiden Züge sich an der Stelle *X* begegnen, dass im Zeitpunkte *p* der hinfahrende Zug bei *P*, der zurückkehrende Zug bei *Q* sich befand etc.

Fig. 3.

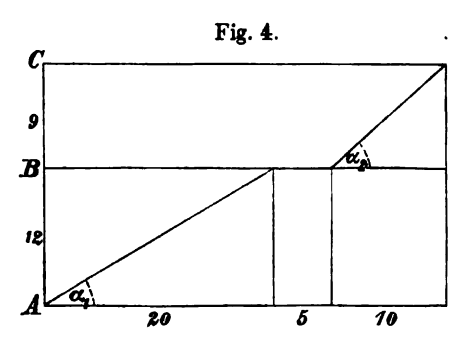


Wenn man bei diesen graphischen Darstellungen die **Minute** als Zeiteinheit und die Länge eines **Kilometers** als Längenein-

heit wählte, so würde die Tangente des Neigungswinkels der betreffenden Linie allemal die Geschwindigkeit, in Kilometern pro Minute ausgedrückt, darstellen, womit dann zugleich die Geschwindigkeit in Metern pro Secunde gegeben ist.

So z. B. erhält man aus der in Fig. 4 ausgeführten graphischen Darstellung der Bewegung eines Eisenbahnzuges, welcher die erste Strecke $\overline{AB} = 12$ Kilometer in 20 Minuten, und alsdann nach einem Aufenthalte von 5 Minuten die folgende Strecke $\overline{BC} = 9$ Kilometer in 10 Minuten zurücklegt, für die Geschwindigkeit, mit welcher die erste Strecke AB zurückgelegt wird, den Werth:

Fig. 4.



$$c_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{12}{20} = 0{,}6 \text{ Kilom. pro Min.,}$$

oder: 10 Meter pro Secunde,

und für die Geschwindigkeit, mit welcher die zweite Strecke BC zurückgelegt wird, den Werth:

$$c_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{9}{10} = 0{,}9 \text{ Kilom. pro Minute,}$$ oder: 15 Meter pro Secunde.

§ 5.

Ungleichförmige Bewegung.

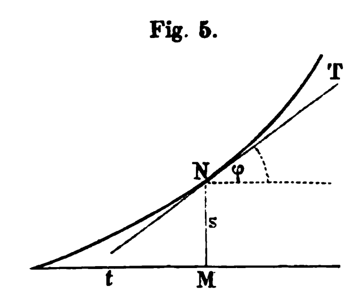
Wie man in der Geometrie die krumme Linie definirt als eine solche, die in keinem ihrer Theile gerade ist, so nennt man in der Mechanik ungleichförmige Bewegung eine solche, die in keinem ihrer Theile gleichförmig ist. Da die geometrische Darstellung einer gleichförmigen Bewegung eine gerade Linie bildet, so muss die geometrische Darstellung einer ungleichförmigen Bewegung eine Linie sein, die in keinem ihrer Theile gerade ist, also eine krumme Linie.

Wie die krumme Linie angesehen werden kann als zusammengesetzt aus unendlich vielen geradlinigen Stücken von unendlich kleiner Länge: so kann diejenige ungleichförmige Bewegung, deren graphische Darstellung jene krumme Linie bildet, betrachtet werden als zusammengesetzt aus unendlich vielen auf einander folgenden gleichförmigen Bewegungen von unendlich kleiner Dauer. Es ist demzufolge der Begriff der Geschwindigkeit — zu dessen Bildung ursprünglich die Untersuchung der gleichförmigen Bewegung Veranlassung gab — auch in Betreff der ungleichförmigen Bewegung einer ganz bestimmten Deutung fähig, sobald von

einem bestimmten Zeitpunkte die Rede ist. Man versteht darunter die Geschwindigkeit derjenigen gleichförmigen Bewegung, welcher das jenen Zeitpunkt enthaltende unendlich kleine Stück der ungleichförmigen Bewegung als unendlich kleiner Theil angehört; oder: derjenigen gleichförmigen Bewegung, welche mit der vorliegenden ungleichförmigen Bewegung an der betreffenden Stelle am meisten übereinstimmt.

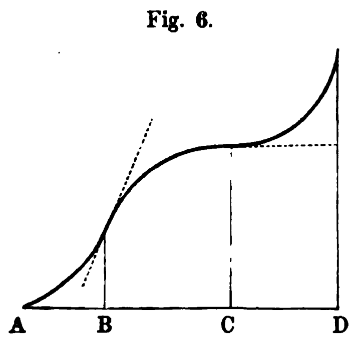
Wie die Tangente einer Curve unter allen geraden Linien diejenige ist, welche mit der Curve an der Berührungsstelle am meisten übereinstimmt, so ist die jener Tangente entsprechende gleichförmige Bewegung unter allen gleichförmigen Bewegungen diejenige, welche mit der durch die Curve dargestellten ungleichförmigen an jener Stelle am meisten übereinstimmt.

Fig. 5.



Man erhält demnach die Geschwindigkeit einer in ihrer geometrischen Darstellung gegebenen ungleichförmigen Bewegung für einen bestimmten Zeitpunkt M (Fig. 5), indem man durch den dazu gehörigen Punkt N eine Tangente NT an die Curve legt und die Geschwindigkeit der durch diese Linie NT dargestellten gleichförmigen Bewegung bestimmt. Diese Geschwindigkeit erscheint in der Figur — wie oben bereits an Fig. 2 gezeigt wurde — als trigonometrische Tangente des Neigungswinkels φ, oder als Steigungsverhältniss der Linie NT, und kann somit in der Zeichnung gemessen werden.*)

Fig. 6.



So würde z. B. in Bezug auf die in Fig. 6 dargestellte Bewegung beim blossen Anblick der Figur sofort zu erkennen sein: dass die Geschwindigkeit während der Zeit AB im Wachsen, während der Zeit BC im Abnehmen und während der Zeit CD wiederum im Zunehmen begriffen ist, ferner: dass im Zeitpunkte C die Ge-

*) Nach der Bezeichnungsweise der Differenzial-Rechnung würde die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ zu setzen sein.

schwindigkeit Null wird, weil dort die Curve horizontal gerichtet ist, dass im Punkte D die Geschwindigkeit unendlich gross wird, insofern dort die Curve in verticale Richtung übergeht u. s. w.

§ 6.

Geometrische Darstellung der Geschwindigkeiten.

Nachdem hiermit gezeigt, wie aus der gegebenen geometrischen Darstellung einer Bewegung die Geschwindigkeit an jeder Stelle ermittelt werden kann, wie also der Beobachter einer Bewegung mit der Messung und Aufzeichnung der zu verschiedenen Zeitpunkten zurückgelegten Wegeslängen mittelbar zugleich die Geschwindigkeiten misst und aufzeichnet: so kann nunmehr zur geometrischen Darstellung dieser indirecten Beobachtungs-Resultate eine zweite Zeichnung entworfen werden, in welcher die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit direct abgebildet wird.

Während bei der vorigen Methode für jeden Punkt der Zeitlinie die zurückgelegte Wegeslänge als Ordinate abgetragen wurde, so kann man statt dessen auch die jedesmalige Geschwindigkeit direct als Ordinate abtragen. Die Endpunkte dieser Ordinaten bilden alsdann eine Linie, welche — obwohl in etwas veränderter Weise — doch ebenso vollständig alle Eigenschaften der Bewegung veranschaulicht.

Es soll dies zunächst an der gleichförmigen Bewegung als einfachstem Beispiele nachgewiesen werden. Bei der gleichförmigen Bewegung werden in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt, und sind daher die Geschwindigkeiten in allen Zeitpunkten von derselben Grösse. Um eine solche Bewegung nach der zweiten Methode geometrisch darzustellen, würde man also an allen Punkten der Zeitlinie Perpendikel von gleicher Länge zu errichten haben. Die Endpunkte aller dieser Perpendikel bilden eine gerade Linie CD, welche der Zeitlinie parallel ist (Fig. 7). Die in der Zeit t zurückgelegte Wegeslänge s wird gefunden, indem man die Geschwindigkeit c mit der Zeit t multiplicirt:

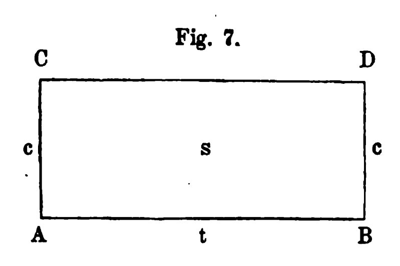


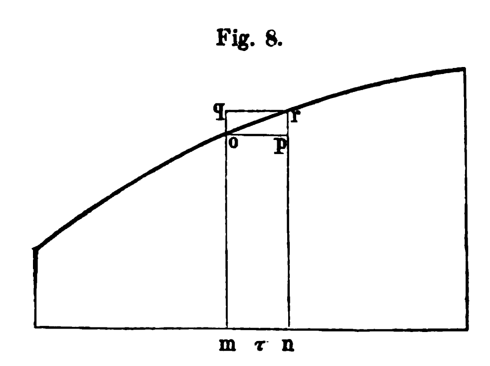
Fig. 7.

$$s = c \,.\, t.$$

Dieselbe Gleichung würde man anzuwenden haben, um den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ zu berechnen. Bei dieser zweiten Methode wird also die zurückgelegte Wegeslänge durch den Flächeninhalt der Figur repräsentirt.

Dass dieser letztere Satz auch in Bezug auf beliebige ungleichförmige Bewegungen gilt: davon überzeugt man sich durch folgende Betrachtungen. Da die ungleichförmige Bewegung in keinem ihrer Theile gleichförmig ist, und bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeitslinie parallel der Zeitlinie läuft, so muss die geometrische Darstellung der Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung eine (gerade oder krumme) Linie bilden, die in keinem ihrer Theile parallel zur Zeitlinie ist. Wenn man sich die ganze Dauer der Bewegung in eine beliebige Anzahl von Theilen zerlegt denkt und zunächst die Bewegung untersucht während eines solchen Zeittheils τ, dargestellt durch das Stück mn (Fig. 8), so findet man, dass die Geschwindigkeit in diesem Zeittheile von mo bis nr zunimmt. Wäre die Geschwindigkeit während der Zeit τ nicht gewachsen, vielmehr immer gleich mo geblieben, so würde die Flächenzahl des Rechtecks $mopn$ die während der Zeit τ zurückgelegte Wegeslänge repräsentiren. Wenn dagegen die Geschwindigkeit schon von Anfang an den Werth nr gehabt hätte — welchen sie in der That erst am Ende erreichte — so würde die Fläche des Rechtecks $mqrn$ die zurückgelegte Wegeslänge darstellen. Die wahre zurückgelegte Wegeslänge muss also nothwendig zwischen diesen beiden Grenzen liegen und darzustellen sein durch eine Fläche, deren Inhalt grösser als $mopn$ und kleiner als $mqrn$ ist. Diese beiden Grenzen liegen offenbar um so näher bei einander, je kleiner der Zeittheil τ angenommen wurde.

Fig. 8.



Dieselbe Betrachtung lässt sich auf jeden der übrigen Zeittheile anwenden. Die ganze zurückgelegte Wegeslänge liegt also zwischen folgenden zwei Grenzwerthen: den kleineren erhält man, indem man den Flächeninhalt der ganzen Figur berechnet und

dabei die untere von den beiden treppenförmigen Linien, nämlich *abcdef...z* als obere Begrenzung ansieht; den grösseren erhält man durch Berechnung des Inhalts der ganzen Figur, indem man die obere Linie $\alpha c \beta e \gamma ... \omega$ als Begrenzungslinie gelten lässt (Fig. 9).

Fig. 9.

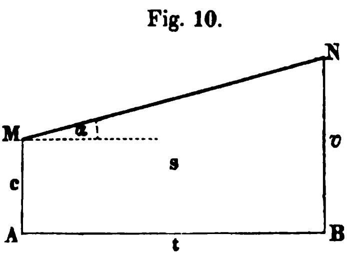
Denkt man sich die Zeittheilchen τ immer kleiner und kleiner werdend, so ergeben sich in der Figur zwei Treppenlinien von immer feinerer Stufentheilung, welche immer näher an einander rücken und bei ins Unendliche fortgesetzter Theilung in der Curve selbst mit einander zusammenfallen. Die wahre zurückgelegte Wegeslänge erhält man also, wenn man die Flächeninhaltszahl der Figur berechnet und dabei die Geschwindigkeitscurve selbst als obere Begrenzungslinie betrachtet.*)

§ 7.

Gleichförmig veränderte Bewegung.

Wie sich die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit einer jeden Bewegung durch eine Linie geometrisch darstellen lässt so kann auch umgekehrt jede gegebene Linie als geometrische Darstellung der Geschwindigkeitsänderung irgend einer unbekannten Bewegung gelten, und die Aufgabe daran geknüpft werden: die Eigenschaften der Bewegung daraus abzuleiten.

Fig. 10.



Am einfachsten gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe, wenn die gegebene Linie eine gerade Linie MN ist (Fig. 10). Man erkennt aus der Figur, dass die Ge-

*) Wenn v die nach t Secunden erlangte Geschwindigkeit bezeichnet, so würde nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung die nach t Secunden zurückgelegte Wegeslänge $s = \int_0^t v\,dt$ zu setzen sein.

schwindigkeit während t Secunden von c bis v wächst, und dass dieses Wachsen gleichförmig erfolgt. Die ganze Geschwindigkeitsänderung $v - c$ vertheilt sich gleichmässig auf t Secunden, so dass für jede einzelne Secunde die Geschwindigkeitsänderung

$$\frac{v-c}{t}$$

beträgt. Eine solche Bewegung wird eine gleichförmig beschleunigte Bewegung genannt, und jene in 1 Secunde erfolgende Geschwindigkeitszunahme heisst die Beschleunigung der Bewegung. Diese Beschleunigung $\frac{v-c}{t}$ erscheint in der Figur durch die Tangente des Steigungswinkels α, d. h. durch das Steigungsverhältniss der Linie MN dargestellt.

Die in t Secunden zurückgelegte Wegeslänge wird nach dem im vorigen Paragraphen gegebenen Beweise durch die Flächenzahl des Trapezes $ABNM$ gemessen und hat die Grösse:

$$\left(\frac{v+c}{2}\right) t.$$

Bezeichnet man die Beschleunigung der Bewegung mit p und die in t Secunden zurückgelegte Wegeslänge mit s, so ergeben sich hieraus für die gleichförmig beschleunigte Bewegung die beiden Gleichungen:

$$2)\quad p = \frac{v-c}{t},$$

$$3)\quad s = \left(\frac{v+c}{2}\right) t,$$

aus denen sich durch Elimination — das erste Mal von t, das zweite Mal von c, das dritte Mal von v — noch die drei anderen Formen ableiten lassen:

$$4)\quad s = \frac{v^2 - c^2}{2p},$$

$$5)\quad s = vt - \frac{pt^2}{2},$$

$$6)\quad s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Diese Gleichungen gelten auch für die gleichförmig verzögerte Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleiche Grössen abnimmt (Fig. 11), insofern eine solche Bewegung angesehen werden kann als eine gleichförmig beschleu-

nigte Bewegung mit **negativer** Beschleunigung. Beide Bewegungsarten werden gemeinschaftlich mit dem Ausdruck **gleichförmig veränderte Bewegung** bezeichnet. Die geometrische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die Geschwindigkeit sich ändert, führt bei der gleichförmig veränderten Bewegung immer zu einer **geraden Linie**, deren (positives oder negatives) Steigungsverhältniss allemal die Grösse der (positiven oder negativen) Beschleunigung darstellt.

Fig. 11.

Nach der in Fig. 12 ausgeführten graphischen Darstellung der Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges, welcher während des ersten Zeitabschnittes t_1 gleichförmig **beschleunigt**, während des zweiten Zeitabschnittes t_2 **gleichförmig**, während des dritten Zeitabschnittes t_3 gleichförmig **verzögert** sich bewegte, würde man die volle Fahrgeschwindigkeit c, mit welcher derselbe während des zweiten Zeitabschnittes sich bewegte, berechnen können, sobald die ganze Wegeslänge s (dargestellt durch den ganzen Flächeninhalt der Figur) und die drei Zeitabschnitte gegeben sind, mittelst der Gleichung:

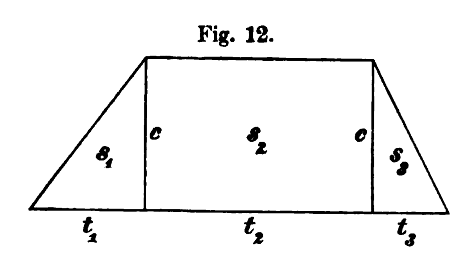


Fig. 12.

$$s = \frac{ct_1}{2} + ct_2 + \frac{ct_3}{2}, \quad \text{oder:} \quad c = \frac{s}{\frac{1}{2}t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3}.$$

Wenn z. B. die Werthe: $s = 7200^m$, $t_1 = 180$ Sec., $t_2 = 480$ Sec., $t_3 = 60$ Sec. gegeben sind, so erhält man für die gesuchte Geschwindigkeit den Werth:

$$c = \frac{7200}{90 + 480 + 30} = 12^m,$$

und für die Längen der drei Strecken erhält man die Werthe:

$$s_1 = \frac{ct_1}{2} = 1080^m, \quad s_2 = ct_2 = 5760^m, \quad s_3 = \frac{ct_3}{2} = 360^m.$$

Für die Beschleunigung, mit welcher die erste Strecke zurückgelegte wurde, ergiebt sich der Werth:

$$p_1 = \frac{c}{t_1} = \frac{1}{15} \text{ Meter.}$$

Die Beschleunigung während des zweiten Zeitabschnittes war gleich Null, und die Beschleunigung während des dritten Zeitabschnittes hatte die Grösse:

$$p_3 = -\frac{c}{t_3} = -\frac{1}{5} \text{ Meter,}$$

d. h. die dritte Strecke wurde mit einer Verzögerung von $0^m,2$ pro Secunde zurückgelegt.

§ 8.

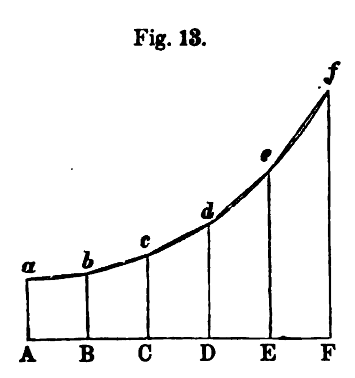
Ungleichförmig veränderte Bewegung.

Eine Bewegung, die in keinem ihrer Theile eine gleichförmig veränderte ist, nennt man eine ungleichförmig veränderte Bewegung. Die geometrische Darstellung der Geschwindigkeit einer solchen Bewegung muss eine Linie geben, die in keinem ihrer Theile gerade ist, also eine krumme Linie.

Wie die Untersuchung der gleichförmigen Bewegung zur Bildung des Begriffes Geschwindigkeit Veranlassung gab, und dieser Begriff nachher auch auf ungleichförmige Bewegungen sich übertragen liess: so kann der Begriff Beschleunigung, zu welchem man ursprünglich bei Untersuchung der gleichförmig beschleunigten Bewegung gelangte, nunmehr auch auf ungleichförmig beschleunigte Bewegungen übertragen werden.

Man denkt sich zunächst statt der wahren durch die Curve af dargestellten Bewegung eine aus vielen gleichförmig beschleunigten zusammengesetzte Bewegung, deren Geschwindigkeiten nur in den einzelnen Zeitpunkten A, B, C, D, E, F mit denen der wahren Bewegung übereinstimmen (Fig. 13). Die geometrische Darstellung derselben würde die der krummen Linie eingeschriebene gebrochene Linie $abcdef$ sein. Für jeden einzelnen Theil dieser zusammengesetzten Bewegung hat alsdann das Wort Beschleunigung der früher gegebenen Definition gemäss seinen bestimmten Sinn, und wird die Grösse derselben durch das Steigungsverhältniss der betreffenden Sehne dargestellt.

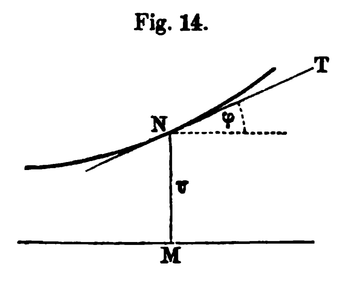
Fig. 13.



Wie bei fortgesetzter Theilung und Verkleinerung der Theile die Richtungen der Sehnen mehr und mehr den Richtungen der Tangenten sich anschliessen, so werden die zugehörigen Beschleunigungen mehr und mehr denjenigen Werthen sich nähern, welche als Beschleunigungen der wirklichen Bewegung in den einzelnen Zeitpunkten anzusehen sind. Bei der wirklichen Bewegung selbst wird also das Steigungsverhältniss $\operatorname{tg}\varphi$

der Tangente NT die Beschleunigung*) für den Zeitpunkt M darstellen (Fig. 14). Die Beschleunigung ist positiv oder negativ, je nachdem die Geschwindigkeitscurve an dieser Stelle im Aufwärts- oder Abwärts-Steigen begriffen ist.

Fig. 14.



Wenn also bei einer ungleichförmig veränderten Bewegung von der Beschleunigung in irgend einem Zeitpunkte die Rede ist, so versteht man darunter die in der Zeiteinheit erfolgende Geschwindigkeitszunahme, gemessen — nicht an der wirklichen Bewegung selbst — sondern an derjenigen gleichförmig veränderten Bewegung, mit welcher in jenem Zeitpunkte die wirkliche Bewegung am meisten übereinstimmt.

Das Wort Geschwindigkeit aber ist auch für die ungleichförmig veränderte Bewegung zu definiren wie früher: als die in der Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge, gemessen — nicht an der wirklichen Bewegung selbst — sondern an derjenigen gleichförmigen Bewegung, welche mit der vorliegenden am meisten übereinstimmt in dem betreffenden Zeitpunkte.

Die im Vorstehenden entwickelten Gesetze der einfachen geradlinigen Bewegung des materiellen Punktes gelten auch in Bezug auf die geradlinige Bewegung eines beliebig grossen festen Körpers, wenn die Bewegung desselben eine fortschreitende ist, d. h. wenn jede gerade Linie an dem Körper während der Bewegung parallel zu ihrer anfänglichen Richtung bleibt. In diesem Falle beschreiben alle Punkte des Körpers gleiche Bahnen in gleicher Weise, und das Bewegungsgesetz irgend eines Punktes an demselben gilt auch für alle übrigen Punkte des Körpers.

---

*) Nach der Bezeichnungsweise der Differenzial-Rechnung würde die Beschleunigung $p = \frac{dv}{dt}$ zu setzen sein, oder wenn hierin $v = \frac{ds}{dt}$ substituirt wird: $p = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

DRITTES CAPITEL.

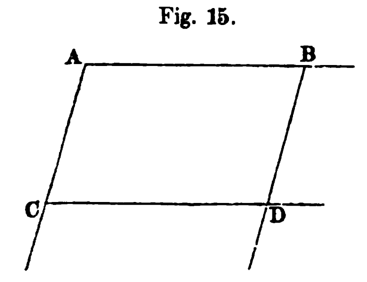
Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen.

§ 9.

Parallelogramm der Bewegungen.

Es ist denkbar, dass die Bahnlinie AB eines materiellen Punktes an einem festen Körper sich befindet, der gleichzeitig eine fortschreitende Bewegung in der Richtung AC ausführt, während der Punkt auf ihr in der Richtung AB fortrückt (Fig. 15). Obwohl es natürlich streng genommen nur eine einzige Bewegung ist, die der Punkt dabei wirklich ausführt, so sagt man in solchem Falle doch von dem Punkte: er habe gleichzeitig zwei Bewegungen, um damit anzudeuten, auf welche Weise jene wirkliche Bewegung zu Stande kommt.

Fig. 15.



Wenn man das Bewegungsgesetz für jede der beiden Bewegungen kennt, so kann man die Stelle, an welche der materielle Punkt nach irgend einer Zeit t gelangt, auf folgende Weise finden. Man bestimmt zunächst nach dem einen der beiden Bewegungsgesetze die Strecke AC, um welche die Bahnlinie in dieser Zeit fortgerückt ist, und findet damit die neue Lage CD der Bahnlinie. Man bestimmt hierauf nach dem andern Bewegungsgesetze die Strecke AB, um welche der Punkt inzwischen längs der Bahnlinie fortgesetzt ist, und trägt diese Länge auf deren neuer Lage von C nach D ab. Der Endpunkt D dieses Abschnitts ist der Ort, welchen nach t Secunden der materielle Punkt einnimmt.

Genau zu demselben Resultate würde man auch gelangt sein, wenn man AC als die in Bewegung begriffene Bahnlinie, AB als deren Bewegungsrichtung betrachtet hätte, und wenn man die beiden Bewegungen in entgegengesetzter Reihenfolge nach einander abgetragen hätte. In beiden Fällen erweist sich der dem Anfangspunkte A gegenüberliegende Endpunkt D eines aus den beiden Einzelbewegungen gebildeten Parallelogramms als der Ort, den der materielle Punkt nach Verlauf der Zeit t einnimmt. Dieses

Gesetz gilt ganz allgemein für gleichförmige sowohl als für ungleichförmige Bewegungen und wird das Parallelogramm der Bewegungen genannt. Die von dem Punkte wirklich ausgeführte Bewegung nennt man im Gegensatze zu jenen beiden Einzel- oder Seiten-Bewegungen die resultirende Bewegung.

Man findet die Bahnlinie der resultirenden Bewegung, indem man durch Wiederholung jener Parallelogramm-Construction nach und nach die den verschiedenen Zeitpunkten entsprechenden Orte des materiellen Punktes construirt oder berechnet.

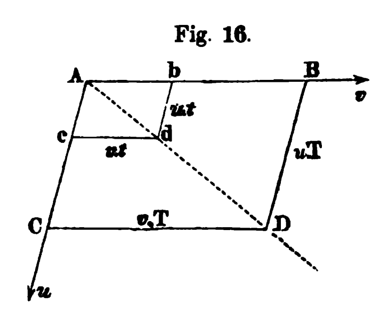
§ 10.

Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

Wenn die beiden Seitenbewegungen geradlinig und gleichförmig sind, so ist auch die resultirende Bewegung geradlinig und gleichförmig.

Um diesen Satz zu beweisen, construire man nach dem eben angegebenen Verfahren das eine Mal den Ort d, welchen der materielle Punkt nach der Zeit t, das andere Mal den Ort D, welchen derselbe nach der Zeit T einnimmt (Fig. 16). Sind v und u die Geschwindigkeiten der beiden gleichförmigen Seitenbewegungen, so wird der Punkt d der dem Anfangspunkte A gegenüberliegende Eckpunkt eines aus den beiden Wegeslängen $v \,.\, t$ und $u \,.\, t$ gebildeten Parallelogramms sein, und der Punkt D der gegenüberliegende Eckpunkt des aus den beiden Wegeslängen $v \,.\, T$ und $u \,.\, T$ gebildeten Parallelogramms.

Fig. 16.



Das Seiten-Verhältniss im kleineren Parallelogramm ist dem des grösseren gleich, weil

$$\frac{v \,.\, t}{u \,.\, t} = \frac{v \,.\, T}{u \,.\, T} = \frac{v}{u},$$

und die gleichliegenden Seiten haben in beiden Parallelogrammen gleiche Richtungen. Hieraus folgt, dass die beiden Parallelogramme einander ähnlich sind, und dass die drei Punkte A, d, D in einer geraden Linie liegen. Da dieselbe Beweisführung auch für zwei beliebige andere Zeitpunkte passt, so ergiebt sich hieraus,

dass alle Bahnpunkte der resultirenden Bewegung in die Richtung der geraden Linie AD hineinfallen, dass also die geradlinigen Strecken Ad und AD dieser Linie zugleich die in den Zeiten t und T resp. zurückgelegten Wegeslängen für die resultirende Bewegung darstellen.

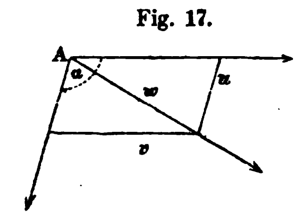
Da nun wegen Aehnlichkeit der beiden Parallelogramme das Verhältniss ihrer gleichliegenden Diagonalen mit dem Verhältniss zweier gleichliegender Seiten übereinstimmt, also

$$\frac{\overline{Ad}}{\overline{AD}} = \frac{v\,.\,t}{v\,.\,T} = \frac{t}{T}$$

ist, so besitzt die resultirende Bewegung die Eigenschaft: dass die zurückgelegten Wegeslängen sich verhalten wie die dazu verbrauchten Zeiten, eine Eigenschaft, welche oben als charakteristisches Merkmal der gleichförmigen Bewegung gefunden wurde.

Um die Geschwindigkeit w der resultirenden Bewegung zu bestimmen, braucht man also nur die in der ersten Secunde zurückgelegte Wegeslänge zu construiren, d. h. die Diagonale desjenigen Parallelogramms, dessen Seiten resp. $v\,.\,1$ und $u\,.\,1$ sind (Fig. 17).

Fig. 17.



Die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung wird also ihrer Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des aus den beiden Seitengeschwindigkeiten construirten Parallelogramms dargestellt. Dieser Satz wird das Parallelogramm der Geschwindigkeiten genannt.

Hieraus folgt z. B.: dass die resultirende Geschwindigkeit gleich der Summe der beiden Seitengeschwindigkeiten wird, wenn der Winkel α, den die beiden Bewegungsrichtungen einschliessen, Null ist; dass dieselbe gleich der Differenz der beiden Seitengeschwindigkeiten wird, wenn dieser Winkel 180° beträgt. Es wird ferner $w = \sqrt{v^2 + u^2}$, wenn die beiden Geschwindigkeiten v und u rechtwinkelig zu einander gerichtet sind.

§ 11.

Parallelepipedon der Bewegungen.

Wenn die Ebene $ABDC$ in der Richtung AE fortschreitet, während ein materieller Punkt in ihr die zwei Bewegungen AB

und AC ausführt, so sagt man von dem Punkte: er habe gleichzeitig drei Bewegungen (Fig. 18). Sind die Gesetze dieser drei Bewegungen gegeben, so findet man den Ort, an welchen der materielle Punkt nach t Secunden gelangt; indem man zunächst nach dem ersten Bewegungsgesetze die Lage $EFHG$ bestimmt, in welche jene Ebene nach dieser Zeit übergegangen ist, und hierauf nach dem schon bekannten Verfahren den Ort aufsucht, welchen der Punkt inzwischen vermöge der beiden anderen Bewegungen in dieser Ebene erreicht hat. Es zeigt sich bei dieser Construction: dass der dem Anfangspunkte A gegenüberliegende Eckpunkt H eines aus den drei Einzelbewegungen gebildeten Parallelepipedons den Endpunkt der resultirenden Bewegung darstellt.

Fig. 18.

Genau zu demselben Resultate würde man gelangt sein, wenn man $ACGE$ als die fortschreitende Ebene und AC, AE als Bewegungen des Punktes in dieser Ebene angesehen hätte. Die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Bewegungen abgetragen werden, hat keinen Einfluss auf das Ergebniss der Construction.

Die Regel nach welcher die Resultirende zweier Bewegungen zu bestimmen ist, bleibt also auch dann noch gültig, wenn neben diesen zweien eine dritte stattfindet. Man kann daher die Resultirende dreier Bewegungen auch ansehen als die Resultirende zweier Bewegungen: nämlich jener dritten und der Resultirenden von den beiden ersten. Die Aufgabe: von drei Bewegungen die Resultirende zu bestimmen, ist hiermit zurückgeführt auf die schon gelöste Aufgabe: die Resultirende zweier Bewegungen zu finden.

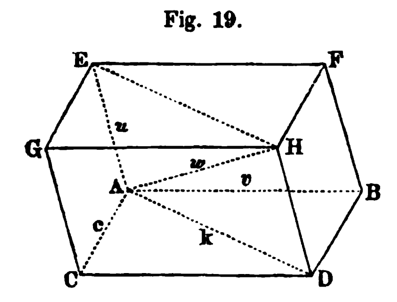
§ 12.

Parallelepipedon der Geschwindigkeiten.

Wenn die drei Seitenbewegungen geradlinig und gleichförmig sind, so ist die Resultirende der beiden ersten geradlinig und gleichförmig — wie schon bewiesen —. Ihre Zusammensetzung

mit der dritten liefert daher wiederum eine geradlinige und gleichförmige Bewegung. Die Geschwindigkeit w dieser resultirenden Bewegung kann betrachtet werden als Resultirende von zwei Seitengeschwindigkeiten: nämlich der Resultirenden k von den beiden ersten und der Geschwindigkeit u der dritten Bewegung (Fig. 19). Sie wird also dargestellt durch die Diagonale des Parallelogramms $AEHD$, welche zugleich die Diagonale eines aus den drei Seitengeschwindigkeiten v, c, u construirten Parallelepipedons bildet.

Fig. 19.



Die Resultirende von drei gegebenen Geschwindigkeiten wird also ihrer Grösse und Richtung nach dargestellt durch die Diagonale des aus den drei Seitengeschwindigkeiten construirten Parallelepipedons.

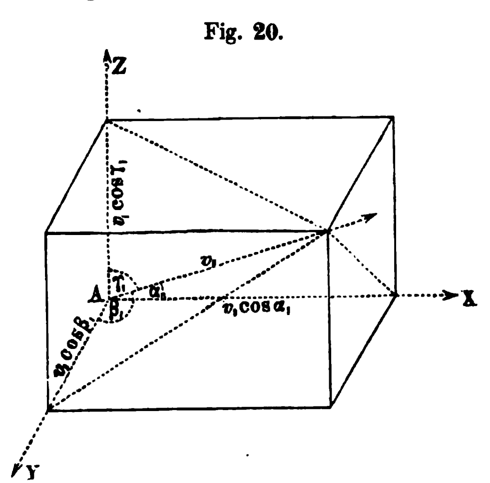
Wenn die drei Seitengeschwindigkeiten rechtwinkelig zu einander gerichtet sind, so wird: $w = \sqrt{k^2 + u^2} = \sqrt{v^2 + c^2 + u^2}$. Setzt man hierin z. B. $v = 2$, $c = 3$, $u = 6$, so wird: $w = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$.

Der obige Satz, welcher das Parallelepipedon der Geschwindigkeiten genannt wird, bleibt auch dann noch gültig für die Resultirende dreier Geschwindigkeiten, wenn neben diesen dreien noch andere Geschwindigkeiten stattfinden. Davon überzeugt man sich leicht, indem man jenes Parallelepipedon selbst wiederum in fortschreitender gleichförmiger Bewegung begriffen annimmt, und diese vierte Bewegung mit der schon gefundenen Resultirenden der drei ersten zu einer neuen Resultirenden zusammensetzt, und sich das Verfahren in Bezug auf eine 5te, 6te... Bewegung wiederholt denkt.

Da die Ausdrücke Seitengeschwindigkeiten und resultirende Geschwindigkeit nur auf verschiedenen Auffassungsweisen eines und desselben Vorgangs beruhen, so darf man in allen Fällen die eine Ausdrucksweise mit der anderen vertauschen. Wie man also den drei Seitengeschwindigkeiten die resultirende Geschwindigkeit substituiren darf, so kann man ohne Bedenken auch umgekehrt — wo es bequemer scheint — eine gegebene Geschwindigkeit durch drei andere Geschwindigkeiten ersetzen, wenn die-

selben nur so gewählt werden, dass ihre Zusammensetzung wiederum zu jener gegebenen als Resultirenden führen würde. Man nennt diese Substitution eine Zerlegung der gegebenen Geschwindigkeit in ihre drei Seitengeschwindigkeiten.

Fig. 20.



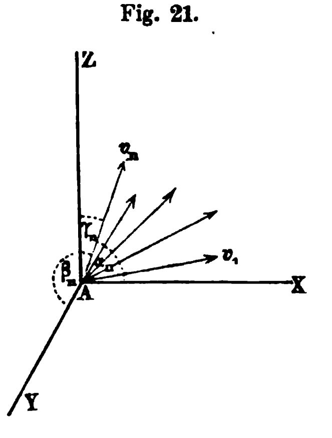
Eine gegebene Geschwindigkeit v_1 kann z. B. zerlegt werden in die drei rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitengeschwindigkeiten: $v_1 . \cos \alpha_1$, $v_1 . \cos \beta_1$, $v_1 . \cos \gamma_1$, da die Zusammensetzung dieser drei Geschwindigkeiten wiederum die Geschwindigkeit v_1 als Resultirende ergeben würde (Fig. 20).

So kann z. B. eine gegebene Geschwindigkeit $v_1 = 7$, deren Richtung durch die drei Gleichungen: $\cos \alpha_1 = \frac{2}{7}$, $\cos \beta_1 = \frac{3}{7}$, $\cos \gamma_1 = \frac{6}{7}$ gegeben ist, zerlegt werden in die drei rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitengeschwindigkeiten:

$$v_1 \cos \alpha_1 = 2, \quad v_1 \cos \beta_1 = 3, \quad v_1 \cos \gamma_1 = 6.$$

Hierauf gründet sich folgende einfache Methode: von einer beliebigen Anzahl gegebener Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \dots v_n$ die Resultirende v zu bestimmen (Fig. 21). Man zerlegt zunächst jede der gegebenen Geschwindigkeiten nach drei festen rechtwinkelig zu einander gerichteten Achsenrichtungen (auf dieselbe Weise, wie in Fig. 20 bereits angedeutet wurde) in ihre drei Seitengeschwindigkeiten. Die Resultirende gleichgerichteter Geschwindigkeiten ist gleich deren Summe. Man erhält also für die Resultirende v_x aller derjenigen Seitengeschwindigkeiten, welche bei der Zerlegung in die Richtung AX fielen, die Gleichung:

Fig. 21.



$$v_x = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \cdots + v_n \cos \alpha_n,$$

oder, wenn man abkürzungsweise den Ausdruck rechts mit $\Sigma(v \cos \alpha)$ bezeichnet:

$$7) \quad v_x = \Sigma(v \cos \alpha).$$

Auf gleiche Weise erhält man als Resultirende v_y aller in die Richtung AY fallenden Seitengeschwindigkeiten:

$$8) \quad v_y = \Sigma(v \cos \beta)$$

und als Resultirende v_z aller in die Richtung AZ fallenden Seitengeschwindigkeiten:

$$9) \quad v_z = \Sigma(v \cos \gamma).$$

Die Resultirende der drei Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z ist zugleich die Resultirende der gegebenen Geschwindigkeiten v_1, v_2 . . . v_n. Construirt man also aus den drei Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z ein Parallelepipedon, so wird die Diagonale desselben ihrer Grösse und Richtung nach die gesuchte Resultirende darstellen. Hiernach ergeben sich aus Fig. 22 für die Resultirende v und für die Winkel α, β, γ, welche dieselbe mit den drei festen Achsenrichtungen einschliesst, die Gleichungen:

Fig. 22.

$$10) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$11) \quad \cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \qquad 12) \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \qquad 13) \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Wenn z. B. von den drei gegebenen Geschwindigkeiten

$$v_1 = 3, \quad v_2 = 7, \quad v_3 = 9$$

die Resultirende gefunden werden soll, und für die Winkel, welche die Richtungen derselben mit drei rechtwinkelig zu einander stehenden festen Achsenrichtungen einschliessen, die Werthe gegeben sind:

$$\cos\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{2}{7}, \quad \cos\alpha_3 = \frac{4}{9},$$
$$\cos\beta_1 = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta_2 = \frac{3}{7}, \quad \cos\beta_3 = \frac{8}{9},$$
$$\cos\gamma_1 = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{6}{7}, \quad \cos\gamma_3 = \frac{1}{9},$$

so erhält man zunächst für die resultirenden Geschwindigkeiten in den drei Achsenrichtungen die Gleichungen:

$$v_x = 2 + 2 + 4 = 8,$$
$$v_y = 1 + 3 + 8 = 12,$$
$$v_z = 2 + 6 + 1 = 9.$$

Die Resultirende von diesen drei rechtwinkelig zu einander gerichteten Geschwindigkeiten hat die Grösse:

$$v = \sqrt{8^2 + 12^2 + 9^2} = 17,$$

und für die Richtung dieser Resultirenden ergeben sich die Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{8}{17}, \quad \cos\beta = \frac{12}{17}, \quad \cos\gamma = \frac{9}{17}.$$

Dass die obigen Gleichungen auch dann noch gültig bleiben, wenn eine (oder mehrere) der gegebenen Geschwindigkeiten, z. B. v_n, einen stumpfen Winkel mit der Richtung AX (oder einer der beiden anderen Achsenrichtungen) einschliesst, die betreffende Seitengeschwindigkeit also in die entgegengesetzte Richtung hineinfällt: davon überzeugt man sich leicht, wenn man erwägt, dass das betreffende Glied $v_n \cos\alpha_n$ der Reihe $\Sigma(v\cos\alpha)$ alsdann negativ wird, der negativen Richtung entsprechend. Vorausgesetzt also: dass alle Winkel auf gleiche Weise, von der positiven Achsenrichtung aus, gemessen werden, müssen jene Gleichungen immer ein richtiges Resultat liefern.

Wenn man z. B. mit Beibehaltung der sämmtlichen übrigen Zahlenwerthe des vorigen Beispiels $\cos\alpha_3 = -\frac{4}{9}$ $\left(\text{statt } +\frac{4}{9}\right)$ setzt, so erhält man:

$$v_x = 0, \quad v_y = 12, \quad v_z = 9,$$
$$v = \sqrt{0 + 12^2 + 9^2} = 15,$$
$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = \frac{12}{15}, \quad \cos\gamma = \frac{9}{15}.$$

Es wird also in diesem Falle der Winkel α, welchen der Resultirende mit der X-Achse einschliesst, gleich 90°, und die Richtung der Resultirenden fällt in die YZ-Ebene.

Das Parallelepipedon der Geschwindigkeiten und die aus demselben abgeleiteten Gleichungen gelten nicht nur für die Geschwindigkeiten gleichförmiger Bewegungen, sondern auch für die Geschwindigkeiten beliebiger ungleichförmiger Bewegungen in einem bestimmten Zeitpunkte. Denn das Wort Geschwindigkeit bezieht

sich — der im § 5 gegebenen Definition gemäss — auf gleichförmige Bewegungen, und zwar diejenigen, mit welchen die gegebenen ungleichförmigen Bewegungen in diesem Zeitpunkte am meisten übereinstimmen. Die Geschwindigkeit der Resultirenden von jenen gleichförmigen Bewegungen ist zugleich die Geschwindigkeit, welche die Resultirende der gegebenen ungleichförmigen Bewegungen in diesem Augenblicke besitzt.

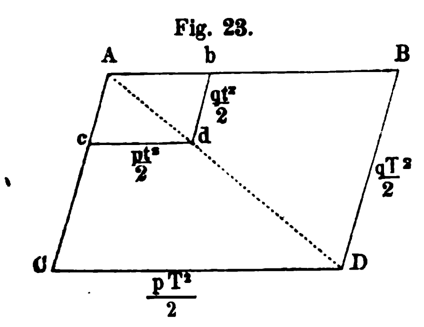
§ 13.

Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen.

Wenn ein materieller Punkt zwei geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegungen gleichzeitig ausführt, welche beide mit der Geschwindigkeit Null anfangen, so ist seine resultirende Bewegung ebenfalls eine geradlinige und gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Man beweist diesen Satz, indem man nach dem Parallelogramm der Bewegungen das eine Mal den Ort d bestimmt, an welchen der Punkt nach der Zeit t, das andere Mal den Ort D, an welchen der Punkt nach der Zeit T gelangt (Fig. 23). Wenn p und q resp. die Beschleunigungen in den beiden Bewegungsrichtungen AB und AC sind, so erhält man — nach Gleichung 6), wenn man berücksichtigt, dass die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind — die Wegeslängen:

Fig. 23.



$$\frac{1}{2}\,p\,t^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\,q\,t^2$$

als Seiten des Parallelogramms $Abdc$, und die Wegeslängen:

$$\frac{1}{2}\,p\,T^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\,q\,T^2$$

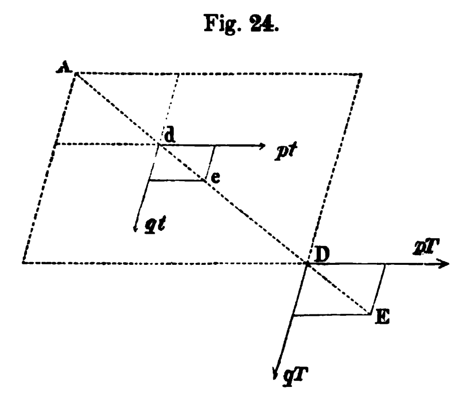
als Seiten des Parallelogramms $ABDC$. Diese beiden Parallelogramme sind einander ähnlich, weil das Seitenverhältniss:

$$\frac{\frac{1}{2}\,p\,t^2}{\frac{1}{2}\,q\,t^2} = \frac{\frac{1}{2}\,p\,T^2}{\frac{1}{2}\,q\,T^2} = \frac{p}{q}$$

in beiden Parallelogrammen den gleichen Werth hat. Die drei Punkte A, d, D liegen daher in einer geraden Linie, und da die gleiche Beweisführung für alle übrigen Zeitpunkte gilt, so liegen sämmtliche Bahnpunkte der resultirenden Bewegung in einer geraden Linie.

Die resultirende Geschwindigkeit, welche der materielle Punkt an der Stelle d besitzt, wird durch die Diagonale de des aus den beiden erlangten Seitengeschwindigkeiten pt und qt gebildeten Parallelogramms dargestellt, ebenso die resultirende Geschwindigkeit an der Stelle D durch die Diagonale DE des aus den beiden Seitengeschwindigkeiten pT und qT gebildeten Parallelogramms (Fig. 24). Die Dimensionen dieser beiden ähnlichen Parallelogramme sind den Zeiten resp. t und T proportional, folglich auch ihre Diagonalen.

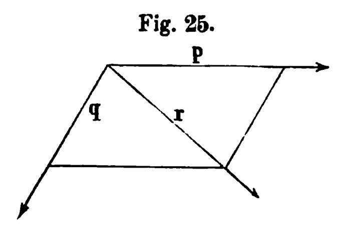
Fig. 24.



Die resultirenden Geschwindigkeiten verhalten sich also wie die verflossenen Zeiten, d. h. die resultirende Geschwindigkeit wächst in gleichen Zeiten um gleiche Grössen. Mithin ist die Resultirende eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Die Beschleunigung r der resultirenden Bewegung ist gleich der am Ende der ersten Secunde erlangten resultirenden Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit wird ihrer Grösse und Richtung nach dargestellt durch die Diagonale des aus den Seiten $p \, . \, 1$ und $q \, . \, 1$ gebildeten Parallelogramms (Fig. 25).

Fig. 25.



Die resultirende Beschleunigung ist also ihrer Grösse und Richtung nach gleich der Diagonale des aus den beiden Seitenbeschleunigungen construirten Parallelogramms.

Eine Vergleichung dieses Satzes mit dem früher bereits ge-

fundenen Satze vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten zeigt: dass für das Auffinden der resultirenden Beschleunigung genau dieselben Regeln gelten wie für das Aufsuchen der resultirenden Geschwindigkeit. Die Zusammensetzung (und Zerlegung) der Beschleunigungen ist hiermit zurückgeführt auf die schon bekannte Zusammensetzung (und Zerlegung) der Geschwindigkeiten. Die ganze Beweisführung, durch welche im § 12 aus dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten das Parallelepipedon der Geschwindigkeiten und die allgemeinen Gleichungen für die resultirende Geschwindigkeit abgeleitet wurden, kann — wenn man überall das Wort Geschwindigkeit durch das Wort Beschleunigung ersetzt — Wort für Wort als gültig angesehen werden auch für Beschleunigungen.

Fig. 26.

Für die resultirende Beschleunigung p der gegebenen Beschleunigungen $p_1 \ldots p_n$ ergeben sich hiernach aus den Gleichungen 7) . . . 13) — wenn man darin den Buchstaben v mit dem Buchstaben p vertauscht — die allgemeinen Gleichungen (Fig. 26):

$$14) \quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2},$$

$$15) \quad \cos\alpha = \frac{p_x}{p}, \qquad 16) \quad \cos\beta = \frac{p_y}{p}, \qquad 17) \quad \cos\gamma = \frac{p_z}{p}.$$

Diese Gleichungen sind auch dann noch gültig, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Bewegungen nicht gleich Null sind. Denn wenn c die Resultirende der Anfangsgeschwindigkeiten ist, so kann man in diesem Falle die Bewegung des materiellen Punktes so auffassen: als ob der ganze Raum, in welchem die mit der Geschwindigkeit Null anfangenden gleichförmig beschleunigten Bewegungen geschehen, während derselben eine

gleichförmig fortschreitende Bewegung mit der Geschwindigkeit c ausführt. Die Bewegung ist also anzusehen als zusammengesetzt aus einer gleichförmigen und einer gleichförmig beschleunigten Bewegung. Die Beschleunigung der letzteren ist unabhängig von der Geschwindigkeit der ersteren, wie aus den allgemeinen Principien der Zusammensetzung der Bewegungen sich ergiebt.

Die Gleichungen 14) . . . 17) gelten nicht nur für die Beschleunigungen gleichförmig beschleunigter Bewegungen, sondern auch für die Beschleunigungen beliebiger ungleichförmig veränderter Bewegungen in einem bestimmten Zeitpunkte. Denn das Wort Beschleunigung bezieht sich — der in § 8 gegebenen Definition gemäss — auf gleichförmig beschleunigte Bewegungen, und zwar diejenigen, mit welchen die vorliegenden Bewegungen am meisten übereinstimmen in diesem Zeitpunkte. Die resultirende Beschleunigung jener gleichförmig beschleunigten Bewegungen ist zugleich die Beschleunigung, welche die Resultirende der gegebenen ungleichförmig veränderten Bewegungen in diesem Augenblicke besitzt.

§ 14.

Zusammensetzung gleichförmiger Bewegungen mit gleichförmig beschleunigten Bewegungen.

Eine geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Anfangsgeschwindigkeit c und deren Beschleunigung p ist, kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus zwei gleichgerichteten Bewegungen, nämlich: einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit c, und einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, welche mit der Geschwindigkeit Null anfängt und die Beschleunigung p besitzt. Hiernach wird die in t Secunden erlangte Geschwindigkeit sich zusammensetzen aus den beiden Theilen:

$$c \text{ und } pt,$$

und die in t Secunden zurückgelegte Wegeslänge aus den beiden Theilen:

$$ct \text{ und } \frac{pt^2}{2}.$$

Ebenso kann eine geradlinige gleichförmig verzögerte Bewegung, deren Anfangsgeschwindigkeit c ist, und bei welcher die Geschwindigkeit in jeder Secunde um p abnimmt, aufgefasst werden als zusammengesetzt aus zwei entgegensetzt gerichteten Bewegungen, nämlich einer gleichförmigen mit der Geschwindigkeit c, und einer entgegengesetzt gerichteten gleichförmig beschleu-

nigten mit der Beschleunigung p und der Anfangsgeschwindigkeit Null. Die nach t Secunden in der Richtung der Beschleunigung erlangte Geschwindigkeit setzt sich in diesem Falle zusammen aus den beiden Theilen:

$$-c \text{ und } +pt,$$

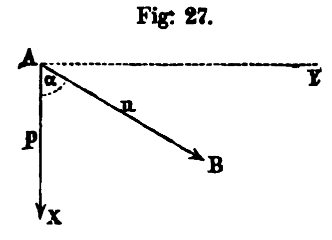
und die nach t Secunden in der Richtung der Beschleunigung zurückgelegte Wegeslänge aus den beiden Theilen:

$$-ct \text{ und } +\frac{pt^2}{2}.$$

Wenn ein materieller Punkt gleichzeitig mehrere gleichförmig beschleunigte Bewegungen ausführt, deren Anfangsgeschwindigkeiten nicht Null sind, so kann seine resultirende Bewegung aufgefasst werden als zusammengesetzt aus folgenden zwei Bewegungen: die eine ist gleichförmig, und ihre Geschwindigkeit die Resultirende jener Anfangsgeschwindigkeiten; die andere ist gleichförmig beschleunigt, ihre Anfangsgeschwindigkeit ist Null, und ihre Beschleunigung ist die Resultirende sämmtlicher Beschleunigungen.

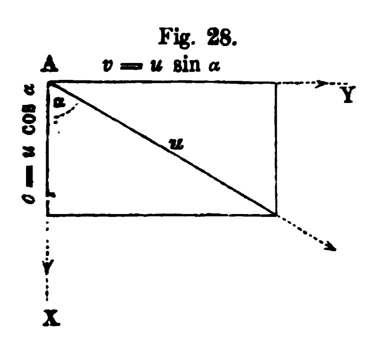
Wenn ausser diesen Bewegungen noch andere gleichförmige Bewegungen von dem materiellen Punkte gleichzeitig ausgeführt werden, so lässt sich dieser Fall auf den vorigen zurückführen, dadurch nämlich: dass man die Resultirende dieser noch hinzukommenden Geschwindigkeiten mit der Resultirenden jener Anfangsgeschwindigkeiten zu einer neuen Resultirenden vereinigt.

Fig. 27.



Die allgemeinste Form der vorliegenden Aufgabe ist also die in Fig. 27 dargestellte: eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit u in der Richtung AB soll zusammengesetzt werden mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, welche in die Richtung AX fällt, die Anfangsgeschwindigkeit Null und die Beschleunigung p hat.

Fig. 28.



Um die resultirende Bewegung zu bestimmen, zerlegt man die gleichförmige Bewegung in zwei andere gleichförmige Bewegungen, von denen die eine in die Richtung AX (Fig. 28) der Beschleunigung fällt, die andere rechtwinkelig zu der-

selben in die Richtung AY. Nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten ergeben sich für die Geschwindigkeiten c und v dieser beiden Bewegungen die Werthe:

$$18)\quad c = u \,.\, \cos\alpha,$$

$$19)\quad v = u \,.\, \sin\alpha,$$

und können dieselben, wenn u und α gegeben sind, als bekannte Grössen angesehen werden.

Die Geschwindigkeit c kann nunmehr als die Anfangsgeschwindigkeit der gleichförmig beschleunigten Bewegung betrachtet werden. In jeder Secunde kommt zu dieser Geschwindigkeit die Grösse p hinzu; nach t Secunden erreicht also die Geschwindigkeit in der Richtung AX den Werth:

$$20)\quad w_x = c + pt,$$

und die in t Secunden nach dieser Richtung hin zurückgelegte Wegeslänge beträgt (nach Gleichung 6):

$$21)\quad x = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Die Bewegung in der Richtung AY ist gleichförmig; ihre Geschwindigkeit ist also am Ende der Zeit t nach wie vor:

$$22)\quad w_y = v,$$

und die in t Secunden nach dieser Richtung hin zurückgelegte Wegeslänge beträgt:

$$23)\quad y = vt\text{*)}.$$

Die letzteren vier Gleichungen geben vollständigen Aufschluss über die Bahnform und das Gesetz der resultirenden Bewegung, sowie überhaupt über jede Frage, welche hinsichtlich der Bewegung des materiellen Punktes gestellt werden kann.

Um die Bahnlinie zu construiren, welche der materielle Punkt beschreibt, setzt man zunächst in den Gleichungen 21) und 23) für t einen beliebig gewählten Werth, berechnet aus ihnen die zugehörigen Werthe von x und y, und construirt aus diesen beiden

---

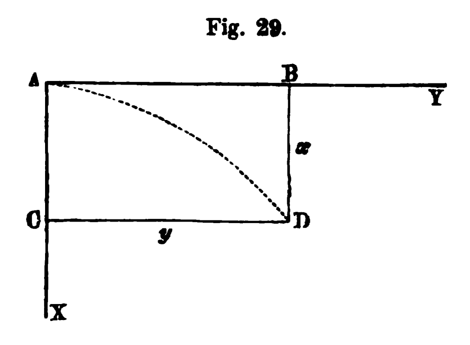
*) Nach der Bezeichnungsweise der Differenzial-Rechnung würden diese 4 Gleichungen die folgenden Formen erhalten:

$$20)\quad \frac{dx}{dt} = c + pt, \qquad 21)\quad x = \int_0^t (c + pt)\, dt = ct + \frac{pt^2}{2},$$

$$22)\quad \frac{dy}{dt} = v, \qquad 23)\quad y = \int_0^t v\, dt = vt.$$

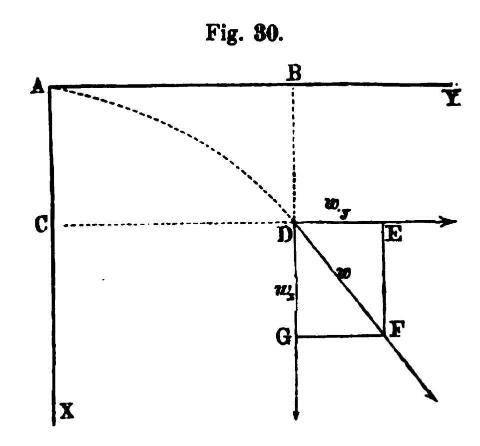
Längen das Rechteck $ABDC$ (Fig. 29). Der dem Punkte A gegenüberliegende Eckpunkt D dieses Rechtecks ist der Ort, an welchen der materielle Punkt nach der Zeit t gelangt ist. Auf gleiche Weise sind die den übrigen Zeitpunkten entsprechenden Punkte der Bahnlinie zu bestimmen.

Fig. 29.



Um die Geschwindigkeit, welche der Punkt an der Stelle D besitzt, ihrer Richtung und Grösse nach zu bestimmen, setzt man die aus den Gleichungen 20) und 22) sich ergebenden Seitengeschwindigkeiten zur Resultirenden zusammen. Die Diagonale w des aus den Längen w_x und w_y construirten Rechtecks $DEFG$ stellt ihrer Grösse und Richtung nach die gesuchte Geschwindigkeit dar (Fig. 30).

Fig. 30.



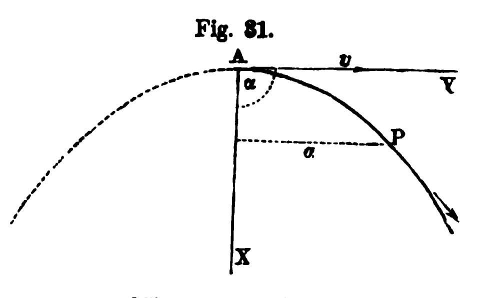
Wenn man die Grösse t aus den beiden Gleichungen 21) und 23) eliminirt, so erhält man die Gleichung:

$$24)\quad x = \frac{c}{v} \cdot y + \frac{p}{2v^2} y^2,$$

aus welcher zu jedem beliebigen Werthe von y der zugehörige Werth von x bestimmt werden kann. Diese Gleichung enthält das Krümmungsgesetz der Bahnlinie und zeigt, dass dieselbe in allen Fällen die Form einer Parabel hat, deren Achse der Richtung AX — also der Richtung der Beschleunigung parallel ist. Die Form dieser Parabel hängt nur ab von der Grösse des Verhältnisses $\frac{p}{2v^2}$. Was dagegen die Lage des Scheitelpunktes der Parabel oder die Entfernung der Parabel-Achse von dem Anfangspunkte der Bewegung betrifft, so lassen sich hier drei verschiedene Fälle unterscheiden.

Der Scheitelpunkt der Parabel fällt mit dem Anfangspunkte A zusammen (Fig. 31), wenn c gleich Null und $u = v$ ist, d. h. wenn der Winkel α, den die Richtungen von u und p einschliessen, ein rechter Winkel ist (vergl. Fig. 27 und Gleichung 18). In diesem Falle nehmen die Gleichungen der Bewegung die einfachere Form an:

Fig. 31.



25) $w_x = pt,$

26) $x = \frac{pt^2}{2},$

27) $w_y = v,$

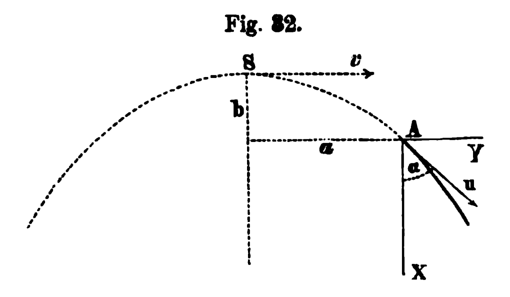
28) $y = vt,$

und man erhält als Gleichung der Bahnlinie:

29) $x = \frac{p}{2v^2} y^2.$

Wenn α ein spitzer Winkel ist, c also einen positiven Werth hat, so ist der Scheitelpunkt der Parabel vom Anfangspunkte der Bewegung aus gerechnet rückwärts gelegen (Fig. 32). Man kann in diesem Falle die Bewegung betrachten als die Fortsetzung einer Bewegung, die in S ihren Anfangspunkt hatte, für welche also die Bedingungen des vorigen Falles erfüllt sind. Wenn man aus Gleichung 25) denjenigen Werth von t bestimmt, für welchen w_x gleich c wird, diesen Werth in den Gleichungen 28) und 26) für t substituirt und die daraus für y und x sich ergebenden Werthe resp. mit a und b bezeichnet, so erhält man:

Fig. 32.



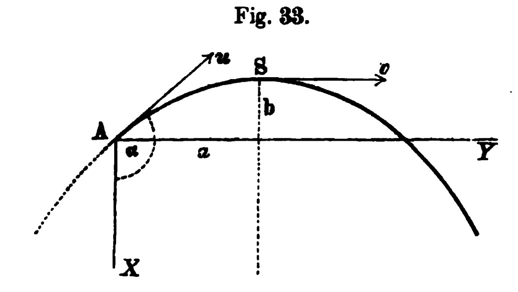
30) $a = \frac{cv}{p},$

31) $b = \frac{c^2}{2p}.$

Sieht man also den im Abstande a von der Parabel-Achse gelegenen Punkt P der in Fig. 31 dargestellten Bewegung als Anfangspunkt derselben an, so ist weiter kein Unterschied zwischen den beiden Bewegungen vorhanden.

Wenn dagegen α ein stumpfer Winkel ist, c also einen negativen Werth hat, so ist der Scheitelpunkt S der Parabel eine Stelle, welche der materielle Punkt erst im weiteren Verlaufe der Bewegung erreicht (Fig. 33). An dieser Stelle ist die Bewegung parallel der Richtung AY, folglich die Geschwindigkeit in der Richtung AX gleich Null. Wenn man also in Gleichung 20) $w_x = 0$ setzt, den hieraus für t sich ergebenden Werth in den Gleichungen 23) und 21) für t substituirt, so erhält man für die zugehörigen Werthe resp. der Grössen x, y die Gleichungen:

Fig. 33.



$$32)\quad y = -\frac{vc}{p},$$

$$33)\quad x = -\frac{c^2}{2p},$$

welche die Lage des Punktes S bestimmen. Wenn man diesen Punkt als Anfangspunkt der Bewegung ansieht, so kann Alles, was in Bezug auf den Fall Fig. 31 gilt, auch für die in Fig. 33 dargestellte Bewegung als gültig angenommen werden.

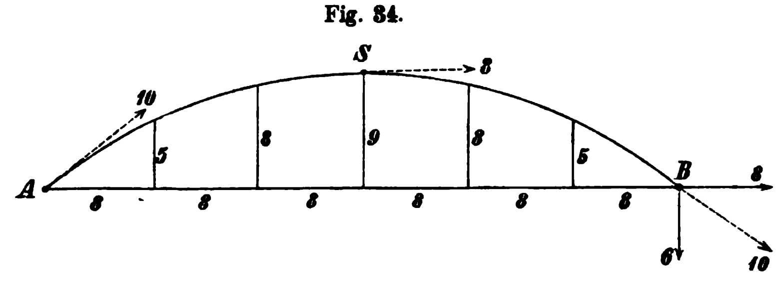
Um also das Gesetz und die Eigenschaften der parabolischen Bewegung zu studiren, genügt es vollkommen, die Untersuchung auf den ersten (in Fig. 31 dargestellten) Fall zu beschränken, da die beiden anderen Fälle nur in unwesentlichen — die Wahl des Anfangspunktes betreffenden — Umständen von ihm abweichen.

Die Bahnlinie, welche ein materieller Punkt in den ersten sechs Secunden durchläuft, wenn die vertical aufwärts gerichtete Anfangsgeschwindigkeit 6 Meter, die horizontale Anfangsgeschwindigkeit 8 Meter und die vertical abwärts gerichtete Beschleunigung 2 Meter beträgt, ist in Fig. 34 dargestellt.

Während der ersten drei Secunden nimmt die vertical aufwärts gerichtete Seitengeschwindigkeit von 6 bis auf Null ab; in den folgenden drei Secunden wächst die vertical abwärts gerichtete Seitengeschwindigkeit von Null bis auf 6, während die horizontale Seitengeschwindigkeit stets unverändert

gleich 8 bleibt. In Bezug auf die Bewegung des materiellen Punktes von S nach B würde man zu denselben Resultaten gelangen, wenn man statt des

Fig. 34.



Punktes A den Punkt S als Anfangspunkt der Bewegung betrachtete und wenn man annähme, dass der materielle Punkt daselbst seine Bewegung mit einer horizontal gerichteten Anfangsgeschwindigkeit von 8 Metern begann.

§ 15.

Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkte der Parabel.

Die im vorigen Paragraphen für die parabolische Bahnlinie gefundene Gleichung:

$$x = \frac{p}{2v^2} \cdot y^2$$

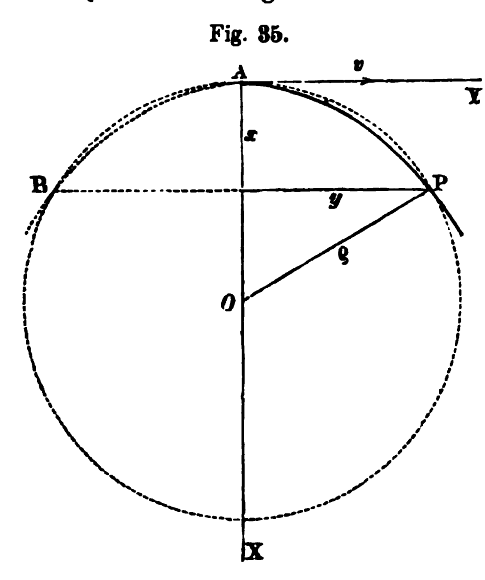
zeigt, dass einem und demselben Werthe von y ein kleinerer oder grösserer Werth von x entspricht, je nachdem das Verhältniss $\frac{p}{2v^2}$ einen kleineren oder grösseren Werth hat, dass also je nach der Grösse dieses Verhältnisses die Parabel in der Gegend ihres Scheitelpunktes eine flacher oder stärker gekrümmte Form erhalten wird. Die Art und Weise, in welcher die Form der ganzen Parabel durch die Grösse des Verhältnisses $\frac{p}{2v^2}$ bedingt wird, lässt sich noch auf andere Weise näher charakterisiren, indem man nämlich die Parabel vergleicht mit einer Kreislinie, welche durch den Scheitelpunkt A und den in der Entfernung y von der Parabel-Achse liegenden Punkt P hindurch geht, und deren Mittelpunkt O zugleich in der Parabel-Achse liegt (Fig. 35). Wenn man die Grösse y^2 das eine Mal aus der Gleichung 29), das andere Mal aus der Gleichung des Kreises bestimmt, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$34) \quad y^2 = 2\frac{v^2}{p}x,$$

$$35) \quad y^2 = 2\varrho x - x^2.$$

Die Gleichsetzung dieser beiden Werthe ergiebt für den Halbmesser ϱ die Gleichung:

Fig. 35.



$$36)\quad \varrho = \frac{v^2}{p} + \frac{x}{2}.$$

Die Grösse ϱ besteht also aus zwei Theilen: der erste von x unabhängige Theil $\frac{v^2}{p}$ hängt nur ab von der Form der Parabel (nämlich von der oben erwähnten Grösse $\frac{p}{2v^2}$); der andere Theil $\frac{x}{2}$ dagegen hängt nur von x, also von der zufälligen Wahl des Punktes P ab, und ist um so kleiner, je kleiner der Abstand dieses Punktes vom Scheitelpunkte gewählt wird. Wenn man jenen von x unabhängigen Theil $\frac{v^2}{p}$ mit r bezeichnet, so kann die Gleichung:

$$37)\quad r = \frac{v^2}{p}$$

auf folgende Weise gedeutet werden: Sie giebt den festen Grenzwerth an, welchem der Halbmesser ϱ einer durch die drei Punkte A, P, P_1 gelegten Kreislinie mehr und mehr sich annähert, je näher die letzteren beiden an den ersten rücken; oder den Halbmesser derjenigen Kreislinie, mit welcher die Parabel an ihrem Scheitelpunkte am meisten übereinstimmt und gleiche Krümmung hat.

Die Parabel ist an ihren verschiedenen Stellen verschieden stark gekrümmt, der Krümmungshalbmesser — d. h. der Halbmesser desjenigen Kreises, mit welchem die Parabel an der betreffenden Stelle gleiche Krümmung hat — wechselt in seiner Grösse, er wird am kleinsten am Scheitelpunkte, und dieser kleinste Werth, also der Krümmungshalbmesser am Scheitelpunkte, ist eben jene Grösse $\frac{v^2}{p}$. Es kann also die Form der ganzen Parabel — anstatt durch Angabe jenes Verhältnisses $\frac{p}{2v^2}$ in Gleichung 29) — auch dadurch

charakterisirt werden, dass für den Krümmungshalbmesser r am Scheitelpunkte der Werth angegeben wird.

Wenn umgekehrt die Aufgabe in folgender Form gestellt ist: Rechtwinkelig zu einer gleichförmigen Bewegung von der gegebenen Geschwindigkeit v soll eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hinzugefügt werden; gesucht wird die Beschleunigung p, welche dieselbe haben muss, wenn die Krümmung der resultirenden Bahnlinie an der Anfangsstelle gerade so gross sein soll, wie die eines Kreises vom gegebenen Halbmesser r: so ist die Lösung dieser Aufgabe enthalten in der Gleichung:

$$38)\quad p = \frac{v^2}{r}.$$

Diese Gleichung zeigt, wie die Ablenkung von der augenblicklichen Bewegungsrichtung aufgefasst werden kann als Hinzutreten einer zu der augenblicklichen Geschwindigkeit rechtwinkelig gerichteten Beschleunigung, wie also die krummlinige Bewegung gedacht werden kann als hervorgehend aus der Zusammensetzung geradliniger Bewegungen. Sie bildet — wie sich später ergeben wird — die Grundlage für die Theorie der krummlinigen Bewegung des materiellen Punktes, insbesondere für die Theorie der sogenannten Centripetalkraft und Centrifugalkraft.

VIERTES CAPITEL.

Physikalische Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

§ 16.

Entwickelung der Begriffe Kraft und Masse.

Wenn die Geschwindgkeit eines materiellen Punktes ihrer Grösse oder Richtung nach sich ändert, so sehen wir diese Aenderung als Wirkung irgend einer in demselben thätigen Ursache an; diese Ursache nennen wir Kraft.

Es ist also nicht die Ortsveränderung eines materiellen Punktes an sich, welche uns veranlasst zu der Annahme, dass eine Kraft thätig sei — vielmehr nur, wenn diese Ortsveränderung in einer ungleichförmigen oder in einer krummlinigen

Bewegung besteht, so ist es eben die Abweichung von der Gleichförmigkeit, von der Geradlinigkeit, welche wir als Wirkung einer Kraft betrachten. Denn die Erfahrung lehrt: dass es in der Natur eines jeden Körpers liegt: Richtung und Geschwindigkeit seiner einmal vorhandenen Bewegung unverändert beizubehalten, also geradlinig und gleichförmig seine Bewegung fortzusetzen, so lange dieselbe nicht durch äussere Einwirkungen gestört wird, d. h. so lange eben nicht Kräfte auf ihn einwirken. Dieses Naturgesetz wird das Gesetz der Trägheit genannt.

Das Gesetz der Trägheit ist wie alle Naturgesetze ein Erfahrungsgesetz, dessen Richtigkeit durch reine Verstandesthätigkeit allein nicht constatirt werden kann. Allen Versuchen, dasselbe als eine nothwendige Verstandeswahrheit darzustellen und zu beweisen, kann die Behauptung entgegengestellt werden: Ohne Erfahrungen würden wir von diesem Gesetze Nichts wissen; unsere Vernunft allein drängt uns keineswegs dazu: der Natur gerade diese Einrichtung zuzuschreiben; die Annahme irgend einer anderen Natur-Einrichtung, mit welcher das Gesetz der Trägheit nicht verbunden wäre, stände durchaus nicht im Widerspruche mit unserer Vernunft — wohl aber mit unserer Erfahrung. Wenn man ferner in folgender Weise argumentiren wollte: „Die Geschwindigkeit eines geradlinig und gleichförmig bewegten Körpers ist ein Zustand, dessen Fortdauer — bei fehlender äusserer Einwirkung — als selbstverständlich einer Erklärung gar nicht bedarf, dessen Vorhandensein allein schon zur Erklärung seiner Fortdauer ausreicht“; so würde dagegen einzuwenden sein, dass mittelst derselben Schlussfolgerung auch von der Beschleunigung eines gleichförmig beschleunigt bewegten Körpers behauptet werden könnte: „Diese Beschleunigung sei ein Bewegungszustand, dessen Fortdauer als selbstverständlich einer Erklärung nicht bedürfe, insofern das Vorhandensein desselben allein schon zur Erklärung seiner Fortsetzung ausreiche.“ Hiermit würde man aber in einen Widerspruch mit der Erfahrung sich verwickeln, da wir in der That die Fortdauer jener Beschleunigung der Wirkung einer Kraft zuschreiben müssen.

Die Kräfte wirken in der Natur nicht unter allen Umständen in gleicher Weise. Ihre Aenderung — überhaupt ihr Auftreten — muss uns demnach als eine der weiteren Erklärung bedürfende Aenderung des bestehenden Zustandes erscheinen und uns veranlassen, nach den Ausgangspunkten, nach den Entstehungs-Ursachen der Kräfte zu forschen. Wir suchen und finden dieselben in anderen materiellen Punkten. Kraft nennen wir also das unbekannte Zwischenglied, welches den ursachlichen Zusammenhang zwischen diesen Ursachen und den hervorgebrachten Geschwindigkeitsänderungen vermittelt, welches daher in Bezug auf die letzteren als Ursache, in Bezug auf die ersteren als Wirkung aufgefasst werden kann.

Wir können die Kräfte nur in ihren Ursachen und ihren Wirkungen beobachten; die Kräfte selbst entziehen sich unserer unmittelbaren Wahrnehmung.

Nur in einem Falle könnte es scheinen, als ob wir auch die Kraft selbst wahrnehmen — wenn man das Wort „wahrnehmen" in etwas weiterem Sinne fasst. Wenn wir durch unsere eigene Körperkraft einen Körper in Bewegung setzen, oder eine schon vorhandene Bewegung desselben abändern: so nehmen wir ausser der hervorgebrachten Wirkung auch den Grad der aufgewendeten Kraft wahr. Auch ohne unmittelbare Wahrnehmung des Erfolgs empfinden wir den Unterschied zwischen solchen Fällen, in welchen wir eine grössere, und solchen, in denen wir eine geringere Wirkung hervorbringen. Wenn zwar das, was wir dabei empfinden, auch keineswegs die ausgeübte Kraft selbst, sondern nur die mit dem Hervorbringen derselben verbundene Anstrengung ist, so bilden diese Empfindungen doch die Grundlage, auf welcher der Begriff der Kraft in uns sich entwickelt.

Wenn wir eine gleiche Wirkung, wie wir sie das eine Mal durch unsere eigene Körperkraft ziehend oder schiebend an einem Körper hervorbrachten, ein anderes Mal ohne unser Zuthun hervorgebracht sehen, so sind wir geneigt anzunehmen: dass auch in diesem letzteren Falle irgend eine ähnliche verborgene ziehende oder schiebende Ursache thätig war, deren Ursprung — statt in unserem eigenen — in irgend welchen anderen Körpern zu suchen ist.

Mit der Einführung des Begriffes der Kraft ist die letzte Ursache des Wirkenden noch nicht erklärt; vielmehr ist das eigentliche Wesen der Kraft uns gegenwärtig noch eben so unbekannt, wie das Wesen der Materie überhaupt, und muss zugestanden werden, dass das Wort „Kraft" nur eine Aushülfe, ein Name ist für Dasjenige, was einer weiteren Erklärung noch entgegensieht. In neuester Zeit haben einige Physiker das Wesen der Kraft zu erklären versucht, indem sie die Hypothese aufstellten: dass der raumerfüllende Aether, derselbe Aether, welchem die Vermittelung der Licht- und Wärme-Erscheinungen zugeschrieben wird, das Medium sei, durch welches auch die Kraftwirkungen fortgepflanzt und vermittelt werden, und dass das Vorhandensein einer Kraft von bestimmter Grösse und Richtung an einem bestimmten Orte des Raumes zu definiren sei als ein bestimmter Bewegungszustand des Aethers an dieser Stelle. Indessen selbst wenn es den Physikern gelingen sollte, in dieser Richtung einen Schritt vorwärts zu thun, den Begriff der Kraft auf andere Begriffe zurückzuführen und dadurch entbehrlich zu machen, so würde für die Mechanik darin noch keineswegs eine Veranlassung liegen, sich dieses Begriffes zu entäussern, insofern die auf den Begriff der Kraft gegründete Auffassung der Natur-Erscheinungen doch immer die einfachste Form

bieten würde, in welche die eigentliche Aufgabe der Mechanik eingekleidet werden kann, und deshalb ihre Berechtigung behalten würde.

Das Erforschen der Entstehungs-Ursachen der Kräfte, der Gesetze, nach welchen sie mit ihren Ursachen sich ändern und ihrerseits wiederum die Veränderungen in der Körperwelt hervorbringen, ist Aufgabe der Physik. Gegenstand der Mechanik ist nur die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den Kräften und den von ihnen hervorgebrachten Bewegungsänderungen. Wenn zwar die Mechanik bei ihren Untersuchungen nicht bis zu den Ursachen der Kräfte vordringt, so kann doch bei der Begründung ihrer Lehren die Kenntniss des Umstandes nicht entbehrt werden: dass wir auf zweierlei Weise die Kräfte zum Gegenstande indirecter Beobachtung und Messung machen können: einmal, indem wir sie in ihren Wirkungen, und einmal, indem wir sie in ihren Ursachen studiren; dass wir also zweierlei Mittel besitzen, das wiederholte Auftreten einer gleich grossen Kraft zu constatiren: wir erkennen dasselbe einmal an der Gleichheit der Wirkung und ein anderes Mal an der Gleichheit der äusseren Umstände, unter welchen die Kraft zur Wirkung kommt.

Wenn wir beispielsweise eines elastischen Kautschuk-Fadens uns bedienen, um mittelst desselben eine Zugkraft auszuüben und einen Körper dadurch in Bewegung zu versetzen, so können wir die Grösse der ausgeübten Kraft erkennen: einmal an der Grösse der hervorgebrachten Geschwindigkeitsänderung und ein anderes Mal an dem Verlängerungszustande, in welchem der Faden dabei sich befindet. Wenn wir ein anderes Mal denselben Faden benutzen, um einen anderen Körper in Bewegung zu versetzen, und der Faden dabei wiederum in demselben Verlängerungszustande sich befindet, so würden wir allein aus diesem Umstande schon schliessen können, dass die ausgeübte Kraft dieselbe Grösse hatte, auch wenn die hervorgebrachte Geschwindigkeitsänderung uns unbekannt geblieben wäre.

Die Kräfte sind intensive Grössen, welche nur gemessen werden können, wenn irgend eine räumliche Grösse für sie als Maass gefunden wird.

Die Wirkung einer Kraft besteht in dem Hervorbringen von Geschwindigkeitsänderung.*) Je grösser unter sonst gleichen Umständen die hervorgebrachte Geschwindigkeitsänderung ist, um so

*) Wenn unter besonderen Umständen ein ruhender Körper durch eine Kraft nicht in Bewegung versetzt wird (wie z. B. ein an einem festen Punkte aufgehängter Körper durch die Schwerkraft nicht in Bewegung versetzt wird), so findet dies — wie später gezeigt werden wird — seine Erklärung darin, dass hier die Geschwindigkeit im Entstehen schon durch eine andere Kraft (den Widerstand des Aufhängepunktes) wieder vernichtet wird.

grösser wird die wirkende Kraft anzusehen sein. Wenn ein Körper immer in gleicher Richtung sich bewegt, und seine Geschwindigkeit in gleichen Zeiten immer um gleiche Grössen zunimmt, so haben wir der Erfahrung gemäss diese Bewegung anzusehen als Wirkung einer Kraft von unveränderter Richtung und Grösse, oder einer constanten Kraft, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt. In Folgendem ist — wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird — unter „Kraft" allemal eine constante Kraft zu verstehen.

Eine constante Kraft ertheilt also einem vorher ruhenden Körper eine geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Beschleunigung um so grösser, je grösser die wirkende Kraft ist. Wenn die Beschleunigung, die einem bestimmten Körper von einer bestimmten Kraft ertheilt wird, eben so gross ist wie die Beschleunigung, welche ein anderes Mal demselben Körper von einer anderen Kraft ertheilt wird, so werden die beiden Kräfte gleich gross genannt. Wenn dagegen die Beschleunigung, welche einem Körper von einer Kraft ertheilt wird, k-mal so gross ist als diejenige, welche ein anderes Mal demselben Körper von einer anderen Kraft ertheilt wird, so wird die erstere Kraft k-mal so gross als die zweite genannt.

Die Kräfte verhalten sich also wie die Beschleunigungen, die sie einem und demselben Körper ertheilen.

Wenn es sich nur um die Bewegung dieses einen bestimmten Körpers handelte, so würden also die Beschleunigungen allein schon als Maasse für die Kräfte ausreichen. Da es sich in der Mechanik aber um die Bewegung beliebiger Körper handelt, so muss auf den Unterschied in dem Verhalten der verschiedenen Körper den Kräften gegenüber Rücksicht genommen werden.

Wenn eine und dieselbe Kraft dem einen Körper eine andere Beschleunigung ertheilt als dem anderen Körper, so erklärt man sich dies aus dem Unterschiede derjenigen Grössen, welche man die Massen der Körper nennt. Man schreibt dem Körper eine um so grössere Masse zu, je kleiner die von jener Kraft ihm ertheilte Beschleunigung ist. Gleich nennt man die Massen zweier Körper, wenn eine und dieselbe Kraft jedem von beiden die gleiche Beschleunigung ertheilt. Wenn dagegen die Kraft dem zweiten Körper nur den m-ten Theil derjenigen Beschleunigung ertheilt, welche der erste Körper durch dieselbe Kraft erhielt, so nennt

man die Masse des zweiten Körpers m-mal so gross als die des ersten.

Die Massen verhalten sich also umgekehrt wie die Beschleunigungen, welche gleiche Kräfte ihnen ertheilen.

Die Erfahrung lehrt, dass zwei Körper bei ihrer Vereinigung einen Körper bilden, dessen Masse gleich der Summe ihrer beiden Massen ist; dass auch, wenn die Körper chemisch mit einander sich verbinden — wobei ihre sonstigen Eigenschaften zum Theil zerstört werden — die Eigenschaft und Grösse der Masse unverändert sich erhält. Man kann daher den Begriff „Masse" auch definiren als Quantität der Materie, und diese Definition würde vollkommen ausreichen, wenn alle Körper von gleicher physikalischer Beschaffenheit wären, und die Quantität der in ihnen enthaltenen Materie gemessen werden könnte nach ihrem Rauminhalt. Da dies indessen nicht der Fall ist, und bei Körpern verschiedener Qualität als letztes Mittel doch immer Kräfte benutzt werden müssen, um ihr Massen-Verhältniss zu bestimmen, so kann die oben gegebene Definition nicht wohl umgangen werden.

Durch die beiden für Kraft- und Massen-Grössen gegebenen Definitionen ist die Messung der Kräfte und Massen zurückgeführt auf die Messung von Beschleunigungen, also auf die Messung von Längen-Grössen. Man würde hiernach in den Stand gesetzt, bei Zugrundelegung einer bestimmten Masse sämmtliche Kräfte durch Zahlen auszudrücken und bei Zugrundelegung einer bestimmten Kraft die Massen der verschiedenen Körper durch Zahlen auszudrücken.

Es entsteht nun die Frage: ob die auf solche Weise erhaltenen Zahlen abhängen von der zufälligen Wahl jener einen Kraft, von der Wahl jener einen Masse und ihrer physikalischen Beschaffenheit; oder ob vielmehr diese Zahlen ganz allgemeine Gültigkeit besitzen? Diese Frage kann a priori nicht beantwortet werden, sondern die Erfahrung muss darüber entscheiden.

§ 17.

Gesetz der Beschleunigung.

Wenn man diejenige Kraft als Kraft-Einheit wählt, welche irgend einem bestimmten Körper eine Beschleunigung gleich der Längen-Einheit ertheilt, und zugleich die Masse eben desselben Körpers als Massen-Einheit annimmt, so reichen die im vorigen Paragraphen gegebenen Definitionen bereits aus, um zu bestimmen:

Erstens: die Beschleunigung, welche jener Masse Eins von

irgend einer andern Kraft ertheilt wird, deren Grösse durch die Zahl k gegeben ist.

Zweitens: die Beschleunigung, welche jene Kraft Eins irgend einer andern Masse ertheilt, deren Grösse durch die Zahl m gegeben ist.

Um aber die Beschleunigung zu bestimmen, welche die Kraft k der Masse m ertheilt, dazu reichen die gegebenen Definitionen noch nicht aus. Wenn man die vorliegende Frage sich veranschaulicht durch das Schema:

die	Kraft	1	ertheilt	der	Masse	1	die Beschleunigung	1
„	„	k	„	„	„	1	„	k
„	„	1	„	„	„	m	„	$\frac{1}{m}$
„	„	k	„	„	„	m	„	?

so findet man, dass die drei Vordersätze hinsichtlich der im Schlusssatze gesuchten Beschleunigung vorläufig noch kein Resultat ergeben. Denn daraus: dass — der Definition gemäss — die Beschleunigungen, welche der Masse „Eins“ ertheilt werden durch die Kräfte „Eins“ und k sich verhalten wie $1 : k$, folgt noch keineswegs, dass auch zwischen den Beschleunigungen, welche die Masse m durch sie erhält, das gleiche Verhältniss stattfindet; und daraus: dass die von der Kraft „Eins“ den Massen „Eins und m“ ertheilten Beschleunigungen sich verhalten wie $1 : \frac{1}{m}$, folgt noch keineswegs, dass auch dann noch das gleiche Verhältniss zwischen den Beschleunigungen stattfindet, wenn k die beschleunigende Kraft ist. Denn es wäre denkbar: dass auch die physikalische oder chemische Beschaffenheit der Körper, die Qualität und Entstehungsursachen der Kräfte einen Einfluss auf die Grösse der hervorgebrachten Beschleunigung hätten.

Die Erfahrung lehrt nun aber, dass: welche Masse auch immer der Messung der Kräfte, welche Kraft auch immer der Messung der Massen zum Grunde gelegt werden möge, stets dieselben Verhältnisszahlen sich ergeben. Sie giebt also in Bezug auf die vorliegende Frage die folgende Antwort:

Auch dann, wenn statt jener Masse „Eins“ eine andere Masse m gewählt wird, so beträgt die von der Kraft k hervorgebrachte Beschleunigung immer k-mal so viel als die von der Kraft „Eins“ hervorgebrachte. Letztere betrug $\frac{1}{m}$, folglich ist die von der Kraft k der Masse m ertheilte Beschleunigung gleich $k \cdot \frac{1}{m}$; oder:

Auch dann, wenn statt der Kraft „Eins" eine andere Kraft k die beschleunigende Kraft ist, findet sich, dass die Masse m immer nur den m-ten Theil derjenigen Beschleunigung erhält, welche die Masse „Eins" von derselben Kraft erhält. Letztere betrug k, folglich erhält die Masse m von der Kraft k die Beschleunigung $\frac{1}{m} \cdot k$.

Wenn die gesuchte Beschleunigung mit p bezeichnet wird, so ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$39) \quad p = \frac{k}{m}.$$

In Worten ausgedrückt, lautet dieses Gesetz also: Man findet die Beschleunigung, welche eine gegebene Kraft einer gegebenen Masse ertheilt, indem man die Kraft-Zahl durch die Massen-Zahl dividirt; oder kürzer:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}.$$

Dieses Naturgesetz ist eines von den Grundgesetzen der Mechanik und wird das Gesetz der Beschleunigung genannt. Das Gesetz der Trägheit ist als specielles Gesetz in diesem allgemeineren enthalten; denn es ergiebt sich aus der obigen Gleichung, dass, wenn die Kraft Null ist, die Beschleunigung ebenfalls Null ist, d. h. wenn keine Kraft wirkt, so ändert sich die Geschwindigkeit des Körpers nicht.

Wenn man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{k}{m}$ in Gleichung 39) mit gleichen Zahlen multiplicirt, so bleibt der Werth desselben unverändert, also auch p. Sind k_1 und m_1 die Werthe, welche resp. Zähler und Nenner alsdann annehmen, so ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$\frac{k}{m} = \frac{k_1}{m_1}, \quad \text{oder:} \quad \frac{k}{k_1} = \frac{m}{m_1}.$$

Man kann also das obige Gesetz auch in folgender Form aussprechen:

Die Kräfte verhalten sich wie die Massen, denen sie gleiche Beschleunigungen ertheilen.

Es giebt noch andere Formen, in denen dieses Naturgesetz ausgesprochen werden kann; der eigentliche Sinn desselben bleibt aber immer derselbe, nämlich folgender: Es giebt zweierlei Maasse für die Grössen der Kräfte; man kann einmal die Beschleunigungen, welche sie gleichen Massen ertheilen, und ein anderes Mal die Massen, denen sie gleiche Beschleunigungen ertheilen, als Maasse wählen; beide Maassbestimmungen führen stets zu denselben Kraft-Zahlen.

Man hätte also statt der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition der Kraftgrössen auch die folgende wählen können: Die Kräfte sollen proportional den Massen gelten, welchen sie gleiche Beschleunigungen ertheilen, und hätte als Ergänzung dann jenes Naturgesetz in folgender Form hinzufügen können: „die so erhaltenen Kraftzahlen sind auch proportional den Beschleunigungen, welche diese Kräfte einer und derselben Masse ertheilen.“ Wenn man also einen und denselben Körper nach einander der Wirkung verschiedener Kräfte aussetzt und jedesmal die hervorgebrachte Beschleunigung misst, so findet sich, dass der Quotient

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Beschleunigung}} \;(= \text{Masse})$$

allemal denselben Werth hat, und dieser unveränderliche Werth bildet zugleich die Massenzahl des Körpers. In dieser Form würde das Gesetz genannt werden können „das Gesetz der Unveränderlichkeit der Masse“.

§ 18.

Gesetz der Schwere.

Für die Massengrössen wurde im § 16 die Definition gegeben: Die Massen der Körper verhalten sich umgekehrt wie die Beschleunigungen, welche ihnen von gleichen Kräften ertheilt werden. Hiernach bedürfte es, um die Massen der Körper zu bestimmen, allemal einer umständlichen, beschwerlichen Operation: man müsste eine Kraft von bestimmter Grösse auf den Körper wirken lassen und die Beschleunigung messen, welche der Körper durch sie erhielte.

Es giebt eine viel einfachere Methode, die Massen der Körper zu bestimmen, und diese Methode gründet sich auf ein Naturgesetz, welches das Gesetz der Schwere genannt wird.

Jeder Körper, der sich an der Erdoberfläche befindet, wird von der Erde angezogen in der Richtung vertical abwärts mit einer Kraft, welche das Gewicht des Körpers genannt wird. Die Erfahrung lehrt: dass diese Gewichte der Körper Kräfte sind, welche allen Körpern gleiche*) Beschleunigung ertheilen, nämlich:

$$40)\quad g = 9^{m},81\,..$$

*) d. h. wenn dieselben der Wirkung der Schwere überlassen frei fallen und dabei den Wirkungen anderer Kräfte, wie z. B. der Wirkung des Luftwiderstandes, gänzlich entzogen sind. Die Grösse dieser Beschleunigung ist in Wirklickeit an den verschiedenen Stellen der Erdoberfläche ein wenig verschieden; doch können die geringen Schwankungen dieser Grösse erst weiter unten ihre Erklärung finden, und soll vorläufig auf dieselben keine Rücksicht genommen werden.

Diese Grösse wird die Beschleunigung der Schwere oder Beschleunigung des freien Falles (auch Erd-Acceleration) genannt und soll im Folgenden immer mit dem Buchstaben g bezeichnet werden.

Im vorigen Paragraphen ist nun gezeigt: dass die Massen der Körper sich verhalten wie die Kräfte, die ihnen gleiche Beschleunigung ertheilen. Die Gewichte der Körper sind solche Kräfte, also ergiebt sich hieraus das Gesetz:

Die Massen der Körper verhalten sich wie ihre Gewichte.

Man kann hiernach das Massen-Verhältniss zweier Körper bestimmen, indem man durch Wägung ihr Gewichtsverhältniss bestimmt. Das Gewicht-Messen oder Wägen ist aber eine im täglichen Leben so häufig vorkommende Operation, dass dieselbe — ebenso wie das Zeit-Messen mittelst der Uhren — als Jedermann vollkommen verständlich und geläufig vorausgesetzt werden darf.

Als Massen-Einheit soll diejenige Masse gewählt werden, welche 1 Kilogramm wiegt. Für diejenige Masse, welche m Kilogramm wiegt, ist also m die Massenzahl.

Als Kraft-Einheit soll diejenige Kraft gewählt werden, welche einem Kilogramm Masse einen Meter Beschleunigung ertheilt. Wenn also die Grösse einer Kraft durch die Zahl k ausgedrückt wird, so ist damit eine Kraft gemeint, welche k-mal so gross ist als jene Kraft-Einheit — eine Kraft also z. B.: welche einem Kilogramm Masse k Meter Beschleunigung, oder welche k Kilogrammen Masse einen Meter Beschleunigung ertheilen würde.

Wenn mit p die Beschleunigung bezeichnet wird, welche die Kraft k der Masse m ertheilt, so ist nach dem Gesetze der Beschleunigung (Gleichung 39):

$$p = \frac{k}{m}, \quad \text{oder:} \quad m = \frac{k}{p}.$$

Das Gewicht der Masse m ist nach dem Gesetze der Schwere eine Kraft, welche ihr die Beschleunigung g ertheilt. Wenn also mit Q das Gewicht der Masse m bezeichnet und dieser Werth statt k substituirt wird, so ist g für p zu setzen, und man erhält folgende Gleichung:

$$41) \quad m = \frac{Q}{g}.$$

Die Massenzahl eines Körpers ist also gleich der Gewichtszahl desselben dividirt durch die Beschleunigung des freien Falles oder kürzer:

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Fallbeschleunigung}}.$$

Wie man Längen-Grössen bald in Metern, bald in Millimetern, oder auch in Fussen, Zollen, Meilen angiebt, so können auch die Kraftgrössen nach verschiedenerlei Maass gemessen werden, und die Kraftzahlen für eine und dieselbe Kraftgrösse werden verschieden ausfallen je nach der Wahl der Kraft-Einheit.

Ein von dem oben gewählten abweichendes sehr gebräuchliches Maass für Kraftgrössen ist die Gewichtseinheit, oder das Gewicht eines Körpers, der 1 Kilogramm wiegt. Nach dem Gesetze der Schwere ertheilt diese Kraft einem Kilogramm Masse eine Beschleunigung von g Metern, würde also nach dem oben gewählten Maass-Systeme die Kraftzahl g erhalten. Wenn diese Kraft als Einheit gewählt werden soll, so hat man sämmtliche Kraftzahlen des vorigen Maass-Systems durch g zu dividiren, um die Kraftzahlen für das neue System zu erhalten.

In Gleichung 41) erscheint die Massenzahl m ausgedrückt durch eine Kraftzahl Q und eine Längenzahl g. Eine Aenderung in der Wahl der Kraft-Einheit oder der Längen-Einheit bringt daher eine Aenderung der Massenzahl, folglich auch der Massen-Einheit mit sich.

Wenn g in Metern und Q in Gewichts-Einheiten ausgedrückt wird, so erhält die Massenzahl m einen g-mal kleineren Werth (weil nach diesem System Q eine g-mal kleinere Zahl wird). Die dem neuen Systeme zum Grunde liegende Massen-Einheit ist also g-mal so gross als die vorige, folglich eine Masse von g Kilogrammen.

Wenn z. B. Gewicht Q und Masse m eines Körpers, der 50 Kilogramm = 100 Pfund wiegt, durch Zahlen ausgedrückt werden sollen, so würde man nach dem anfänglichen Maass-Systeme die Zahlenwerthe erhalten:

$$Q = 50 \,.\, 9{,}81 = 490{,}5,$$

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{490{,}5}{9{,}81} = 50;$$

nach dem zweiten Systeme dagegen:

$$Q = 50,$$

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{50}{9{,}81} = 5{,}1.$$

Wenn als Längen-Einheit der Fuss gewählt werden soll, so würde man — da 1 Meter = 3,1862 (preuss.) Fuss ist — zu setzen haben: $g = 9{,}81 \,.\, 3{,}1862 = 31{,}25$ Fuss.

Wenn zugleich das Pfund als Gewichts-Einheit gewählt werden soll, so erhielte man nach dem ersten Maass-Systeme die Zahlen:

$$Q = 100 \,.\, 31{,}25 = 3125,$$

$$m = \frac{3125}{31{,}25} = 100;$$

nach dem zweiten Systeme dagegen:

$$Q = 100,$$

$$m = \frac{100}{31{,}25} = 3{,}2.$$

Wenn in zwei Minuten, oder 120 Secunden, die Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges von Null bis 12 Meter pro Secunde gleichförmig zunimmt, so hat die Beschleunigung desselben die Grösse: $p = 0{,}1$ Meter pro Secunde, und wenn die Masse des ganzen Eisenbahnzuges 200 000 Kilogramm wiegt, so ist nach dem ersten Maass-Systeme: $m = 200\,000$ zu setzen. Für die von der Locomotive ausgeübte Zugkraft, welche jene Beschleunigung hervorbrachte, ergiebt sich also nach dem ersten Maass-Systeme der Werth: $K = 200\,000 \,.\, 0{,}1 = 20\,000$. Nach dem zweiten Maass-Systeme dagegen würde: $m = \frac{200\,000}{9{,}81} = 20\,400$, und $K = 20\,400 \,.\, 0{,}1 = 2040$ zu setzen sein.

Das Gewicht einer Masse, welche 2040 Kilogramm wiegt, hat nach dem ersten Maass-Systeme die Grösse: $K = 2040 \,.\, 9{,}81 = 20\,000$. Die Zugkraft der Locomotive hatte also dieselbe Grösse wie das Gewicht einer Masse, welche 2040 Kilogramm wiegt.

Wenn in einer Kanone durch den Druck des Pulverdampfes bewirkt wird, dass die Geschwindigkeit eines Geschosses, welches 2 Kilogramm wiegt, von Null bis auf die Grösse: $v = 200^m$ gleichförmig zunimmt, während das Geschoss die Strecke: $s = 2^m$ in dem Kanonenlaufe zurücklegt, so ergiebt sich nach § 7 (Gleichung 4) für die Beschleunigung der Werth: $p = \frac{v^2}{2s} = \frac{200^2}{2 \,.\, 2} = 10\,000^m$. Nach dem ersten Maass-Systeme hat daher der Druck des Pulverdampfes die Grösse: $K = 2 \,.\, 10\,000 = 20\,000$, also dieselbe Grösse wie die oben berechnete Zugkraft der Locomotive, oder wie das Gewicht einer Masse, welche 2040 Kilogramm wiegt.

Die Gleichung 41) kann unter allen Umständen benutzt werden, um die Massenzahl eines Körpers durch die Gewichtszahl auszudrücken: letztere aber ist festgestellt, sobald die Wahl der Kraft-Einheit entschieden ist. Bei den später folgenden Rechnungen soll durch das der Kraft-Zahl angehängte Zeichen „*kil*" allemal angedeutet werden, dass das Gewicht eines Körpers, der 1 Kilogramm wiegt, als Kraft-Einheit angenommen wurde. Im anderen Falle ist immer diejenige Kraft, welche einem Kilogramm Masse eine Beschleunigung von einem Meter ertheilt, als Kraft-Einheit anzusehen.

Obwohl streng genommen das Lehrgebäude der theoretischen Mechanik bestehen kann, ohne auf das Gesetz der Schwere als Grundgesetz sich zu stützen — insofern es, wie oben gezeigt, andere Mittel giebt, die Massen der Körper zu bestimmen — so ist doch für alle Fälle, in denen die Resultate der Mechanik angewendet werden, das Gesetz der Schwere praktisch kaum zu entbehren und aus diesem Grunde hier unter den Grundgesetzen der Mechanik mit aufgeführt.

§ 19.

Parallelogramm-Gesetz.

Die Wirkungen aller Kräfte — welchen Ursprung sie auch immer haben mögen — die Bewegungen aller materiellen Punkte — welcher Qualität sie auch immer sein mögen — sind folgendem allgemeinen Gesetze unterworfen:

Die Beschleunigung, welche eine Kraft einem materiellen Punkte ertheilt, ist unabhängig von Grösse und Richtung der Geschwindigkeit, welche derselbe schon besitzt, und unabhängig von den Beschleunigungen, welche demselben gleichzeitig von anderen Kräften ertheilt werden, oder in anderen Worten ausgedrückt:

Wenn gleichzeitig die Ursachen für mehrere Bewegungen eines materiellen Punktes vorhanden sind, so führt derselbe die Resultirende aller dieser Bewegungen aus.

Als Ursachen gleichförmiger Bewegungen sind hier die etwa schon vorhandenen Geschwindigkeiten der materiellen Punkte zu verstehen, insofern nach dem Gesetze der Trägheit diese Geschwindigkeiten ihrer Grösse und Richtung nach sich unverändert erhalten würden, wenn keine Kräfte wirkten. Als Ursachen beschleunigter Bewegungen sind nach § 16 die Kräfte anzusehen.

Mit Zuziehung dieses Erfahrungsgesetzes gewinnt erst die ganze in Cap. III. enthaltene Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen ihre eigentliche Bedeutung für die Mechanik. Wenn man bei gleichzeitigem Vorhandensein mehrerer solcher Bewegungs-Ursachen die einzelnen Bewegungen, welche jede derselben für sich allein hervorgebracht haben würde, nach den in Cap. III. gefundenen Regeln zu einer Resultirenden zusammensetzt, so ist diese Resultirende eben diejenige Bewegung, welche der materielle Punkt wirklich ausführt. Man kann also den Vorgang so auffassen, als ob die einzelnen Bewegungen, ohne einander gegenseitig zu stören, unabhängig von einander, wirklich

ausgeführt werden. Das Gesetz könnte daher auch das Gesetz der Unabhängigkeit der Bewegungen genannt werden.

Wie die Zusammensetzung von zwei Bewegungen zu der in § 9 erklärten Parallelogramm-Construction, zu dem sogenannten Parallelogramm der Bewegungen führte, aus welchem dann die weiteren Regeln für die Zusammensetzung von mehr als zwei (gleichartigen oder ungleichartigen) Bewegungen abgeleitet werden konnten: so erscheint auch das vorliegende Naturgesetz in seiner allgemeinen Grundform durch jene Parallelogramm-Construction charakterisirt und kann — in einem etwas anderen Sinne zwar — mit dem Namen Parallelogramm der Bewegungen oder kürzer Parallelogramm-Gesetz bezeichnet werden. Nur ist zu beachten, dass der in § 9 erklärte Satz eine geometrische Wahrheit, das hier genannte Parallelogramm-Gesetz dagegen eine physikalische Wahrheit constatirt.

Wie mehrere gleichzeitig stattfindende Beschleunigungen eines materiellen Punktes nach § 13 immer durch eine einzige — die resultirende — Beschleunigung sich ersetzen lassen: so können auch mehrere auf einen materiellen Punkt gleichzeitig wirkende Kräfte immer durch eine einzige Kraft ersetzt werden, welche genau dieselbe Wirkung hervorbringt. Diese Kraft wird die Mittelkraft oder Resultirende jener einzelnen Kräfte genannt.

Wenn P und Q zwei Kräfte sind, die gleichzeitig auf einen materiellen Punkt wirken, und m die Masse desselben ist, so sind die Beschleunigungen, welche diese Kräfte einzeln wirkend dem materiellen Punkte ertheilen würden, nach dem Gesetze der Beschleunigung resp.:

$$p = \frac{P}{m} \quad \text{und} \quad q = \frac{Q}{m}.$$

Nach dem Parallelogramm-Gesetze ist die wirklich stattfindende Beschleunigung r die Resultirende von p und q; sie wird also ihrer Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des aus den beiden Grössen p und q construirten Parallelogramms (Fig. 25) dargestellt.

Wenn mit R die Mittelkraft von P und Q bezeichnet wird, oder diejenige Kraft, welche für sich allein dem materiellen Punkte ebenfalls diese Beschleunigung r ertheilen würde, so ist nach dem Gesetze der Beschleunigung:

$$r = \frac{R}{m}.$$

Um also die gesuchte Mittelkraft darzustellen, braucht man nur das Parallelogramm Fig. 25 nach einem m-fach vergrösserten Maassstabe zu construiren; man erhält dann ein Parallelogramm $ABDC$ (Fig. 36), dessen Seiten resp.:

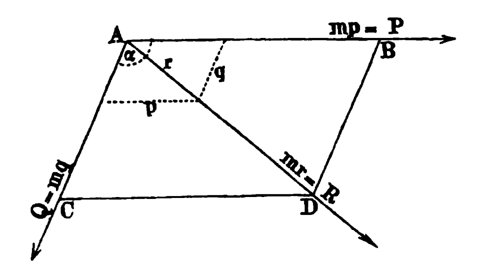
$$m \,.\, p = P \quad \text{und} \quad m \,.\, q = Q$$

so viele Längen-Einheiten als die gegebenen Seitenkräfte Kraft-Einheiten enthalten, und dessen Diagonale

$$\overline{AD} = m \,.\, r = R$$

so viele Längen-Einheiten als die Mittelkraft Kraft-Einheiten enthält, auch ihrer Richtung nach mit dieser übereinstimmt.

Fig. 36.



Die Diagonale des aus den beiden Seitenkräften construirten Parallelogramms stellt ihrer Grösse und Richtung nach die Mittelkraft derselben dar.

Dieses Gesetz, welches in dem allgemeinen Parallelogramm-Gesetze als ein specieller Fall enthalten ist, wird das Parallelogramm der Kräfte genannt.

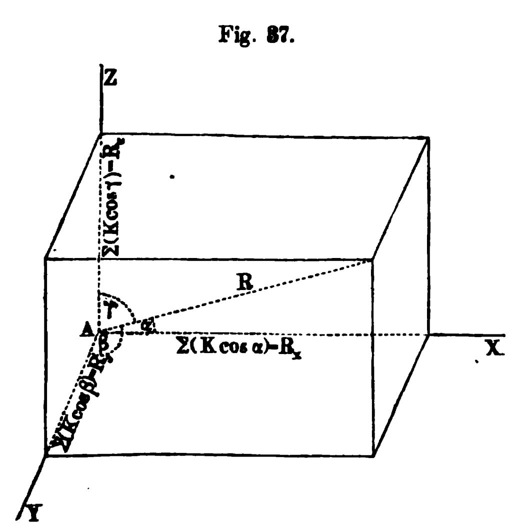
Die Mittelkraft wird gleich der Summe der beiden Seitenkräfte, wenn der von ihnen eingeschlossene Winkel $\alpha = 0$ ist, d. h. wenn die beiden Kräfte gleiche Richtungen haben. Die Mittelkraft wird gleich der Differenz der beiden Seitenkräfte, wenn der von ihnen eingeschlossene Winkel $\alpha = 180^0$ ist, d. h. wenn sie entgegengesetzte Richtungen haben. Aus dem letzteren Satze folgt wiederum: dass die Mittelkraft Null wird, wenn beide Kräfte gleiche Grössen und entgegengesetzte Richtungen haben. In diesem letzteren Falle halten die beiden Kräfte einander im Gleichgewicht, d. h. ihre Wirkungen heben einander gegenseitig auf, und es ist so gut, als ob gar keine Kraft auf den materiellen Punkt wirkte.

Wie zwei gegebene Kräfte durch ihre Mittelkraft ersetzt werden können, so kann auch umgekehrt eine gegebene Kraft immer durch zwei andere Kräfte ersetzt, d. h. sie kann in ihre Seitenkräfte zerlegt werden. Diese Zerlegung kann auf unend-

lich viele verschiedene Arten geschehen, sie muss nur der einen Bedingung genügen, dass die Zusammensetzung derselben wiederum zu jener gegebenen Kraft als Mittelkraft führe.

Für die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften gelten also genau dieselben Regeln, wie für die Zusammensetzung und Zerlegung von Beschleunigungen. Alles, was im § 13 im Anschluss an die Erklärung von Fig. 25 über die Zusammensetzung und Zerlegung von Beschleunigungen gesagt wurde, kann Wort für Wort als gültig angesehen werden auch für die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, wenn man überall das Wort **Kraft** an die Stelle des Wortes **Beschleunigung** setzt.

Fig. 37.



Die aus Fig. 26 für die Resultirende der Beschleunigungen $p_1, p_2 \ldots p_n$ abgeleiteten Gleichungen behalten ihre Gültigkeit, wenn statt der Beschleunigungen p überall die Werthe $m \cdot p$, d. h. die jenen Beschleunigungen entsprechenden Kräfte, substituirt werden. Wenn also diese Kräfte mit K_1, K_2 ... K_n bezeichnet werden, so ergeben sich mit Bezug auf Fig. 37 die den Gleichungen 14) ... 17) analog gebildeten Gleichungen:

$$42)\quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$43)\quad \cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \qquad 44)\quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \qquad 45)\quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R},$$

durch welche die Mittelkraft R der gegebenen Kräfte ihrer Grösse und Richtung nach vollkommen bestimmt ist.

Diese Gleichungen zeigen in Verbindung mit Fig. 37: wie man die Mittelkraft von beliebigen gegebenen Kräften immer darstellen

kann als Mittelkraft von drei rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitenkräften:

$$\Sigma (K \cos \alpha), \qquad \Sigma (K \cos \beta), \qquad \Sigma (K \cos \gamma),$$

welche man bestimmt, indem man für jede von drei rechtwinkelig zu einander gerichteten — übrigens willkürlich zu wählenden — Achsen-Richtungen die Summe bildet von den Seitenkräften, welche bei Zerlegung der einzelnen gegebenen Kräfte in diese Achsenrichtung hineinfallen.

Das Parallelogramm-Gesetz (so wie das in demselben enthaltene Parallelogramm der Kräfte) ist ein Naturgesetz, dessen Richtigkeit nicht aus den Gesetzen der Vernunft erschlossen, sondern nur auf dem Wege der Erfahrung constatirt werden kann; eine Hypothese, zu deren Rechtfertigung sich nur anführen lässt, dass alle aus derselben abgeleiteten Folgerungen durch die Erfahrung bestätigt werden. Allen Versuchen, dasselbe als eine nothwendige Verstandes-Wahrheit zu beweisen, ist das Argument entgegen zu stellen: in unserer Vernunft liegt Nichts, was uns zwingen könnte, gerade diese Einrichtung in der Natur vorauszusetzen; es würde durchaus kein Widerspruch mit unserer Vernunft liegen in der Annahme: dass etwa auch die physikalische oder chemische Qualität der materiellen Punkte und die Entstehungsweise der wirkenden Kräfte einen Einfluss hätten auf Grösse und Richtung der Mittelkraft; dass z. B. Kräfte electrischen Ursprungs anders als Schwerkräfte, anziehende Kräfte in anderer Weise als abstossende Kräfte ihren Einfluss auf Grösse und Richtung der Mittelkraft geltend machten. Zwar ist dies nicht der Fall; aber dass es nicht so ist: lehrt einzig und allein die Erfahrung.

§ 20.

Gesetz der Wechselwirkung.

Die Kräfte wirken in der Natur nicht regellos durch einander, sondern ihr Auftreten wird durch gewisse Gesetze beherrscht, deren Kenntniss es möglich macht, aus dem Auftreten einiger Kräfte Schlüsse zu ziehen auf das gleichzeitige Vorhandensein anderer Kräfte, deren Auftreten durch jene bedingt wird. Wenn zwar im Allgemeinen die Erforschung und Berücksichtigung dieser Gesetze weniger der Mechanik als vielmehr dem Gebiete der Physik angehören, so ist doch eines unter diesen Gesetzen von so grosser Allgemeinheit, von so weit verbreiteter Herrschaft, dass die Kenntniss desselben für die Lehren der Mechanik schlechterdings nicht entbehrt werden kann, dass vielmehr dieses Gesetz mit zu den Grundpfeilern gerechnet werden muss, welche das Lehrgebäude dieser Wissenschaft stützen.

Es zeigt sich nämlich in dem Auftreten der Kräfte die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit: dass die Kräfte nie einzeln,

sondern immer nur paarweise in der Natur auftreten, und dass die zwei zu einem solchen Paare gehörigen Kräfte in einer und derselben geraden Linie wirkend stets gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung haben. Es giebt in der Natur keine einseitige Wirkungen, sondern nur Wechsel-Wirkungen. Wenn auf einen materiellen Punkt A eine Kraft wirkt, so bildet irgend ein anderer materieller Punkt B, in der Kraft-Richtung liegend, den Ausgangspunkt dieser Kraft, und es erleidet dabei der Punkt B eine genau eben so grosse Gegenwirkung, d. h. es wirkt auf ihn eine genau eben so grosse entgegengesetzt gerichtete Kraft, für welche der Punkt A seinerseits den Ausgangspunkt bildet.

Dieses Naturgesetz wird das Gesetz der Wechselwirkung genannt.

In manchen Fällen entzieht sich dieses Gesetz der unmittelbaren Beobachtung, weil die grosse Mannigfaltigkeit der in jedem Punkte des Raumes einander stets durchkreuzenden Kraft-Wirkungen das Aufdecken der elementaren Ursachen erschwert. Es springt nicht unmittelbar in die Augen: dass die Anziehungskräfte zwischen den Theilen zweier Körper, z. B. zwischen Erde und Mond, oder zwischen dem Erdkörper und dem fallenden Steine, stets an beiden Körpern genau dieselbe Grösse haben; eben so, dass die anziehenden und abstossenden Kräfte zwischen den Theilen zweier Magnete, oder zwischen den Theilen eines und desselben festen Körpers stets paarweise gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung haben.

In anderen Fällen dagegen tritt das Gesetz so deutlich zu Tage: dass schon der Sprachgebrauch des täglichen Lebens die entsprechende Auffassung sich angeeignet hat. Man spricht z. B. von dem Drucke zwischen zwei einander berührenden Körpern A und B, während es in der That zwei Kräfte sind, die da wirken; aber Niemand bezweifelt, dass der Druck, den A von Seiten des Körpers B erleidet, gerade so gross ist als der Druck, welcher auf den Körper B von Seiten des Körper A ausgeübt wird. Eben so, wenn mittelst einer Zugstange oder eines Fadens auf einen Körper eine Zugkraft ausgeübt wird, so scheint es fast selbstverständlich, dass dabei zugleich von Seiten dieses Körpers auf den Faden eine Kraft übertragen wird, welche denselben spannt, und dass diese Kraft genau dieselbe Grösse und entgegengesetzte Richtung mit der ersteren haben müsse. Doch darf die grosse Zahl der Erfahrungen, auf welche unsere Kenntniss dieses Gesetzes sich

stützt, uns nicht verleiten, den Ursprung dieser Kenntniss zu verleugnen und dieselbe als ein Product der reinen Verstandesthätigkeit anzusehen. Nur der Erfahrung verdanken wir den Satz: dass Druck und Gegendruck, Zug und Gegenzug, Wirkung und Gegenwirkung stets einerlei Grösse und entgegengesetzte Richtung haben.

Die Zuziehung der in diesem Capitel erklärten Erfahrungsgesetze ist nothwendig, um die Lehren der Mechanik zu begründen und die Aufgabe dieser Wissenschaft in eine rein mathematische Aufgabe zu verwandeln. Zwar könnte es scheinen, als ob die Zuziehung solcher Erfahrungsgesetze ganz zu umgehen wäre, insofern nämlich die genannten Gesetze auch eingekleidet und versteckt werden können in Definitionen. So könnte man z. B. das Gesetz der Trägheit, das Gesetz der Wechselwirkung aufnehmen in die Definitionen der Begriffe „Materie“ und „Kraft“, indem man definirte: „Materie soll dasjenige genannt werden, was unter anderen Eigenschaften auch die Eigenschaft der Trägheit besitzt; Kraft soll dasjenige genannt werden, was zwei materielle Punkte einander zu nähern oder von einander zu entfernen strebt.“ Dann würden allerdings das Gesetz der Trägheit und das Gesetz der Wechselwirkung insoweit entbehrlich sein, als die daraus abzuleitenden Lehrsätze als logische Consequenzen aus jenen Definitionen schon sich ergeben würden.

Allein dieses hiesse nur: den Schritt, der doch einmal geschehen muss, an einer anderen Stelle thun. Denn: dass die wirklich existirenden Körper und Kräfte Dinge sind, die jenen Definitionen entsprechen, ist und bleibt Thatsache der Erfahrung. Jede Schlussfolgerung also aus den Lehren der Mechanik auf die wirklichen Vorgänge in der Aussenwelt würde doch immer auf Erfahrungsgesetze sich stützen.

Es erscheint daher naturgemässer: da wo die Erfahrung einmal nicht entbehrt werden kann, dies von vornherein offen zuzugeben, und: anstatt die Aussprüche der Wissenschaft mit einem trügerischen Scheine von Gewissheit zu umkleiden, vielmehr die Grenzlinien scharf zu zeichnen zwischen dem Theile derselben, welcher in unwidersprechlichen logischen Schlussfolgerungen aus gewissen Voraussetzungen besteht, und dem Theile, welcher die der Erfahrung entnommenen Vordersätze enthält. Gerade darin liegt die Stärke und Unangreifbarkeit der exacten Wissenschaft: dass sie eben nur in gewissenhafter Angabe ihrer eigenen Unzuverlässigkeit als vollkommen zuverlässig zu gelten beansprucht und darauf verzichtet, Dasjenige als Gewissheit zu vertheidigen, was nur auf Hypothesen gegründete Wahrscheinlichkeit ist. Denn bekämpft werden kann nur Dasjenige, was vertheidigt wird.

ZWEITER ABSCHNITT.

Mechanik des materiellen Punktes.

FÜNFTES CAPITEL.

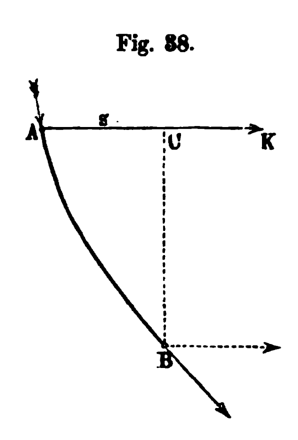
Allgemeine Lehrsätze.

§ 21.

Gesetz der mechanischen Arbeit.

Ein materieller Punkt, der sich unter der Einwirkung beliebiger Kräfte befindet, wird — wenn nicht zufällig diese Kräfte einander im Gleichgewicht halten — irgend eine geradlinige oder krummlinige Bewegung ausführen. Grössen und Richtungen der wirkenden Kräfte sollen vor der Hand als unveränderlich vorausgesetzt werden. Wenn die krumme Linie AB die Bahn ist, welche der materielle Punkt beschreibt (Fig. 38), und K eine von den Kräften ist, unter deren Einwirkung diese Bewegung geschieht, so kann, wenn auch hier die veränderliche Bewegungsrichtung nirgends mit der Richtung dieser Kraft übereinstimmt, doch die Rede sein von demjenigen Wege, welchen der Punkt hierbei in der Richtung der Kraft zurückgelegt hat. Indem man nämlich die Bewegung von dem Gesichtspunkte auffasst, welcher aus den Principien der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen sich ergiebt, und die Bewegung sich zerlegt denkt in ihre rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitenbewegungen, deren eine in die Richtung der Kraft K hineinfällt, sieht man

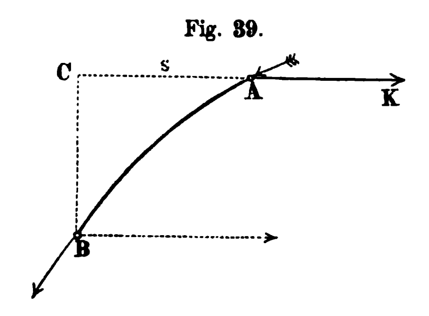
Fig. 38.



diese letztere Seitenbewegung als die in der Richtung der Kraft K ausgeführte Bewegung an.

Die Strecke $AC = s$ also, welche durch das von dem Endpunkte B auf die Kraftrichtung gefällte Perpendikel BC auf der Richtungslinie der Kraft abgeschnitten wird, nennt man die in der Richtung der Kraft zurückgelegte Wegeslänge. Diese Länge ist als eine positive Grösse anzusehen, wenn die Richtung von A nach C mit der Richtung der Kraft übereinstimmt wie in Fig. 38; als eine negative Grösse dagegen, wenn — wie in Fig. 39 — die Richtung von A nach C der Kraftrichtung entgegengesetzt ist.

Fig. 39.



Das Product aus der Kraft in die von dem materiellen Punkte in der Richtung der Kraft zurückgelegte Wegeslänge nennt man die von der Kraft verrichtete mechanische Arbeit.

Bei der in Fig. 38 dargestellten Bewegung verrichtete also die Kraft K die mechanische Arbeit:

$$+ K \,.\, s;$$

bei der in Fig. 39 dargestellten Bewegung dagegen beträgt die mechanische Arbeit:

$$- K \,.\, s.$$

Wenn mit m die Masse eines Körpers bezeichnet wird, so ist nach § 18 sein Gewicht $= mg$, und die Richtung, in welcher diese Kraft wirkt, ist vertical (abwärts). Man erhält also die mechanische Arbeit, welche das Gewicht des Körpers verrichtet, während derselbe eine beliebige Bewegung von A nach B ausführt, indem man mg multiplicirt mit dem Wege, den der Körper dabei in der Richtung vertical abwärts zurückgelegt hat. Wenn also h die Höhen-Differenz der beiden Punkte ist, so beträgt die mechanische Arbeit $+ mgh$, falls A der höher liegende Punkt, $- mgh$ dagegen, wenn A der tiefer liegende von den beiden Punkten war.

Wenn die Bewegung eines materiellen Punktes geradlinig ist, und die Bewegungsrichtung mit einer von den Kräften einen rechten Winkel einschliesst, so ist die von dieser Kraft verrichtete mechanische Arbeit immer Null. Bei horizontaler Bewegung eines Körpers verrichtet z. B. das Gewicht desselben keine mechanische Arbeit.

Wenn K_1, $K_2 \ldots K_n$ die Kräfte sind, unter deren Einwirkung ein in Bewegung begriffener materieller Punkt seine fernere Be-

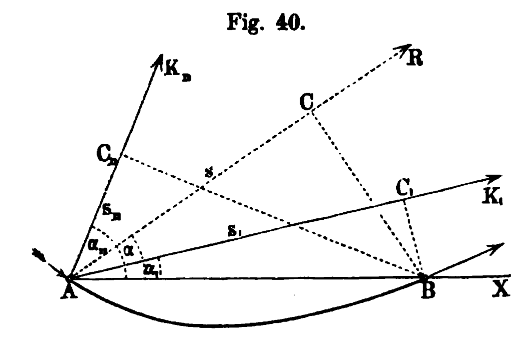
wegung ausführt, so können nach § 19 — ohne dass dadurch in der Bewegung Etwas sich änderte — alle diese Krafte durch eine einzige Kraft R, ihre Mittelkraft, ersetzt werden. Für diejenige Seitenkraft von R, welche bei rechtwinkeliger Zerlegung derselben in die willkürlich zu wählende Achsen-Richtung AX hineinfällt, ergiebt sich aus Gleichung 43) der Werth:

$$R \cos \alpha = \Sigma (K \cos \alpha) = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \cdots + K_n \cos \alpha_n.$$

Die drei Achsen-Richtungen können auch so gelegt werden, dass eine von ihnen, z. B. AX, mit der Richtung AB zusammenfällt; dann ergeben sich für die Cosinus der Winkel $\alpha \ldots$ aus Fig. 40 die Werthe:

$$\cos \alpha = \frac{s}{AB}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{s_1}{AB}, \quad \cdots \cos \alpha_n = \frac{s_n}{AB}.$$

Fig. 40.



Die Zähler dieser Brüche sind die Längen-Abschnitte, welche auf den einzelnen Kraftrichtungen abgeschnitten werden durch die von dem Endpunkte B auf die Kraftrichtungen gefällten Perpendikel, also die in den Richtungen der Kräfte zurückgelegten Wegeslängen. Diese Grössen sind nach der oben gegebenen Erklärung als positive oder negative Grössen zu betrachten, je nachdem die Winkel $\alpha \ldots$ kleiner oder grösser als 90° sind.

Die Substitution jener Cosinus-Werthe führt zu der Gleichung:

$$R \cdot \frac{s}{AB} = K_1 \frac{s_1}{AB} + K_2 \frac{s_2}{AB} + \cdots + K_n \frac{s_n}{AB},$$

welche mit dem gemeinschaftlichen Divisor aller Glieder multiplicirt die Form annimmt:

$$Rs = K_1 s_1 + K_2 s_2 + \cdots + K_n s_n,$$

oder wenn abkürzungsweise der Ausdruck auf der rechten Seite mit $\Sigma (Ks)$ bezeichnet wird:

$$46) \quad Rs = \Sigma (Ks).$$

Diese Gleichung enthält das Gesetz der mechanischen Arbeiten, welches in Worten ausgedrückt folgendermaassen lautet:

Die mechanische Arbeit, welche bei der Bewegung eines materiellen Punktes von der Mittelkraft der auf ihn einwirkenden Kräfte verrichtet wird, ist gleich der Summe aller derjenigen mechanischen Arbeiten, welche von den einzelnen Kräften dabei verrichtet werden.

Eine constante Kraft ist eine solche Kraft, welche während ihrer Wirkungsdauer stets dieselbe Grösse und Richtung behält. Unter einer veränderlichen Kraft versteht man eine solche Kraft, die während keines Theiles ihrer Wirkungsdauer constant ist; eine Kraft also, bei welcher entweder Grösse, oder Richtung, oder Grösse und Richtung zugleich in stetiger Aenderung begriffen sind.

Um den Begriff der mechanischen Arbeit auf eine veränderliche Kraft zu übertragen, muss man sich zunächst statt der veränderlichen Kraft eine andere Kraft denken, welche von einem Zeittheile zum andern sprungweise sich ändert, innerhalb eines jeden Zeittheils aber constant ist — mit welcher also jene veränderliche Kraft nur in einzelnen Zeitpunkten übereinstimmen kann. Für solche Kräfte würde innerhalb eines jeden Zeittheils die oben gegebene Erklärung des Begriffes „mechanische Arbeit" noch zutreffend bleiben, mithin auch das Gesetz der mechanischen Arbeit seine Gültigkeit behalten.

Wenn aber für jeden einzelnen dieser Zeittheile die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte ist, so muss auch die Summe aller der Arbeiten, welche in den einzelnen Zeittheilen von den jedesmaligen Mittelkräften verrichtet werden, gleich sein der Total-Summe aller derjenigen Arbeiten, welche von den substituirten Kräften während der ganzen Dauer ihrer Wirkung verrichtet werden.

Alsdann muss man sich klar zu machen suchen: dass diese Auffassung um so mehr der Wirklichkeit entsprechen, dass die Wirkung der substituirten Kräfte um so mehr mit der Wirkung jener veränderlichen Kräfte übereinstimmen wird, je kleiner die Zeittheilchen angenommen werden, je mehr also man dem Begriffe der stetigen Aenderung sich annähert. Sie würde der Wirklichkeit vollkommen genau entsprechen, wenn jene Zeittheilung

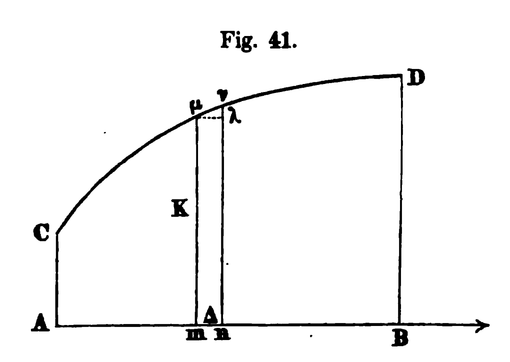
bis ins Unendliche fortgesetzt würde, und da eine solche Theilung in Gedanken wenigstens ausführbar erscheint, so ist es zulässig: auch für veränderliche Kräfte das Gesetz der mechanischen Arbeiten als gültig zu betrachten.

Wenn also mit $\mathfrak{A}$ die Arbeitssumme bezeichnet wird, welche die veränderliche Mittelkraft während der ganzen Dauer der Bewegung verrichtet, mit $\mathfrak{a}_1$ die von der veränderlichen Kraft K_1 verrichtete Arbeitssumme, ebenso mit $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{a}_n$ resp. die von den veränderlichen Kräften K_2, $K_3 \ldots K_n$ verrichteten Arbeitssummen, so gilt ganz allgemein die Gleichung:

$$47)\quad \mathfrak{A} = \Sigma(\mathfrak{a}).$$

In dem speciellen Falle: wenn die Bewegung des materiellen Punktes eine geradlinige ist, und eine der wirkenden Kräfte — nur der Grösse nach veränderlich — beständig mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt, ist es leicht, eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen von der mechanischen Arbeit, welche diese Kraft verrichtet: indem man nämlich diese Arbeit mittelst einer Figur geometrisch darstellen kann. Man kann hier dieselbe Methode benutzen, welche im § 6 bei der geometrischen Darstellung veränderlicher Geschwindigkeiten angewendet wurde. Dass in demjenigen Zeitpunkte, in welchem der materielle Punkt die Stelle m seiner Bahn passirte, die veränderliche Kraft die Grösse K hatte, kann angedeutet werden dadurch, dass man einem an dieser Stelle errichteten Perpendikel $m\mu$ so viele Längen-Einheit giebt als die Zahl K Einheiten enthält (Fig. 41). Verfährt man auf gleiche Weise in Bezug auf die übrigen Punkte der Bahnlinie, so bilden die Endpunkte der auf solche Weise erhaltenen Perpendikel eine Curve, welche das Gesetz veranschaulicht, nach welchem im Laufe der Bewegung die Kraft sich ändert. Die Flächenzahl der von dieser Curve begrenzten Fläche $ABDC$ stellt zugleich die Grösse der von der veränderlichen Kraft verrichteten Arbeitssumme dar.

Fig. 41.



Denn das Product $K\Delta$ — dargestellt in der Figur durch die

Fläche des Rechtecks $m\mu\lambda n$ — würde die während Zurücklegung der Strecke Δ verrichtete mechanische Arbeit bilden, wenn die Kraft während dieser Zeit sich nicht änderte; und dieses Product stimmt um so mehr mit der wirklich verrichteten Arbeit und mit der Flächenzahl des Vierecks $m\mu\nu n$ überein, je kleiner das Stück Δ angenommen wird. Dieselbe Beweismethode, mittelst welcher im § 6 nachgewiesen wurde, dass die von der Geschwindigkeitscurve begrenzte Fläche die zurückgelegte Wegeslänge repräsentirt, lässt sich auch hier anwenden, um nachzuweisen, dass die Fläche $ABDC$ den Grenzwerth repräsentirt, welchem die Summe der Producte $K\Delta$ oder die Summe der auf gleiche Weise über allen Abschnitten der Bahn construirten Rechtecke um so mehr sich nähert, je weiter man die Theilung sich fortgesetzt denkt; dass sie also die wirklich verrichtete Arbeitssumme repräsentirt.

Dieses Resultat lässt sich ausdrücken durch die Gleichung:

$$\mathfrak{A} = \Sigma(K\Delta),$$

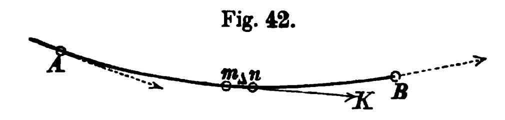
worin $\mathfrak{A}$ die gesuchte Arbeitssumme, also die Flächenzahl der Fläche $ABDC$ bedeutet, und der Ausdruck rechts eine Abkürzung ist für den Grenzwerth, welchem die Summe der Producte $K\Delta$ bei fortgesetzter Theilung sich annähert.*)

Wenn z. B. die veränderliche Kraft K längs der Strecke $AB = s$ gleichförmig wächst von der Grösse $AC = P$ bis zur Grösse $BD = Q$, so wird die Linie CD als graphische Darstellung dieses Wachsens eine gerade Linie bilden, und die verrichtete mechanische Arbeit hat die Grösse:

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{P+Q}{2}\right) \cdot s.$$

Genau auf dieselbe Weise kann die verrichtete Arbeitssumme geometrisch dargestellt werden in einem anderen speciellen Falle: wenn nämlich die Bewegung zwar krummlinig ist, die veränderliche Kraft aber auf solche Art ihre Richtung stetig ändert, dass sie für jede Stelle der Bahnlinie genau mit der Richtung von deren Tangente zusammenfällt (Fig. 42).

Fig. 42.



*) Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung würde man, wenn die Strecke AB mit s bezeichnet wird:

$$\mathfrak{A} = \int_0^s K\,ds$$

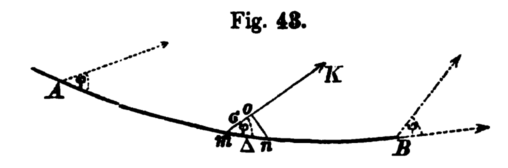
zu setzen haben.

Es ist nur erforderlich, der Fig. 41 die Deutung zu geben: dass in ihr die gerade Linie AB die Länge des geradlinig ausgestreckt gedachten Bogens AB aus Fig. 42, und die Ordinate $m\mu$ wiederum die Grösse bedeutet, welche die wirkende Tangentialkraft an der Stelle m der krummlinigen Bahn hatte. Die Fig. 41 kann dann unmittelbar als geometrische Darstellung gelten für die Arbeitssumme, welche bei dieser krummlinigen Bewegung von der Tangentialkraft verrichtet wird; auch hier lässt sich diese Arbeitssumme ausdrücken durch die Gleichung:

$$\mathfrak{A} = \Sigma (K\Delta).$$

Wenn die Richtung der Kraft, anstatt mit der Bewegungsrichtung zusammenzufallen, an irgend einer Stelle den bestimmten Winkel φ mit der Bewegungsrichtung einschliesst, so würde nach der im Anfange dieses Paragraphen gegebenen Definition die bei Zurücklegung des nächstfolgenden Wegestheils Δ verrichtete mechanische Arbeit zu bestimmen sein, indem man die Kraft K — anstatt mit $mn = \Delta$ — mit $mo = \sigma$ multiplicirte, d. h. mit dem in der Richtung der Kraft zurückgelegten Wege (Fig. 43). Je kleiner der Theil Δ angenommen wird, je mehr also derselbe als geradlinig, und die Kraft während dieses Theils der Bewegung als constant angesehen werden darf, um so kleiner wird der Fehler, den man begeht, indem man:

Fig. 43.



$$\sigma = \Delta \cdot \cos \varphi$$

setzt, und indem man das Product

$$K\sigma = \cos \varphi \cdot K\Delta$$

als Grösse der während dieses Theiles der Bewegung verrichteten mechanischen Arbeit ansieht.

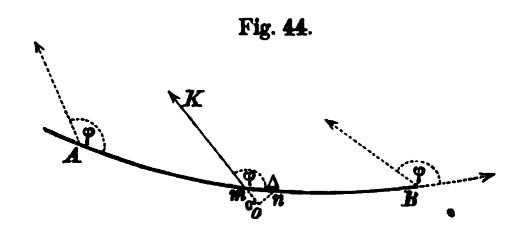
Es ist denkbar, dass eine Kraft auf solche Weise ihre Richtung stetig ändert, dass sie an allen Stellen der Bahn einen und denselben Winkel φ mit der Bewegungsrichtung einschliesst. In diesem Falle würde offenbar die verrichtete Arbeitssumme auf ähnliche Weise wie in dem vorigen Falle zu bestimmen sein — mit dem einzigen Unterschiede: dass allen den einzelnen Producten $K\Delta$ noch der gemeinschaftliche Factor $\cos \varphi$ hinzuzufügen wäre. Für diesen Fall würde also die verrichtete Arbeitssumme auszudrücken sein durch die Gleichung:

$$\mathfrak{A} = \cos\varphi\ \Sigma(K\Delta).$$

Die gesuchte Grösse $\mathfrak{A}$ erscheint hier als ein Product aus zwei Factoren, von denen der eine, nämlich $\Sigma(K\Delta)$, genau auf dieselbe Weise wie in dem vorigen Falle, also wie in Fig. 41 durch eine Fläche dargestellt werden kann. Dieser Factor hängt lediglich von der Grösse der veränderlichen Kraft ab.

Was den anderen Factor $\cos\varphi$ betrifft, so hängt dieser allein von der Richtung der veränderlichen Kraft ab. Dieser Factor ist positiv, wenn wie in Fig. 43 der constante Winkel φ ein spitzer Winkel ist, negativ dagegen, wenn wie in Fig. 44 dieser constante Winkel ein stumpfer Winkel ist. Die gesuchte Arbeitssumme $\mathfrak{A}$ wird daher ebenfalls einen positiven oder negativen Werth erhalten, je nachdem die Richtung der wirkenden Kraft überall einen spitzen oder überall einen stumpfen Winkel mit der Bewegungsrichtung einschliesst.

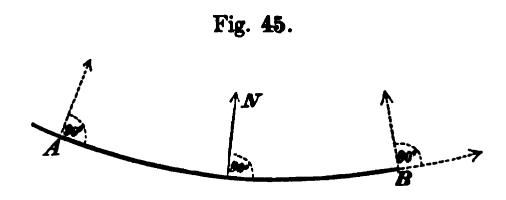
Fig. 44.



Hiernach ist es nun leicht, die für die Mechanik des materiellen Punktes wichtige Frage zu beantworten: welche Richtung eine Kraft N haben müsse, damit die von ihr verrichtete Arbeitssumme weder positiv noch negativ, vielmehr immer gleich Null sei. Es ist klar, dass dieser Fall dann eintritt, wenn der constante Winkel φ weder spitz noch stumpf, vielmehr ein rechter Winkel ist (Fig. 45); denn alsdann ist $\cos\varphi = 0$, folglich auch:

$$\mathfrak{A} = 0.$$

Fig. 45.

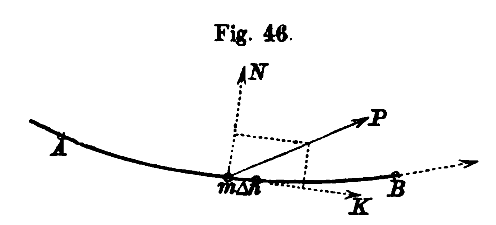


Wie auch immer die Grösse einer Kraft sich ändern möge, wie auch immer die Bahn des materiellen Punktes gekrümmt sein möge: die Kraft verrichtet gar keine mechanische Arbeit, wenn ihre Richtung fortwährend einen rechten Winkel mit der Bewegungsrichtung einschliesst.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man nun auch in dem Falle eine anschauliche Vorstellung sich bilden von der Arbeitssumme,

welche die wirkende Kraft verrichtet, wenn diese Kraft eine ganz beliebige veränderliche Grösse und Richtung hat. Wenn man sich nämlich für jede Stelle der Bahn die wirkende Kraft P rechtwinkelig zerlegt denkt in zwei Seitenkräfte K und N, von denen die erstere beständig mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt, die letztere dagegen beständig rechtwinkelig zu der Bewegungsrichtung gerichtet ist (Fig. 46), dann ist die von der Tangentialkraft K verrichtete Arbeitssumme auf dieselbe Weise wie bei der in Fig. 42 dargestellten Bewegung zu bestimmen; die von der Normalkraft N verrichtete Arbeitssumme aber ist nach dem eben bewiesenen Satze gleich Null. Wendet man nun das Gesetz der mechanischen Arbeit auf diesen Fall an, so ergiebt sich, dass die von der Mittelkraft P verrichtete Arbeitssumme aus den beiden Theilen Null und

Fig. 46.



$$\mathfrak{A} = \Sigma (K \Delta)$$

besteht, dass also die gesuchte Arbeitssumme auch hier ganz wie in Fig. 41 durch eine Fläche $ABDC$ sich veranschaulichen lässt, sobald nur das Gesetz bekannt ist, nach welchem die Tangentialkraft K im Laufe der Bewegung sich ändert.

§ 22.

Princip der lebendigen Kraft.

Wenn ein materieller Punkt, dessen Masse m ist, zu irgend einer Zeit mit der Geschwindigkeit c sich bewegt, so nennt man die Zahl

$$\frac{m c^2}{2}$$

die **lebendige Kraft** des materiellen Punktes in jenem Zeitpunkte.

Diese Benennung soll keineswegs andeuten, dass an irgendwelche **Kräfte** dabei gedacht werden soll, vielmehr nur: dass Masse und Geschwindigkeit des materiellen Punktes eine bestimmte Grösse besitzen. Auch wenn durchaus keine Kraft auf den materiellen Punkt wirkt, die Bewegung desselben also gleichförmig ist, sagt man von demselben: er besitze eine gewisse lebendige Kraft, deren Grösse durch jene Zahl $\frac{m c^2}{2}$ ausgedrückt ist. Nur weil in den

Rechnungen, welche auf die Bewegungen der materiellen Punkte sich beziehen, diese Zahl häufig wiederkehrt, und weil ein bestimmter sogleich näher zu erklärender Zusammenhang stattfindet zwischen dieser Zahl und dem Producte, welches im vorigen Paragraphen als mechanische Arbeit definirt wurde, hat man sich veranlasst gesehen, für die genannte Zahl ein für alle Male eine bestimmte Benennung in der Mechanik einzuführen.

Wenn die Geschwindigkeit des materiellen Punktes sich ändert, so ändert sich auch seine lebendige Kraft. War im Anfange eines gewissen Zeitraumes die Geschwindigkeit $= c$, die lebendige Kraft also $= \frac{mc^2}{2}$, am Ende desselben aber die Geschwindigkeit $= v$, mithin die lebendige Kraft $= \frac{mv^2}{2}$ geworden, so hat innerhalb dieses Zeitraumes die lebendige Kraft zugenommen um die Grösse:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2},$$

und diese Grösse kann betrachtet werden als die in jenem Zeitraume erzeugte lebendige Kraft. Wenn die Endgeschwindigkeit v kleiner ist als die Anfangsgeschwindigkeit c, so hat die lebendige Kraft abgenommen; diese Abnahme kann als eine negative Zunahme aufgefasst werden.

Wenn auf einen in Bewegung begriffenen materiellen Punkt, dessen Geschwindigkeit c ist, in irgend einem Zeitpunkte eine constante Kraft K in der Richtung seiner Bewegung zu wirken beginnt, so wird derselbe eine geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung AB ausführen, welche mit der Geschwindigkeit c anfängt (Fig. 47). Die Beschleunigung dieser Bewegung ist nach dem Gesetze der Beschleunigung:

Fig. 47.

A c s B v K

$$p = \frac{K}{m}.$$

Für die Wegeslänge s, welche der Punkt zurücklegt, während seine Geschwindigkeit von c bis auf die Grösse v wächst, wurde in Gleichung 4) des § 7 der Werth gefunden:

$$s = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right)\frac{1}{p}.$$

Wenn man in dieser Gleichung für p seinen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$s = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) \frac{m}{K},$$

welche mit K multiplicirt die Form annimmt:

$$48) \quad Ks = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}.$$

Das Product Ks ist nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Erklärung die von der Kraft K verrichtete mechanische Arbeit; diese Gleichung enthält also folgenden Lehrsatz:

Die mechanische Arbeit, welche die auf einen materiellen Punkt wirkende Kraft verrichtet, ist gleich der von ihr hervorgebrachten Zunahme der lebendigen Kraft desselben.

Dieser Lehrsatz drückt das Princip der lebendigen Kraft in seiner einfachsten Gestalt aus.

Die Gleichung 4) des § 7 gilt — wie dort nachgewiesen wurde — sowohl für negative als für positive Werthe der Beschleunigung p. Folglich gilt die hier aus derselben abgeleitete Gleichung 48) auch für den Fall: wenn die Anfangsgeschwindigkeit c der wirkenden Kraft K entgegen gerichtet, die Bewegung also — im Anfange wenigstens — eine gleichförmig verzögerte ist (Fig. 48).

Fig. 48.

B v s A c K

In diesem Falle wird die Zunahme an lebendiger Kraft negativ, ebenso auch (nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Erklärung) die mechanische Arbeit, weil hier der materielle Punkt der Kraftrichtung entgegen sich bewegt, in der Richtung der Kraft also eine negative Wegeslänge ($- s$) zurücklegt. Die Gleichung 48) nimmt daher die Form an:

$$-Ks = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2},$$

und für diejenige Wegeslänge x, nach deren Zurücklegung die Geschwindigkeit v, folglich auch die lebendige Kraft gleich Null geworden ist, ergiebt sich die Gleichung:

$$-Kx = -\frac{mc^2}{2}, \quad \text{oder:} \quad +Kx = +\frac{mc^2}{2}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass zwischen den beiden Grössen, welche als „mechanische Arbeit“ und „lebendige Kraft“ definirt wurden, eine gewisse Aequivalenz stattfindet, dass die eine gleichsam in die andere umgewandelt werden kann. Durch die mechanische Arbeit $-Kx$ wird eine lebendige Kraft $\frac{mc^2}{2}$ vernichtet,

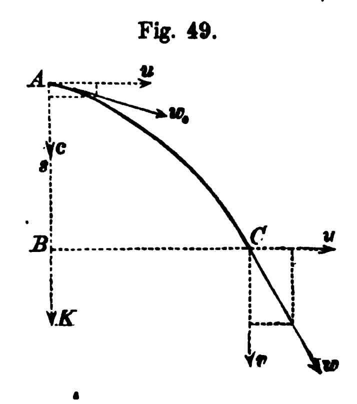
die genau eben so gross ist als diejenige, welche durch die mechanische Arbeit $+Kx$ erzeugt worden wäre.

Die in Fig. 48 dargestellte Bewegung kann so gedeutet werden, als ob die in der Masse m anfangs vorhanden gewesene lebendige Kraft $\frac{mc^2}{2}$ dazu verbraucht worden wäre, um die ihrer Bewegung entgegenwirkende Kraft K längs der Strecke x gleichsam wie einen Widerstand zu überwinden. Wo also es sich darum handelt, längs eines gegebenen Weges einen gegebenen Widerstand zu überwinden, da kann man sich der lebendigen Kraft einer in Bewegung begriffenen Masse dazu bedienen. Die Grösse der dazu erforderlichen lebendigen Kraft ergiebt sich aus dem Satze:

Widerstand mal Weg = verbrauchte lebendige Kraft.

Wenn die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes nicht mit der Richtung der wirkenden Kraft zusammenfällt, so kann man die Anfangsgeschwindigkeit rechtwinkelig zerlegen in zwei Seitengeschwindigkeiten, von denen die eine u einen rechten Winkel mit der Kraftrichtung einschliesst, die andere c mit der Richtung der Kraft K zusammenfällt (Fig. 49). Die von dem materiellen Punkte wirklich ausgeführte Bewegung ist nunmehr anzusehen als die Resultirende einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in der Richtung der Kraft und einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit u rechtwinkelig zu derselben.

Fig. 49.



Nach dem Parallelogramm-Gesetze stören diese beiden Bewegungen einander nicht, geschieht vielmehr jede von beiden gerade so, als ob die andere nicht vorhanden wäre; die Bewegung in der Richtung AB also geschieht genau auf dieselbe Weise, wie die in Fig. 47 dargestellte Bewegung, folglich behält die Gleichung 48) auch hier ihre Gültigkeit, wenn die Endgeschwindigkeit in der Richtung der Kraft wieder mit v bezeichnet wird. Wenn man die beiden Gleichungen:

$$Ks = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2},$$

$$0 = \frac{mu^2}{2} - \frac{mu^2}{2}.$$

zusammen addirt, so erhält man die Gleichung:

$$Ks = \frac{m(v^2 + u^2)}{2} - \frac{m(c^2 + u^2)}{2}.$$

Sind w_0 und w resp. Anfangsgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit der wirklichen (resultirenden) Bewegung, so ist nach dem Parallelogramm der Geschwindiekeiten:

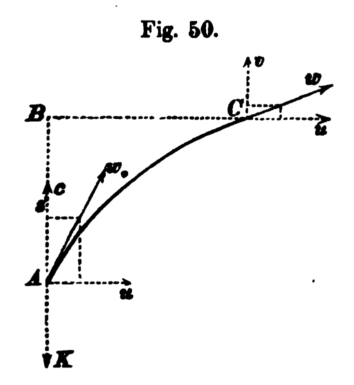
$$w_0^2 = c^2 + u^2 \quad \text{und} \quad w^2 = v^2 + u^2,$$

und nach Substitution dieser Werthe nimmt die vorige Gleichung die Form an:

$$49) \quad Ks = \frac{mw^2}{2} - \frac{mw_0^2}{2}.$$

Die Bedeutung der Grösse Ks ist unverändert dieselbe geblieben, sie bedeutet nach wie vor das Product aus der wirkenden Kraft in die von dem materiellen Punkte in der Richtung der Kraft zurückgelegte Wegeslänge, d. h. die von der Kraft verrichtete mechanische Arbeit. Die Vergleichung der beiden Gleichungen 48) und 49) zeigt, dass hinsichtlich der Form kein Unterschied zwischen beiden besteht. In jeder von beiden steht auf der einen Seite die von der wirkenden Kraft verrichtete mechanische Arbeit, auf der anderen die hervorgebrachte Zunahme an lebendiger Kraft. Also auch dann, wenn die Bewegungsrichtung mit der Richtung der wirkenden Kraft nicht in eine gerade Linie zusammenfällt, wenn vielmehr die aus der Anfangsgeschwindigkeit und der hinzukommenden Beschleunigung hervorgehende Bewegung eine krummlinige ist, gilt das Princip der lebendigen Kraft:

Fig. 50.



Die erzeugte lebendige Kraft ist allemal gleich der sie erzeugenden mechanischen Arbeit.

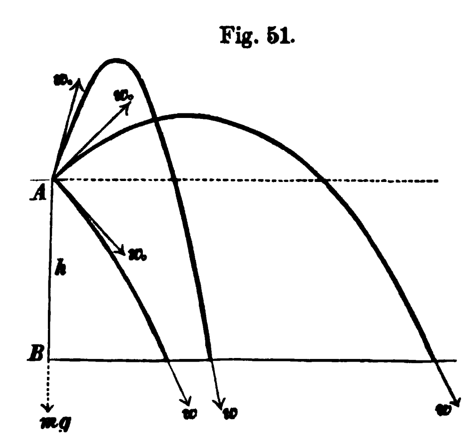
Wie die Gleichung 48) auch für den Fall noch gültig blieb, wenn die Kraft der Bewegungsrichtung entgegenwirkte — vorausgesetzt nur, dass die Grösse s dann als negativ in Rechnung gebracht wurde — so gilt auch die Gleichung 49) noch dann, wenn die Anfangsgeschwindigkeit w_0 eine solche Richtung hat, dass für die Grösse c ein negativer Werth sich ergiebt wie

bei der in Fig. 50 dargestellten Bewegung. Es ist nur nöthig, die Grösse s mit dem richtigen Vorzeichen in Rechnung zu bringen und stets in Erinnerung zu behalten, dass s diejenige Wegeslänge bedeutet, um welche der Punkt in der Richtung der Kraft vorgerückt ist, dass also, wenn die Bewegung rückwärts statt vorwärts erfolgte, diese Wegeslänge als eine negative Grösse anzusehen ist. In Bezug auf die in Fig. 50 dargestellte Bewegung würde man also der Gleichung 49) die Form zu geben haben:

$$-Ks = \frac{m w^2}{2} - \frac{m w_0^2}{2}.$$

Wenn auf irgend eine Weise einem Körper von der Masse m eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit w_0 ertheilt wird — wie z. B. einem Steine durch die Hand des Werfenden, einer Bombe durch Abfeuern derselben aus einem Mörser — und der Körper dann der Wirkung der Schwerkraft überlassen seine Bewegung weiter fortsetzt, so wird, je nachdem die Richtung jener Anfangsgeschwindigkeit nach unten oder nach oben hin von der horizontalen Richtung abwich, die Bewegung des Körpers ihrer Art nach entweder mit der in Fig. 49 oder mit der in Fig. 50 dargestellten Bewegung übereinstimmen. Denn hier bildet das Gewicht des Körpers jene constant wirkende Kraft, und zwar ist diese Kraft als die einzige wirkende Kraft anzusehen, wenn man sich erlaubt, die Wirkung des Luftwiderstandes hier ausser Acht zu lassen.

Fig. 51.



Mit Hülfe des Princips der lebendigen Kraft ist es nun leicht, die Frage zu beantworten: wie gross die Geschwindigkeit w sein wird, mit welcher der geworfene Körper in irgend einer gegebenen Horizontalebene ankommen wird (Fig. 51). Nach § 18 ist mg die wirkende Kraft, und die mechanische Arbeit, welche diese Kraft verrichtet hat, nachdem der Körper in der Richtung der Schwere, d. h. vertical abwärts die Strecke h zurückgelegt hat, ist $mg \cdot h$. Wenn also mit h die Höhe bezeichnet wird,

um welche die Horizontal-Ebene des Anfangspunktes A höher liegt, als die gegebene Ebene, so erhält man aus dem Princip der lebendigen Kraft für diesen Fall die Gleichung:

$$mgh = \frac{mw^2}{2} - \frac{mw_0^2}{2},$$

deren Auflösung für w den Werth ergiebt:

$$50) \quad w = \sqrt{w_0^2 + 2gh}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Grösse der Endgeschwindigkeit w nur abhängt von der Höhendifferenz h der beiden Ebenen und von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit w_0, dass sie dagegen ganz unabhängig ist von der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit.

Wenn z. B. einem Steine durch die Hand des Werfenden eine Anfangsgeschwindigkeit von 15^m mitgetheilt wurde, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Stein in einer um 10^m tiefer liegenden Horizontal-Ebene ankommt, allemal:

$$w = \sqrt{15^2 + 2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 10} = 20^m{,}5.$$

In welcher Richtung auch immer der Stein geworfen wurde — ob aufwärts oder abwärts oder in horizontaler Richtung — die Endgeschwindigkeit wird stets dieselbe Grösse haben; denn durch die mechanische Arbeit der Schwerkraft wird die in dem Steine anfangs vorhanden gewesene lebendige Kraft stets um eine gleiche Grösse vermehrt.

Wenn $h = 0$ gesetzt wird in Gleichung 50), so ergiebt sich $w = w_0$, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher ein schräg aufwärts geworfener Körper in der Horizontal-Ebene des Anfangspunktes wieder ankommt, ist gerade so gross, als seine Anfangsgeschwindigkeit war. In diesem Falle verrichtete die Schwerkraft anfangs gerade so viele negative als nachher positive mechanische Arbeit, in Summa also die mechanische Arbeit Null; folglich musste auch die lebendige Kraft am Ende der Bewegung dieselbe Grösse wie im Anfange haben.

Wenn endlich der Anfangspunkt tiefer liegt als der Endpunkt, so ist die Höhe h als eine negative Grösse in Rechnung zu bringen, und die Gleichung 50) nimmt für diesen Fall die Form an:

$$w = \sqrt{w_0^2 - 2gh}.$$

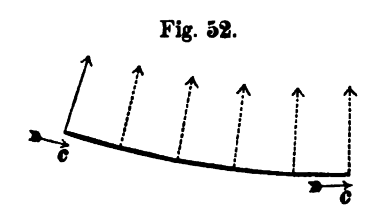
Da die von der Schwerkraft verrichtete mechanische Arbeit in diesem Falle eine negative Grösse hat, wird die lebendige Kraft des Körpers vermindert statt vermehrt, die Endgeschwindigkeit muss also kleiner sein als die Anfangsgeschwindigkeit. Ob übrigens der Körper diese höher gelegene Ebene wirklich erreicht, welchen Bedingungen Richtung und Grösse seiner Anfangsgeschwindigkeit entsprechen müssen, damit dies möglich sei, an welcher Stelle, mit welcher Bewegungsrichtung und nach wie vielen Secunden der Körper dort ankommen wird: diese Fragen werden erst später in der Theorie der parabolischen Bewegung ihre Beantwortung finden.

Das Princip der lebendigen Kraft gilt auch dann noch, wenn die Kraft K veränderliche Grösse und Richtung hat.

Um die mechanische Arbeit zu bestimmen, welche von einer veränderlichen Kraft verrichtet wird, hat man sich — wie im vorigen Paragraphen erklärt — die ganze Dauer der Bewegung in so kleine Theile zerlegt zu denken, dass innerhalb eines solchen Zeittheils die Kraft als constant angesehen werden darf, d. h. in unendlich kleine Theile. In Bezug auf die Bewegung des materiellen Punktes während eines solchen Zeittheils ist dann das Princip als bereits bewiesen anzusehen, und die in diesem Zeittheile hervorgebrachte Zunahme an lebendiger Kraft gleich zu setzen der während desselben von der Kraft verrichteten mechanischen Arbeit. Wenn aber in jedem einzelnen jener Zeittheile die erzeugte lebendige Kraft gleich ist der während desselben von der Kraft verrichteten mechanischen Arbeit, so muss auch die während der ganzen Bewegungsdauer hervorgebrachte Zunahme an lebendiger Kraft (als Summe jener einzelnen Zunahmen) gleich sein der ganzen Arbeitssumme, welche inzwischen von der veränderlichen Kraft verrichtet wurde.

Wie diese Arbeitssumme zu bestimmen ist, wurde im vorigen Paragraphen bereits erklärt. Wenn z. B. die Richtung der wirkenden Kraft im ersten Augenblicke genau rechtwinkelig stand zu der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit, und nachher während der ferneren Bewegung die Richtung der Kraft in solcher Weise sich ändert, dass der Winkel zwischen ihr und der augenblicklichen Bewegungsrichtung stets genau ein rechter Winkel bleibt (Fig. 52), so ist — wie im vorigen Paragraphen gezeigt — die von der Kraft verrichtete mechanische Arbeit immer Null. Hieraus folgt, dass in diesem Falle auch die von ihr hervorgebrachte Zunahme an lebendiger Kraft gleich Null ist, dass also die Endgeschwindigkeit des materiellen Punktes gleich seiner Anfangsgeschwindigkeit ist, und dass während der ganzen Bewegungsdauer die Geschwindigkeit constante G r ö s s e hatte. In diesem Falle besteht die Wirkung der Kraft einzig und allein darin, dass sie die R i c h t u n g der Geschwindigkeit stetig ändert.

Fig. 52.



Die Zuziehung des im vorigen Paragraphen bewiesenen Ge-

setzes der mechanischen Arbeit führt zu folgender allgemeineren Form des Princips der lebendigen Kraft:

Die Grösse, um welche die lebendige Kraft eines materiellen Punktes zunimmt, ist gleich der Summe der mechanischen Arbeiten, welche von allen überhaupt auf den materiellen Punkt einwirkenden Kräften während der Bewegung desselben verrichtet werden.

Denn wenn die Kraft K, von welcher bisher die Rede war, als Mittelkraft angesehen wird von allen denjenigen Kräften, welche überhaupt auf den materiellen Punkt wirken, so kann nach dem Gesetze der mechanischen Arbeit (Gleichung 47) statt der von ihr verrichteten mechanischen Arbeit auch die Summe der von ihren Seitenkräften verrichteten mechanischen Arbeiten gesetzt werden. Wenn also c und v resp. Anfangsgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit des materiellen Punktes sind, und abkürzungsweise mit $\Sigma(\mathfrak{a})$ die Summe der von allen auf ihn einwirkenden Kräften verichteten mechanischen Arbeiten bezeichnet wird, so ergiebt sich die allgemeine Gleichung:

$$51)\quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = \Sigma(\mathfrak{a}).$$

In allen solchen Fällen also, wo die Grösse $\Sigma(\mathfrak{a})$ bestimmbar ist, kann mit Hülfe des Princips der lebendigen Kraft die Endgeschwindigkeit v eines materiellen Punktes ihrer Grösse nach immer bestimmt werden, sobald nur die Grösse c der Anfangsgeschwindigkeit gegeben ist.

§ 23.

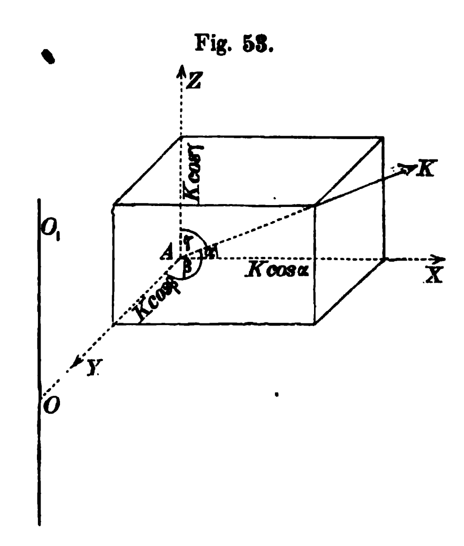
Gesetz der statischen Momente.

Es kommen in der Mechanik häufig Aufgaben vor, bei denen die Beziehungen in Betracht kommen zwischen einer gegebenen Kraft einerseits und einer gegebenen festen geraden Linie ausserhalb der Kraftrichtung andererseits. Die Behandlung solcher Aufgaben und die Untersuchung solcher Beziehungen haben Veranlassung gegeben, den Begriff des „statischen Momentes“ in der Mechanik einzuführen. Zwar wird die eigentliche Bedeutung und Wichtigkeit dieses Begriffes, namentlich des in der Ueberschrift angedeuteten Lehrsatzes, für die Mechanik erst in dem nächstfolgenden Abschnitte klarer hervortreten; da indessen auch in der Mechanik des einfachen materiellen Punktes mitunter Gelegenheit

sich bietet, von diesem Lehrsatze Gebrauch zu machen, so verdient der Beweis desselben schon hier eine Stelle zu finden, und soll zunächst der Begriff des statischen Momentes in seiner allgemeinsten Form an folgendem Beispiele erklärt werden.

Der Punkt A in Fig. 53 soll die augenblickliche Lage eines materiellen Punktes bezeichnen, und K eine von den Kräften sein, die auf denselben wirken. Die gegebene feste gerade Linie $O O_1$ soll in Folgendem kurzweg die Achse genannt werden. Wenn man die Kraft K in drei rechtwinkelig zu einander gerichtete Seitenkräfte zerlegen will und zwar auf solche Weise, dass deren Beziehungen zu jener Achse in ihrer einfachsten Gestalt hervortreten, so bieten sich dazu folgende drei Richtungen dar. Die Richtung AZ der einen Seitenkraft soll der Richtung der Achse parallel genommen werden; die Richtung der zweiten AY soll mit der Richtung AO des von dem Punkte A auf die Achse gefällten Perpendikels zusammenfallen; die Richtung der dritten AX ist dann durch die Bedingung schon festgelegt, dass sie rechwinkelig zu den beiden ersten gerichtet sein soll. Wenn γ, β, α resp. die Winkel sind, welche die Kraft K mit diesen drei Richtungen einschliesst, so sind $K \cos \gamma$, $K \cos \beta$, $K \cos \alpha$ die drei Seitenkräfte.

Fig. 53.



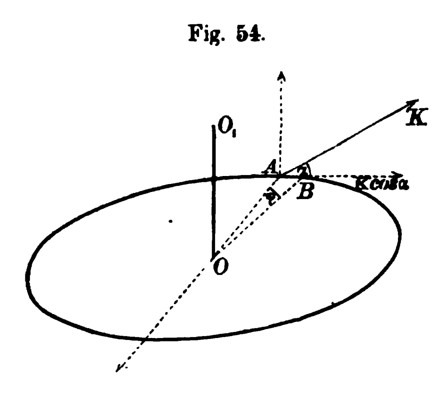
D a s P r o d u c t $K \cos \alpha . \overline{AO}$ w i r d d a s s t a t i s c h e M o m e n t d e r K r a f t K i n B e z u g a u f d i e A c h s e $O O_1$ g e n a n n t.

Man erhält demnach das statische Moment einer gegebenen Kraft in Bezug auf eine gegebene Achse, indem man das Product aus folgenden zwei Factoren bildet: Der eine Factor ist diejenige der drei Seitenkräfte, welche sowohl zur Achsenrichtung, als auch zu dem vom Angriffspunkte auf die Achse gefällten Perpendikel rechtwinkelig gerichtet ist: der andere Factor ist die Länge eben dieses Perpendikels. Das statische Moment einer Kraft ist also

gleich Null, wenn der Winkel α gleich 90° ist, d. h. wenn die Kraftrichtung mit der Achsenrichtung in einer und derselben Ebene liegt.

Denkt man sich den Punkt A als einem festen Körper angehörend, der um die Achse OO_1 als feste Drehachse sich dreht, und bestimmt man die mechanische Arbeit, welche die Kraft K verrichtet, während der unendlich kleine Drehungswinkel φ zurückgelegt wird, so findet sich, dass von den drei Seitenkräften der Kraft K nur die eine, nämlich $K \cos \alpha$, mechanische Arbeit dabei verrichtet, insofern jede der beiden anderen mit der Bewegungsrichtung des Punktes A einen rechten Winkel einschliesst (Fig. 54). Nach dem Gesetze der mechanischen Arbeit ist also die von der Kraft K (als Mittelkraft) verrichtete mechanische Arbeit:

Fig. 54.



$$\mathfrak{A} = K \cos \alpha \,.\, \widehat{AB}.$$

Wenn als Winkeleinheit derjenige Winkel, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist, gewählt wird, so ist:

$$\widehat{AB} = \overline{AO} \,.\, \varphi.$$

Die Substitution dieses Werthes ergiebt für $\mathfrak{A}$ die Gleichung:

$$\mathfrak{A} = K \cos \alpha \,.\, \overline{AO} \,.\, \varphi$$

oder, wenn die Grösse $K \cos \alpha \,.\, \overline{AO}$ mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet wird:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \,.\, \varphi.$$

Man erhält also die von der Kraft K verrichtete mechanische Arbeit, indem man den unendlich kleinen Drehungswinkel multiplicirt mit derjenigen Grösse, welche als das statische Moment der Kraft definirt wurde. Dies ist, wie erst später in der Mechanik fester Körper ausführlicher erklärt werden kann, der eigentliche Grund, weshalb für das Product $K \cos \alpha \,.\, \overline{AO}$ eine besondere Benennung eingeführt ist.

Wenn R die Mittelkraft ist von allen Kräften, die auf den materiellen Punkt A einwirken, so ist das statische Moment derselben in Bezug auf die Achse OO_1 nach Fig. 55:

$$\mathfrak{M} = R_x \,.\, \overline{AO}.$$

Die Grösse R_x hatte nach der in Fig. 37 gewählten Bezeichnungsweise die Bedeutung:

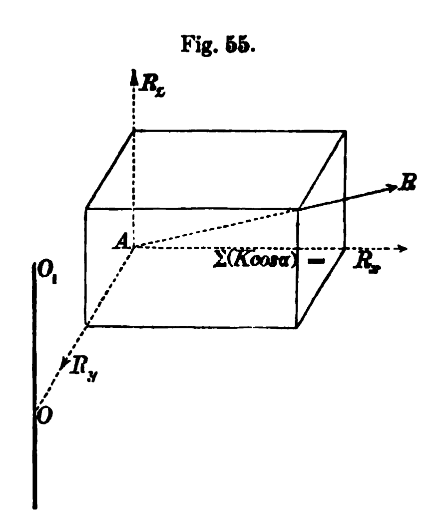
$$R_x = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \cdots + K_n \cos \alpha_n.$$

Die Substitution dieses Werthes ergiebt für $\mathfrak{M}$ die Gleichung:

$$\mathfrak{M} = K_1 \cos \alpha_1 \,.\, \overline{AO} + K_2 \cos \alpha_2 \,.\, \overline{AO} + \cdots + K_n \cos \alpha_n \,.\, \overline{AO}.$$

Die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung sind nach der gegebenen Definition die statischen Momente der Kräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$ in Bezug auf die Achse OO_1. Bezeichnet man diese statischen Momente, für welche positive oder negative Werthe sich ergeben werden, je nachdem die einzelnen Winkel α spitze oder stumpfe Winkel sind, resp. mit $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_n$, so erhält man Gleichung:

Fig. 55.



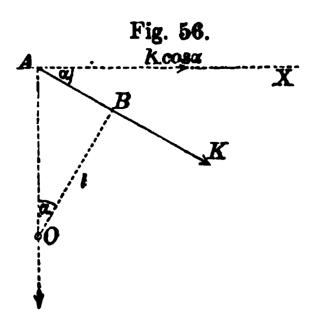
52) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_n$.

Das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der Summe der statischen Momente aller einzelnen Kräfte in Bezug auf eine gegebene Achse.

Dieser Lehrsatz wird das Gesetz der statischen Momente genannt.

Einfacher gestaltet sich die Erklärung des Begriffs der statischen Momente für den speciellen Fall, wenn die gegebenen Kräfte sämmtlich in einer Ebene liegen, und die gegebene Achse OO_1 zugleich rechtwinkelig zu dieser Ebene gerichtet ist. Die Zahl der Seitenkräfte, in welche jede einzelne Kraft zu zerlegen ist, reducirt sich in diesem Falle auf zwei, von denen die eine mit der Richtung AO des von dem Angriffspunkte A auf die Achse O gefällten Perpendikels zusammenfällt, die andere rechtwinkelig zu demselben gerichtet ist (Fig. 56). Mit Beibehaltung der in Fig. 53 gewählten Bezeichnungsweise ergiebt sich, dass die Ebene des Winkels α, den die Kraftrichtung mit der Richtung AX einschliesst, hier in die Normal-Ebene der Achsen-Richtung (d. h. in die Ebene der Figur 56)

Fig. 56.



hineinfällt; dieser Winkel α hat gleiche Grösse mit demjenigen Winkel, welchen die Linie AO mit dem von dem Punkte O auf die Kraftrichtung gefällten Perpendikel OB einschliesst, und für die Länge l dieses Perpendikels oder des Abstandes der Kraftrichtung von dem Punkte O ergiebt sich der Werth:

$$\overline{OB} = l = \overline{AO} \, . \cos \alpha.$$

Man nennt diese Grösse den Hebelarm der Kraft K in Bezug auf den Punkt O. Statt des Productes:

$$K \, . \cos \alpha \, . \overline{AO},$$

welches das statische Moment der Kraft K in Bezug auf die Achse O genannt wurde, kann daher in diesem Falle auch gesetzt werden:

$$Kl,$$

und das statische Moment definirt werden als das Product:

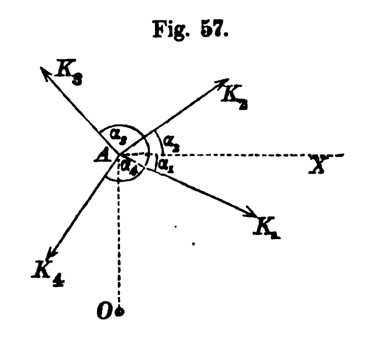
Kraft mal Hebelarm.

Damit jedoch diese Special-Definition mit der oben gegebenen allgemeineren Definition in Uebereinstimmung sich befinde, ist es erforderlich, derselben noch eine zweite hinzuzufügen, welche die Frage entscheidet: wenn dieses Product Kl als eine positive oder eine negative Grösse in Rechnung gebracht werden soll.

Aus Fig. 53 erkennt man, dass das statische Moment einer Kraft K positiv ist, wenn die Seitenkraft $K \cos \alpha$ in der Richtung von A nach X wirkt, d. h. wenn der Winkel α, den die Kraft mit der Richtung AX einschliesst, ein spitzer Winkel ist; negativ dagegen, wenn dieser Winkel ein stumpfer Winkel ist, die betreffende Seitenkraft also die Richtung von X nach A hat. Statt dessen kann man das dem Producte Kl zu gebende Vorzeichen auch als abhängig ansehen von der Richtung der Drehbewegung, welche der um die Achse O drehbar gedachten Normal-Ebene durch die Kraft K ertheilt werden würde. Denn zwischen denjenigen Kräften, welche spitze Winkel mit der Richtung von A nach X einschliessen und denjenigen Kräften, welche stumpfe Winkel mit dieser Richtung einschliessen, findet zugleich der Unterschied statt: dass die ersteren diese Ebene rechts herum, die letzteren diese Ebene links herum drehen würden. So z. B. würden in Fig. 57 die Kräfte K_1 und K_2 die Ebene der Figur um den Punkt O rechts herum drehen, die Kräfte K_3 und K_4 dagegen links herum.

Es ist daher hinsichtlich der Bestimmung des Vorzeichens von Kl nur nöthig, zwischen den beiden entgegengesetzten Drehungsrichtungen gehörig zu unterscheiden; wenn die eine als positiv angesehen wird, so muss die andere als negativ angesehen werden. Wie es hinsichtlich der Wahl der Richtung AX für die Seitenkräfte $K\cos\alpha$ gleichgültig ist, ob man die Richtung von A nach X oder die Richtung von X nach A als die positive ansehen will, so ist es auch in diesem Falle gleichgültig, welche von den beiden Drehungsrichtungen man als die positive ansehen will; nur muss bei allen Kräften auf übereinstimmende Weise verfahren werden. In der Regel wählt man die von links nach rechts herum gerichtete Drehung als positive Drehungsrichtung, also diejenige, mit welcher dem Beobachter einer Uhr die Drehung der Uhrzeiger übereinstimmend erscheint.

Fig. 57.



Wenn man in Gleichung 52) für die Grössen $\mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_n$ die in dem vorliegenden speciellen Falle für die statischen Momente sich ergebenden Werthe substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$53)\quad Rl = \Sigma(Kl),$$

worin das Summationszeichen Σ andeutet, dass die einzelnen Producte $K_1\, l_1 \ldots K_n\, l_n$ mit Berücksichtigung ihrer positiven oder negativen Vorzeichen zu einer algebraischen Summe zusammengefasst werden sollen. Diese Gleichung giebt an, wie man aus den gegebenen Seitenkräften den Werth des Productes:

Mittelkraft mal Hebelarm

in Beziehung auf einen gegebenen Punkt der Kräfte-Ebene berechnen kann, und lässt sich in manchen Fällen mit Vortheil benutzen, um, wenn einer dieser beiden Factoren schon bekannt ist, den anderen daraus zu berechnen.

Wenn die Grösse der Mittelkraft bereits bekannt ist, so kann mit Hülfe der Gleichung 53) die Richtung derselben gefunden werden, indem man aus ihr den Abstand l berechnet, in welchem diese Richtung an einem gegebenen festen Punkte O der Kraft-Ebene vorbeigeht. Umgekehrt, wenn die Richtung der Mittelkraft

folglich auch die Grösse l, bereits anderweitig gefunden wurde, so kann die Gleichung benutzt werden, um die Grösse der Mittelkraft zu bestimmen.

Wenn das Product $R \,.\, l$ gleich Null ist, so folgt daraus, dass einer der beiden Factoren R oder l gleich Null ist. Gelingt es also z. B., einen Punkt O aufzufinden, in Bezug auf welchen nachweisbar die algebraische Summe der statischen Momente der Seitenkräfte gleich Null ist, so hat man in diesem Punkte O einen Richtungspunkt der Mittelkraft gefunden und weiss, dass — wenn überhaupt eine solche vorhanden ist — dieselbe in der Richtung AO wirkt.

Das Gesetz der statischen Momente beruht lediglich auf dem Parallelogramm-Gesetze; es gilt daher nicht allein für Kräfte, sondern überhaupt für alle diejenigen mechanischen Grössen, für deren Zusammensetzung und Zerlegung das Parallelogramm-Gesetz gültig ist; z. B. für Beschleunigungen und Geschwindigkeiten. Ueberträgt man den Begriff der statischen Momente auf Beschleunigungen und Geschwindigkeiten, so ergeben sich aus dem hier bewiesenen Lehrsatze noch folgende zwei abgeleitete Gesetze:

Das statische Moment der resultirenden Beschleunigung ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Seitenbeschleunigungen in Bezug auf eine gegebene Achse.

Das statische Moment der resultirenden Geschwindigkeit ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Seitengeschwindigkeiten in Bezug auf eine gegebene Achse.

SECHSTES CAPITEL.

Freie Bewegung des materiellen Punktes.

§ 24.

Parabolische Bewegung.

Nach § 16 ist die schon vorhandene Geschwindigkeit eines in Bewegung begriffenen materiellen Punktes eine Bewegungsursache, welche für sich allein eine geradlinige gleichförmige Bewegung zur Folge haben würde, und eine constant wirkende Kraft eine Bewegungsursache, welche für sich allein eine gleich-

förmig beschleunigte Bewegung hervorbringen würde. Aus dem in § 19 erklärten Parallelogramm-Gesetze folgt der Satz: Wenn in einem materiellen Punkte gleichzeitig zwei Bewegungsursachen vorhanden sind, deren eine für sich allein eine gleichförmige, deren andere für sich allein eine gleichförmig beschleunigte Bewegung zur Folge haben würde, so ist die Bewegung, welche der materielle Punkt wirklich ausführt, die Resultirende dieser beiden Bewegungen. In § 14 wurde nachgewiesen, dass die Resultirende zweier verschieden gerichteter Bewegungen, deren eine gleichförmig, deren andere gleichförmig beschleunigt ist, unter allen Umständen eine parabolische Bewegung ist; d. h. die Bahnlinie der Resultirenden hat die Form einer Parabel, deren Achsenrichtung mit der Richtung der Beschleunigung zusammenfällt.

Die parabolische Bewegung ist daher die allgemeine Bewegungsform für einen materiellen Punkt, auf welchen eine constante Kraft wirkt. Die Parabel geht in eine gerade Linie über, welche mit der Richtung der Kraft zusammenfällt, in dem speciellen Falle, wenn die Anfangsgeschwindigkeit entweder Null ist oder gleiche Richtung mit der Kraftlinie hat.

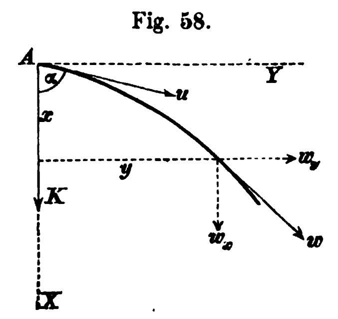
Mit Beibehaltung der im § 14 gewählten Bezeichnungsweise kann man also die dort gefundenen Gleichungen:

$w_x = c + pt$ (Gleichung 20), $x = ct + \frac{pt^2}{2}$ (Gleichung 21),

$w_y = v$ (Gleichung 22), $y = vt$ (Gleichung 23)

unmittelbar anwenden, um jede Frage zu beantworten, welche in Bezug auf die Bewegung des materiellen Punktes in dem vorliegenden Falle gestellt werden könnte (Fig. 58). Es ist nur erforderlich, um die Bedeutung der darin vorkommenden Grössen c, v, p zu erklären, noch die drei anderen ebenfalls früher gefundenen Gleichungen hinzuzufügen:

Fig. 58.



$c = u \cos \alpha$ (Gleichung 18),

$v = u \sin \alpha$ (Gleichung 19),

$p = \frac{K}{m}$ (Gleichung 39).

Die Theorie der unter Einwirkung einer constanten Kraft von einem materiellen Punkte ausgeführten Bewegung ist mit dem

Auffinden der obigen Gleichungen, welche für alle Werthe von α gültig sind, als abgeschlossen anzusehen, und bleibt daher nur übrig, an einigen Beispielen zu zeigen, auf welche Weise dieselben zum Auflösen von Aufgaben zu benutzen sind.

Um übrigens eine vollkommen klare anschauliche Vorstellung von der Bewegung zu gewinnen und die Beihülfe der obigen Gleichungen ganz entbehrlich zu machen, ist weiter nichts erforderlich, als folgende zwei Punkte stets im Auge zu behalten:

Erstens, die Bewegung in der Richtung AX ist gleichförmig beschleunigt, fängt mit der Geschwindigkeit c an und geschieht mit der Beschleunigung p.

Zweitens, die Bewegung in der Richtung AY ist gleichförmig und geschieht mit der Geschwindigkeit v.

Jede zu stellende Aufgabe kann daher zerlegt werden in zwei andere Aufgaben, deren eine die geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Richtung AX, deren andere die geradlinige gleichförmige Bewegung in der Richtung AY betrifft. Die beiden Geschwindigkeiten c und v erhält man durch Zerlegung der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit u.

§ 25.

Bewegung eines geworfenen Körpers.

Wenn ein geworfener Körper durch die Hand des Werfenden eine Geschwindigkeit u erhielt und dann der Wirkung der Schwerkraft überlassen seine Bewegung weiter fortsetzt, so sind die Bedingungen der parabolischen Bewegung erfüllt. Von dem Augenblicke an, in welchem der Körper die Hand des Werfenden verlässt, hat der Druck der Hand aufgehört zu wirken, und das Gewicht mg ist die einzige Kraft, unter deren Einwirkung die weitere Bewegung geschieht.*) In den allgemeinen Gleichungen ist also für diesen Fall zu substituiren:

$$K = mg \quad \text{und} \quad p = \frac{mg}{m} = g.$$

Horizontaler Wurf.

Wenn der Winkel α, den die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit der Richtung der Schwere einschliesst, ein rechter

*) Es soll die Wirkung des Luftwiderstandes hierbei unberücksichtigt bleiben, also angenommen werden, dass die Bewegung im luftleeren Raume geschieht.

Winkel ist, so ergeben sich aus den Gleichungen 18) und 19) die Werthe:

$$c = u \,.\, \cos 90^0 = 0, \qquad v = u \,.\, \sin 90^0 = u.$$

Die wirkliche Bewegung des Körpers kann aufgefasst werden: als ob die Verticale, in welcher der Körper mit der Beschleunigung g frei herabfällt, gleichzeitig in horizontaler Richtung mit der constanten Geschwindigkeit $v = u$ fortschreitet, oder: als ob die Horizontale, in welcher der Körper mit der constanten Geschwindigkeit $v = u$ fortschreitet, gleichzeitig mit der Fall-Beschleunigung g frei herabfällt. Die allgemeinen Gleichungen nehmen für diesen Fall die in Fig. 59 eingeschriebenen einfacheren Formen an.

Fig. 59.

Wenn beispielsweise die Geschwindigkeit, welche dem Körper von der Hand des Werfenden in horizontaler Richtung ertheilt wurde, 20^m betrug, und die Zeit t bestimmt werden soll, nach welcher der Körper eine um 10^m tiefer gelegene Horizontal-Ebene erreicht, so ist dazu die Gleichung

$$x = \frac{g t^2}{2}$$

zu benutzen, welche für t aufgelöst den Werth ergiebt:

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 10}{9,81}} = 1,428 \text{ Secunden.}$$

Die Strecke BC, welche während dieser Zeit in horizontaler Richtung zurückgelegt wird (die Wurfweite) ergiebt sich aus der Gleichung:

$$BC = y = ut = 20 \,.\, 1,428 = 28^m,6.$$

Die Endgeschwindigkeit der verticalen Bewegung ist:

$$w_x = gt = 9,81 \,.\, 1,428 = 14^m,0.$$

Die Endgeschwindigkeit der horizontalen Bewegung ist so gross wie die Anfangsgeschwindigkeit:

$$w_y = u = 20^m.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper in dem Punkte B ankommt, ist die Resultirende von diesen beiden Geschwindigkeiten, also:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{14^2 + 20^2} = 24^m,4.$$

Den Winkel β, welchen die Richtung der Endgeschwindigkeit mit der Richtung der Schwere einschliesst, findet man aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_y}{w_x} = \frac{20}{14} = 1,43; \quad \beta = 55^0.$$

Der Gleichung für $\operatorname{tg} \beta$ kann man auch die Form geben:

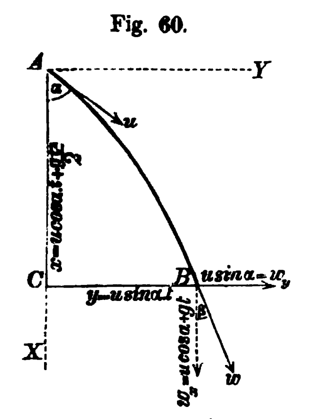
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{u}{gt} = \frac{ut}{2 \,.\, \frac{1}{2}gt^2} = \frac{y}{2x},$$

n welcher dieselbe zeigt, dass die Verticale des Anfangspunktes A von der im Endpunkte B an die Bahnlinie gelegten Tangente an einer Stelle geschnitten wird, welche in der Höhe x über dem Punkte A liegt.

Abwärts gerichteter Wurf.

Wenn der Winkel α, den die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit der Richtung der Schwere einschliesst, ein spitzer Winkel ist, so kann die Bewegung — wie im § 14 schon erklärt wurde — betrachtet werden als die Fortsetzung einer mit horizontaler Geschwindigkeit anfangenden Wurfbewegung. Die verticale Bewegung fängt hier statt mit der Geschwindigkeit Null gleich mit der Geschwindigkeit $c = u \cos \alpha$ an; die constante Horizontal-Geschwindigkeit ist $v = u \sin \alpha$. Nach Substitution dieser Werthe erhalten die allgemeinen Gleichungen die in Fig. 60 angegebenen Formen.

Fig. 60.



Wenn man die Anfangsgeschwindigkeit der in Fig. 60 dargestellten Bewegung beispielsweise gerade so gross und eben so gerichtet annimmt, wie die Endgeschwindigkeit der in Fig. 59 dargestellten Bewegung, also:

$$u = 24^m{,}4, \quad \alpha = 55^0,$$
$$c = 24{,}4 \,.\, \cos 55^0 = 14^m,$$
$$v = 24{,}4 \,.\, \sin 55^0 = 20^m,$$

so ist leicht zu erkennen, dass alsdann die Bewegung genau übereinstimmt mit derjenigen, welche in dem vorigen Falle von dem Körper ausgeführt worden wäre, wenn derselbe noch über den Endpunkt hinaus seine Bewegung fortgesetzt hätte. Die Bahnlinie ist also eine Parabel, deren Scheitelpunkt vom Anfangspunkte A aus gerechnet um 10^m höher und um $28^m{,}6$ weiter links liegt. Die horizontale Bewegung setzt sich mit der Geschwindigkeit 20^m weiter fort, und wird also z. B. nach drei Secunden der in horizontaler Richtung zurückgelegte Weg die Grösse haben:

$$BC = y = 20 \,.\, 3 = 60^m.$$

Die nach dieser Zeit in verticaler Richtung erlangte Geschwindigkeit beträgt:

$$w_x = 14 + 9{,}81 \,.\, 3 = 43^m{,}43$$

und die in verticaler Richtung zurückgelegte Wegelänge ist:

$$AC = x = 14 \,.\, 3 + \frac{9{,}81 \,.\, 3^2}{2} = 86^m{,}1.$$

Die Endgeschwindigkeit setzt sich aus den beiden Geschwindigkeiten 43,43 und 20 als Resultirende zusammen und beträgt:

$$w = \sqrt{43{,}43^2 + 20^2} = 47^m{,}8.$$

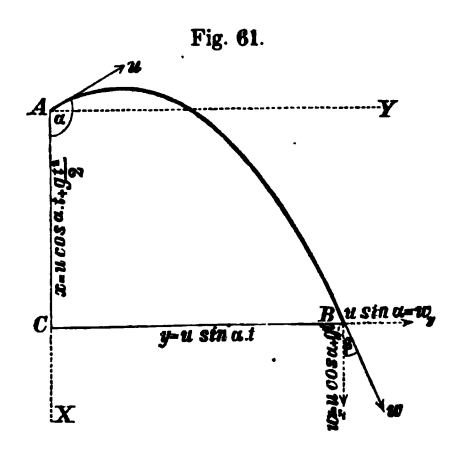
Die Richtung der Endgeschwindigkeit findet man aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{20}{43{,}43} = 0{,}46, \quad \beta = 25^0.$$

Aufwärts gerichteter Wurf.

Die allgemeinen Gleichungen der Wurfbewegungen bleiben auch dann noch gültig, wenn die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit einen stumpfen Winkel mit der Richtung der Schwere einschliesst, wobei $\cos \alpha$ und folglich auch $c = u \cos \alpha$ negative Werthe haben (Fig. 61). In diesem Falle werden auch die Grössen w_x und x im Anfange negative Werthe erhalten, und zwar w_x für alle Punkte des ansteigenden Theiles der Bahnlinie, x für alle Punkte der Bahnlinie, welche oberhalb der Horizontal-Ebene des Anfangspunktes liegen. Die negativen Vorzeichen bedeuten dann — wie leicht zu erkennen — dass die betreffenden Grössen der Richtung der Schwere entgegengesetzt, also vertical aufwärts gerichtet sind. Wenn die horizontale Seitengeschwindigkeit der Anfangsgeschwindigkeit gerade so gross ist, wie in den vorigen beiden Fällen, so ist die Bewegung so beschaffen, dass die in den vorigen beiden Fällen untersuchten Bewegungen als ihre Fortsetzungen gelten können.

Fig. 61.



Wenn z. B. $u = 24^m{,}4$ und $\alpha = 125^0$ gesetzt wird, so ist die horizontale Seitengeschwindigkeit:

$$v = 24{,}4 \,.\, \sin 125^0 = 20^m.$$

Die verticale Seitengeschwindigkeit ist im Anfange negativ, nämlich:

$$c = 24{,}4 \cos 125^0 = -14^m.$$

Die Zeit t, nach welcher der Körper an eine Stelle gelangt, die um $86^m{,}1$ tiefer liegt als der Anfangspunkt, findet man aus der Gleichung:

$$x = 86{,}1 = -14\,t + \frac{9{,}81\,t^2}{2},$$

deren Auflösung für t den Werth ergiebt:

$$t = 1{,}427 \pm \sqrt{19{,}6}.$$

Das doppelte Vorzeichen, zu welchem die Auflösusg der quadratischen Gleichung führt, ist hier in folgender Weise zu deuten. In der Parabel, welcher die Bahnlinie als Theil angehört, giebt es zwei Punkte, welche um $86^m{,}1$ tiefer liegen, als der Punkt A. Den einen von diesen beiden Punkten, nämlich B, wird der Körper wirklich erreichen nach einer Zeit, welche man erhält, wenn man in obiger Gleichung das Plus-Zeichen gelten lässt. Der andere Punkt B_1 ist von dem Punkte A aus gerechnet rückwärts gelegen. Betrachtet man also die vorliegende Bewegung als Fortsetzung einer in einem früheren Zeitpunkte begonnenen Bewegung, so giebt der negative Werth, den man für t erhält, wenn man das Minus-Zeichen gelten lässt, an, um wie weit rückwärts der Zeitpunkt liegt, in welchem der Körper durch diese Stelle B_1 hindurch ging. Für die vorliegende Aufgabe hat man also das Plus-Zeichen gelten zu lassen und erhält:

$$t = 1{,}427 + \sqrt{19{,}6} = 5{,}86 \text{ Secunden.}$$

Die Strecke CB, welche während dieser Zeit in horizontaler Richtung zurückgelegt wird, ist:

$$CB = y = 20 \,.\, 5{,}86 = 117^m.$$

In verticaler Richtung hat der Körper am Ende dieser Zeit die Geschwindigkeit erlangt:

$$w_x = -14 + 9{,}81 \,.\, 5{,}86 = 43^m{,}4.$$

Grösse und Richtung der resultirenden Endgeschwindigkeit findet man aus den Gleichungen:

$$w = \sqrt{43{,}4^2 + 20^2} = 47^m{,}8.$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{20}{43{,}4} = 0{,}46, \qquad \beta = 25^0.$$

Die Werthe von w und β stimmen also mit den im vorigen Zahlenbeispiele gefundenen Werthen überein.

Die verticale Seitengeschwindigkeit w_x ist anfangs negativ und wird später positiv. Die Zeit t_1, nach welcher dieselbe Null wird, die Bewegung also horizontale Richtung hat, findet man aus der Gleichung:

$$w_x = 0 = -14 + 9{,}81\, t_1\,; \qquad t_1 = \frac{14}{9{,}81} = 1{,}427 \text{ Secunden.}$$

Für die während dieser Zeit in verticaler und horizontaler Richtung zurückgelegten Wegeslängen ergeben sich die Gleichungen:

$$x = -14 \,.\, 1{,}427 + \frac{9{,}81 \,.\, 1{,}427^2}{2} = -10^m.$$

$$y = 20 \,.\, 1{,}427 = 28^m{,}54.$$

Die in verticaler Richtung zurückgelegte Wegeslänge x hat ebenfalls anfangs negative, später positive Werthe. Die Zeit t_2, nach welcher dieselbe gerade Null geworden ist, nach welcher also der geworfene Körper die Horizontal-Ebene des Anfangspunktes wieder erreicht, findet man aus der Gleichung:

$$x = 0 = -14\, t_2 + \frac{9{,}81\, t_2^2}{2}, \qquad t_2 = \frac{28}{9{,}81} = 2{,}854 \text{ Secunden.}$$

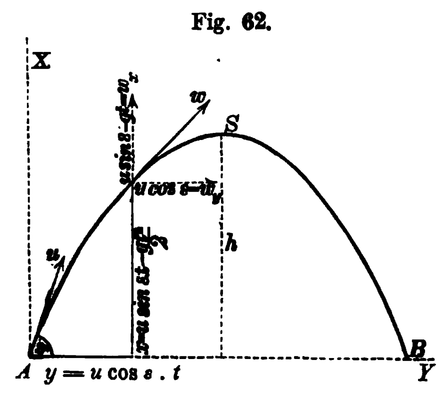
Die Zeit t_2 ist gerade doppelt so gross als t_1, folglich ist auch der in der Zeit t_2 zurückgelegte Horizontalweg y_2 doppelt so gross als y_1, nämlich:

$$y_2 = 57^m,1 \ldots$$

In den hier berechneten drei Zahlenbeispielen sind mit Absicht übereinstimmende Werthe für die constant bleibende horizontale Seitengeschwindigkeit w_y gewählt, um erkennen zu lassen, dass in diesem Falle es eine und dieselbe Parabel ist, welcher die Bahnlinien der drei berechneten Bewegungen als Theile angehören; dass also die Form der Parabel, von welcher die Wurflinie einen Theil bildet, nur von der Grösse der anfänglichen Horizontal-Geschwindigkeit abhängt. Nachdem der geworfene Körper bei der in Fig. 61 dargestellten Bewegung die höchste Stelle seiner Bahn (den Scheitelpunkt der Parabel) erreicht hat, stimmt die fernere Bewegung genau mit der in Fig. 59 dargestellten horizontalen Wufbewegung überein, und an diese schliesst wiederum die in Fig. 60 dargestellte abwärts gerichtete Wurfbewegung als Fortsetzung sich an.

Für den Fall, dass die Untersuchung auf den oberhalb der Horizontal-Ebene des Anfangspunktes liegenden Theil der Bahnlinie beschränkt werden soll, nehmen die Rechnungen eine etwas einfachere Gestalt an, wenn man die Richtnng von unten nach oben als die positive Vertical-Richtung wählt und zugleich statt des Winkels α nunmehr den Winkel, welchen die Anfangsgeschwindigkeit u mit der Horizontalen einschliesst, den sogenannten Elevations-Winkel ε in die allgemeinen Gleichungen einführt, welche alsdann die in Fig. 62 eingeschriebenen Formen annehmen.

Fig. 62.



Die Wurfhöhe h ist diejenige Grösse, welche x erreicht in dem Augenblicke, wo

$$w_x = u \sin \varepsilon - g t = 0$$

wird. Wenn man den aus dieser Gleichung für t sich ergebenden Werth in die Gleichung für x substituirt, so erhält man:

$$h = \frac{(u \sin \varepsilon)^2}{2g}.$$

Die Wurfweite $AB = l$ ist diejenige Grösse, welche y annimmt in dem Augenblicke, wo

$$x = u \sin \varepsilon \,.\, t - \frac{g t^2}{2} = 0$$

wird. Wenn man diese Gleichung für t auflöst und den gefundenen Werth (die Wurfzeit):

$$54)\quad t = \frac{2 u \sin \varepsilon}{g}$$

in der Gleichung für y substituirt, so erhält man für die Wurfweite auf horizontaler Ebene die allgemeine Gleichung:

$$55)\quad l = \frac{2 u^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{g} = \frac{u^2}{g} \sin (2\,\varepsilon),$$

aus welcher man erkennen kann, welchen Einfluss der Elevations-Winkel ε auf die Wurfweite hat.

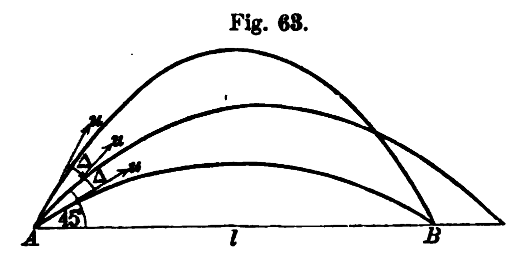
Die Grösse $\sin (2\,\varepsilon)$ kann niemals grösser werden als 1 und erreicht diesen grössten Werth, wenn $2\,\varepsilon = 90^0$, also: $\varepsilon = 45^0$ wird. Für das Maximum der mit einer bestimmten Wurfgeschwindigkeit u zu erreichenden Wurfweite ergiebt sich also der Werth:

$$l\,(\max) = \frac{u^2}{g},$$

welcher gerade doppelt so gross ist als die bei vertical aufwärts gerichtetem Wurfe erreichte Wurfhöhe.

Die Sinus-Zahlen zweier Winkel, die um gleiche Grössen von einem rechten Winkel abweichen, haben gleiche Werthe. Hieraus folgt, dass bei gleichen Anfangsgeschwindigkeiten eine und dieselbe Wurfweite erreicht wird, wenn der Elevations-Winkel das eine Mal $45^0 + \Delta$, dass andere Mal $45^0 - \Delta$ beträgt (Fig 63).

Fig. 63.



Wenn z. B. dem geworfenen Körper jedes Mal eine Anfangsgeschwindigkeit $u = 20^m$ ertheilt wurde, so erreicht derselbe bei einem Elevations-Winkel von 45^0 das Maximum der Wurfweite:

$$l_{\max} = \frac{20^2}{9{,}81} = 40^m{,}8.$$

Bei einem Elevations-Winkel $\varepsilon = 45^0 + 15^0 = 60^0$ dagegen beträgt die Wurfweite nur:

$$l = \frac{20^2}{9{,}81} \sin 120^0 = 35^m{,}3,$$

und ebenso gross ist auch die bei einem Elevations-Winkel $\varepsilon = 45^0 - 15^0 = 30^0$ erreichte Wurfweite:

$$l = \frac{20^2}{9{,}81} \sin 60^0 = 35^m{,}3.$$

Die allgemeinen Gleichungen der Wurfbewegung würden auch für die Bewegung einer aus einem Geschütze abgeschossenen Kugel gelten, wenn die Bewegung im luftleeren Raume geschähe. Denn von dem Augenblicke an, in welchem die Kugel das Geschützrohr verlässt, und der treibende Druck des Pulverdampfes aufgehört hat zu wirken, befindet sich die Kugel mit ihrer dadurch erlangten Geschwindigkeit genau in derselben Lage, wie ein geworfener Stein, welchem von der Hand des Werfenden eine solche Anfangsgeschwindigkeit mitgetheilt wurde. Eine in horizontaler Richtung abgeschossene Kanonenkugel würde im luftleeren Raume genau dieselbe verticale (Fall-) Bewegung ausführen, sie würde z. B. genau nach derselben Zeit die horizontale Bodenfläche erreichen, wie wenn sie von der Kanonenmündung frei herabfiele. Nur wird die Wirkung des Luftwiderstandes, welche unter sonst gleich bleibenden Umständen sehr rasch mit der Geschwindigkeit des bewegten Körpers wächst, bei so grossen Geschwindigkeiten, wie die von Kanonenkugeln, einen erheblich grösseren Einfluss auf die Bewegung ausüben. Lediglich aus diesem Grunde würde man bei der Berechnung der Flugbahn eines Geschosses keine so grosse Uebereinstimmung der aus jenen Gleichungen berechneten Zahlenwerthe mit den Beobachtungs-Resultaten mehr erwarten dürfen.

§ 26.

Gravitations-Gesetz.

Eine andere Beschränkung erleidet die allgemeine Anwendbarkeit jener Gleichungen durch den schon im § 18 angedeuteten Umstand, dass das Gewicht eines Körpers, welches bisher als eine constant wirkende Kraft angesehen wurde, streng genommen eine von der Höhe des Körpers über der Erdoberfläche abhängige, mit dieser Höhe veränderliche Kraft ist. Auf Körper, die in sehr grossen Höhen über der Erdoberfläche sich bewegen, wirkt die Schwerkraft in anderer Weise als auf Körper, die in der Nähe der Erdoberfläche sich bewegen; mit zunehmender Höhe nimmt das Gewicht mg eines Körpers und folglich auch die Grösse g allmählich ab. Das Gesetz, nach welchem diese Abnahme erfolgt, lässt sich ableiten aus einem allgemeineren Gesetze, welches nicht nur für die der Erde angehörigen Körper, sondern überhaupt für alle Körper im Universum — so weit unsere Beobachtungen reichen — gültig ist. Dieses Gesetz ist das von Newton entdeckte Gravitations-Gesetz oder Gesetz der allgemeinen Schwere:

Je zwei materielle Punkte wirken auf einander gegenseitig mit einer Anziehungskraft, welche dem Producte ihrer Massen und dem umgekehrten Quadrate ihrer Entfernung von einander proportional ist.

Wenn also k die Anziehungskraft ist, welche zwei materielle Punkte auf einander gegenseitig ausüben, deren jeder 1 Kil. Masse enthält und deren Entfernung von einander 1 Meter beträgt, so ist die Anziehungskraft zwischen zwei materiellen Punkten, deren Massen resp. m und M sind, bei einem Abstande von ϱ Metern:

$$56)\quad K = k \cdot \frac{m \,.\, M}{\varrho^2}.$$

Das Gewicht eines materiellen Punktes ist die Mittelkraft der Anziehungskräfte, welche von Seiten sämmtlicher materiellen Punkte des Erdkörpers auf denselben ausgeübt werden. Es lässt sich nachweisen, dass eine Kugel, deren Masse um den Mittelpunkt herum nach allen Richtungen in gleicher Weise vertheilt ist, auf einen ausserhalb gelegenen materiellen Punkt gerade so wirkt, wie wenn ihre ganze Masse in dem Mittelpunkte concentrirt wäre. Die Erde darf annähernd als eine solche Kugel angesehen werden. Ein Körper an der Oberfläche der Erde ist also anzusehen als in einer Entfernung gleich dem Erdhalbmesser von der im Mittelpunkte der Erde concentrirt gedachten Erdmasse befindlich. Wenn man daher in Gleichung 56) für M die Erdmasse E und für ϱ den Erdhalbmesser r setzt, so wird K gleich dem Gewichte der Masse m und man erhält die Gleichung:

$$57)\quad mg = k \cdot \frac{m \,.\, E}{r^2}, \quad \text{oder:} \quad g = k \cdot \frac{E}{r^2}.$$

Wenn mit mp das Gewicht bezeichnet wird, welches dieselbe Masse m haben würde, wenn man sie von der Erdoberfläche entfernte und in die Entfernung R von dem Erdmittelpunkte brächte, so ergiebt sich auf dieselbe Weise die Gleichung:

$$mp = k \cdot \frac{mE}{R^2}, \quad \text{oder:} \quad p = k \cdot \frac{E}{R^2}.$$

Wenn man die letztere Gleichung durch die Gleichung 57) dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{p}{g} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Die Länge des Erdhalbmessers beträgt ungefähr 6 370 000 Meter oder 860 Meilen und die Höhe der höchsten Berge über der Meeresoberfläche etwa

1 Meile. Auf dem Gipfel eines solchen Berges würde die Beschleunigung der Schwere nur die Grösse haben:

$$p = g \cdot \frac{r^2}{R^2} = 9{,}81 \cdot \frac{860^2}{861^2} = 9^m{,}787,$$

also um etwa 23 Millimeter geringer sein als an der Meeresoberfläche.

Die Entfernung des Mondes von der Erde beträgt etwa das 60-fache des Erdhalbmessers; in dieser Entfernung hat die Beschleunigung der Schwere nur die Grösse:

$$p = g \cdot \frac{r^2}{60^2 r^2} = \frac{9{,}81}{3600} = 0^m{,}0027.$$

Wenn also der Mond keine sonstige Bewegung hätte, so würde derselbe in der Richtung nach dem Erdmittelpunkte hin sich bewegen, und die Geschwindigkeit dieser Bewegung würde anfangs um 2,7 Millimeter in jeder Secunde zunehmen.

Wenn man in der Gleichung 57) statt der Grössen E und r resp. die Masse M und den Halbmesser R irgend eines anderen kugelförmigen Weltkörpers substituirt, so erhält man — unter Voraussetzung der erwähnten Art der Massenvertheilung — für die Beschleunigung des freien Falles an der Oberfläche dieses Weltkörpers die Gleichung:

$$p = k \frac{M}{R^2},$$

welche durch Gleichung 57) dividirt die Form annimmt:

$$\frac{p}{g} = \frac{M}{E} \cdot \frac{r^2}{R^2}.$$

Die Masse der Sonne ist ungefähr das 320 000-fache der Erdmasse, und der Halbmesser der Sonne ungefähr das 108-fache des Erdhalbmessers; hiernach würde die Beschleunigung des freien Falles an der Sonnenoberfläche die Grösse haben:

$$p = g \cdot \frac{320\,000}{108^2} = 9{,}81 \,.\, 27{,}4 = 269^m.$$

Die Masse des Mondes beträgt ungefähr $\frac{E}{80}$, und der Halbmesser desselben etwa $0{,}273 \,.\, r$. Die Beschleunigung also, mit welcher an der Mondoberfläche ein Körper fallen würde, betrüge hiernach:

$$p = \frac{g}{80 \,.\, 0{,}273^2} = \frac{9{,}81}{5{,}962} = 1^m{,}64.$$

Wenn man den Werth der Grösse K in Gleichung 56) durch directe Messung bestimmt, indem man zwei bekannte Massen m und M in eine bekannte Entfernung ϱ von einander bringt und die Grösse der von den beiden Massen auf einander ausgeübten Anziehungskraft beobachtet, so kann man diese Gleichung benutzen, um die Grösse der Erdmasse E daraus zu berechnen. Wenn man nämlich die bekannte Kraft, mit welcher die Masse m

in der bekannten Entfernung r von der unbekannten Erdmasse E angezogen wird — also das was im gewöhnlichen Leben das Gewicht der Masse m genannt wird — mit q bezeichnet, so erhält man nach Substitution dieser Werthe die Gleichung:

$$q = k\frac{mE}{r^2},$$

welche durch Gleichung 56) dividirt die Form annimmt:

$$\frac{q}{K} = \frac{E}{M}\frac{\varrho^2}{r^2}, \quad \text{oder:} \quad E = M \cdot \frac{q}{K}\frac{r^2}{\varrho^2}.$$

Auf solche Weise hat man in der That die Masse der Erde gemessen und gefunden, dass ungefähr:

$$E = 6{,}1 \,.\, 10^{24} \text{ Kil.},$$

oder dass 1 Cubikmeter des Erdkörpers durchschnittlich etwa 5675 Kilogramm Masse enthält.

Wenn man die Gleichung 57) für k auflöst, so ergiebt sich für die Kraft, mit welcher 1 Kilogramm Masse ein anderes Kilogramm Masse in 1 Meter Entfernung anzieht, der Werth:

$$k = g \cdot \frac{r^2}{E},$$

oder, wenn man für die Grössen g, r, E die nunmehr sämmtlich bekannten Werthe substituirt:

$$k = 9{,}81 \cdot \frac{6\,370\,000^2}{6{,}1 \,.\, 10^{24}} = \frac{65}{10^{12}}.$$

Dieser Werth bedarf zwar (ebenso wie die übrigen aus der Annahme: $g = 9^m{,}81$ berechneten Zahlenwerthe) noch einer kleinen Correction, weil — wie sich später ergeben wird — die Wirkung der Schwere durch die Umdrehung der Erde um ihre Achse etwas modificirt wird; indessen zeigt derselbe doch, dass die Kräfte, mit welchen die an der Oberfläche der Erde befindlichen Körper bei messbaren Abständen einander gegenseitig anziehen, in den meisten Fällen gegen die Gewichte der Körper und sonstige wirkende Kräfte als verschwindend klein angesehen werden dürfen.

§ 27.

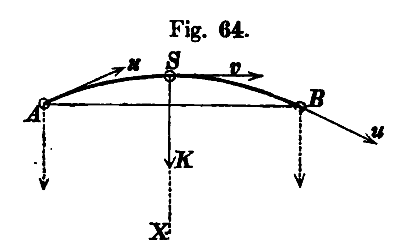
Gleichförmige Kreisbewegung.

(Centripetal-Kraft.)

Eine constant wirkende Kraft bringt bei einem schon in Bewegung begriffenen materiellen Punkte — wie in § 24 und § 25 schon gezeigt wurde — allemal eine parabolische Bewegung

hervor. Wenn man von einer solchen parabolischen Bewegung nur das den Scheitelpunkt enthaltende und durch diesen in zwei symmetrische Hälften getheilte sehr kleine Stück AB der Bahnlinie ins Auge fasst (Fig. 64), so erkennt man, dass der Winkel zwischen Bewegungsrichtung und Kraftrichtung nur wenig von einem rechten Winkel abweicht während der ganzen Bewegungsdauer. Für den Scheitelpunkt S ist dieser Winkel genau gleich einem rechten Winkel, für den Anfangspunkt A etwas grösser und für den Endpunkt B um eben so viel kleiner als ein rechter Winkel. Die Geschwindigkeit der Bewegung erreicht in dem Scheitelpunkte S ihren kleinsten Werth v; in den beiden Punkten A und B hat die Geschwindigkeit gleiche Werthe u. Die von der Kraft K während der ganzen Bewegungsdauer hervorgebrachte Geschwindigkeitsänderung hat die Grösse Null.

Fig. 64.



Wenn p die dem materiellen Punkte von der Kraft K ertheilte Beschleunigung, und r der Krümmungshalbmesser der Parabel im Scheitelpunkte ist, so gilt für die Beziehungen zwischen den drei Grössen v, p, r die im § 15 gefundene Gleichung 38):

$$p = \frac{v^2}{r}.$$

Ausserdem ist, wenn mit m wieder die Masse des materiellen Punktes bezeichnet wird, nach Gleichung 39):

$$p = \frac{K}{m}.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe erhält man für die Kraft K die Gleichung:

$$58) \quad K = m\frac{v^2}{r}.$$

Hierin bedeutet K diejenige Grösse, welche die constant wirkende Kraft haben muss, um die Bahnlinie der entstehenden parabolischen Bewegung so zu krümmen, dass im Scheitelpunkte — also da, wo Bewegungsrichtung und Kraftrichtung rechtwinkelig zu einander stehen, und wo die Geschwindigkeit die Grösse v hat — der Krümmungshalbmesser gleich r werde. Links von dem

Scheitelpunkte ist die Geschwindigkeit im Abnehmen, rechts von demselben im Zunehmen begriffen; in dem Scheitelpunkte selbst geht das Abnehmen in das Zunehmen über, findet also weder Abnehmen noch Zunehmen statt. In dem Augenblicke also, wo Bewegungsrichtung und Kraftrichtung rechtwinkelig zu einander gerichtet sind, wirkt die Kraft nur auf die Richtung, nicht aber auf die Grösse der Geschwindigkeit verändernd ein. Die Gleichung 58) drückt die Beziehungen aus zwischen der Grösse der Kraft und der Grösse der Richtungsänderung oder Krümmung der Bahnlinie.

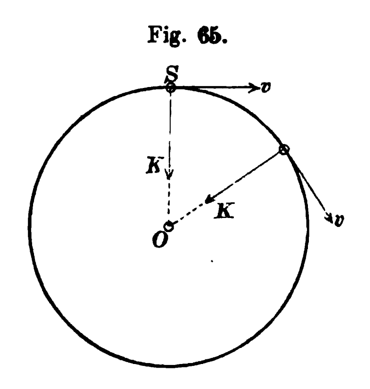
Denkt man sich einen materiellen Punkt von der Masse m mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit v, und untersucht man, welche Richtung und Grösse eine auf ihn wirkende Kraft K haben müsse, wenn dieselbe 1) im ersten Augenblicke nur auf die Richtung, nicht aber auf die Grösse der Geschwindigkeit verändernd einwirken soll, und wenn 2) die Richtungsänderung im ersten Augenblicke gerade so erfolgen soll wie bei einer Kreislinie vom Halbmesser r; so ergeben sich aus dem Vorstehenden die beiden Bedingungen: die wirkende Kraft muss erstens: rechtwinkelig zu der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gerichtet sein, und sie muss zweitens: die in Gleichung 58) angegebene Grösse haben.

Soll nun nicht blos im ersten Augenblicke, sondern auch in allen folgenden Zeitpunkten die Bewegung des materiellen Punktes stets auf die gleiche eben angegebene Weise abgeändert werden, so müssen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein: Erstens, damit stets nur die Richtung und niemals die Grösse der Geschwindigkeit verändert werde, muss die Kraft auch in allen folgenden Zeitpunkten rechtwinkelig zu der Richtung der Geschwindigkeit gerichtet sein, sie muss also ihre Richtung stetig ändern und zwar in der Weise, dass der Winkel zwischen ihr und der Geschwindigkeitsrichtung stets so gross bleibt wie im Anfange, nämlich ein rechter Winkel. Zweitens, damit die Krümmung der Bahnlinie auch an allen folgenden Stellen dieselbe Grösse erhalte wie an der Anfangsstelle, muss die Kraft stets dieselbe Grösse und zwar die in Gleichung 58) angegebene Grösse behalten.

Eine ebene Linie, die an allen Stellen gleiche Krümmung hat, ist eine Kreislinie. Wenn also die Kraft bei ihrer Richtungsänderung immer in derselben Ebene bleibt, so wird die Bahn eine

Kreislinie vom Halbmesser r (Fig. 65). Der materielle Punkt durchläuft diese Kreislinie mit der constanten Geschwindigkeit v.

Fig. 65.



Die wirkende Kraft K ist an allen Stellen rechtwinkelig zu der Kreislinie, also nach dem Mittelpunkte O des Kreises hin, gerichtet und wird aus diesem Grunde **Centripetal-Kraft** genannt.

Eine solche gleichförmige Kreis-Bewegung kann z. B. auf folgende Weise hervorgebracht werden. Das eine Ende eines geradlinig ausgestreckten Fadens soll an einem festen Punkte O, das andere Ende desselben an einer Kugel befestigt sein. Wenn man dieser Kugel eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit ertheilt rechtwinkelig zur Richtung des Fadens — die Wirkung der Schwere soll dabei als ausgeschlossen oder aufgehoben angenommen werden — so wird die Kugel durch den Faden verhindert, sich von dem festen Punkte O zu entfernen, also gezwungen, bei ihrer Bewegung stets in gleicher Entfernung von dem festen Punkte zu bleiben. Sie beschreibt also eine Kreislinie und zwar in gleichförmiger Bewegung. Wenn die Masse der Kugel $m = 2$ Kil., die ihr mitgetheilte Geschwindigkeit $v = 10^m$, die Länge des Fadens $r = 4^m$ ist, so ergiebt sich für die in diesem Falle auf die Kugel wirkende Kraft aus Gleichung 58) der Werth:

$$K = \frac{2 \cdot 10^2}{4} = 50.$$

Diese Kraft wird von dem Faden auf die Kugel ausgeübt und wirkt beständig in der Richtung nach dem festen Punkte O hin. Nach dem in § 20 erklärten Gesetze der Wechselwirkung ist die von der Kugel auf den Faden ausgeübte Gegenkraft genau eben so gross und von entgegengesetzter Richtung. Diese letztere (auf den Faden wirkende und durch denselben auf den festen Punkt O übertragene) Kraft wirkt also in der Richtung des Fadens nach **aussen** und wird **Centrifugal-Kraft** genannt. Der Faden wird also durch die Kraft K gespannt. Wenn man diese Kraft in Gewichtseinheiten ausdrücken will, so hat man nach § 18 die oben gefundene Zahl durch $g = 9{,}81$ zu dividiren; es ist also:

$$K(\text{kil.}) = \frac{50}{9{,}81} \text{ kil.} = 5{,}1 \text{ kil.}$$

Der Faden wird also bei jener Bewegung genau ebenso gespannt, als wäre derselbe an einem festen Punkte befestigt, und an seinem unteren Ende ein Gewicht von 5,1 Kilogrammen aufgehängt. Sobald man den Faden durchschnitte, würde sofort die Kraft aufhören zu wirken; die Bewegungsrichtung würde ferner nicht mehr abgeändert. Die Kugel würde also in der Richtung der Tangente geradlinig und gleichförmig sich weiter bewegen.

Der Mond beschreibt bei seiner Bewegung um die Erde eine Bahnlinie, welche annähernd als eine Kreislinie angesehen werden kann, deren Mittel-

punkt mit dem Erdmittelpunkte zusammenfällt. Der Halbmesser dieses Kreises ist ungefähr das 60-fache des Erdhalbmessers, also:

$$r = 60 \,.\, 6\,370\,000 = 382\,000\,000^{\mathrm{m}},$$

und der Umfang desselben:

$$2 r \pi = 2 \,.\, 382\,000\,000 \,.\, 3{,}14 = 2\,400\,000\,000^{\mathrm{m}}.$$

Die Zeit, in welcher der Mond diese Kreislinie durchläuft, beträgt 27 Tage 7 Stunden 43 Minuten 11 Secunden oder in runder Summe 2 360 000 Secunden. Der in einer Secunde zurückgelegte Weg oder die Geschwindigkeit der Mondbewegung beträgt demnach:

$$v = \frac{2\,400\,000\,000}{2\,360\,000} = 1020^{\mathrm{m}}.$$

Hiernach ergiebt sich für die nach dem Erdmittelpunkte gerichtete Centripetal-Beschleunigung des Mondes aus Gleichung 38) der Werth:

$$p = \frac{v^2}{r} = \frac{1020^2}{382\,000\,000} = 0^{\mathrm{m}}{,}0027.$$

Die Uebereinstimmung dieser Zahl mit dem im vorigen Paragraphen für die Fallbeschleunigung des Mondes gefundenen Zahlenwerthe zeigt, dass die aus dem Gravitations-Gesetze berechnete Anziehungskraft zwischen Erde und Mond gerade diejenige Grösse hat, welche zur Erklärung der Mondbewegung angenommen werden muss. Diese Kraft wirkt auf dieselbe Weise wie bei dem vorigen Beispiele die Spannung des Fadens. Denkt man sich die Anziehungskraft als nicht vorhanden und statt dessen den Mond mittelst eines unzerreissbaren Fadens mit dem fest gedachten Erdmittelpunkte verbunden, so würde, wenn m die Masse des Mondes genannt wird, dieser Faden die Spannung annehmen:

$$K = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \,.\, 0{,}0027.$$

Auf gleiche Weise würde man die nach dem Sonnenmittelpunkte gerichtete Centripetal-Beschleunigung der Erde berechnen können und für dieselbe den Werth finden:

$$q = 0^{\mathrm{m}}{,}0059.$$

Wenn mit r der Mondbahnhalbmesser, mit R der Erdbahnhalbmesser, mit E die Erdmasse, mit S die Sonnenmasse bezeichnet wird, so ergiebt sich nach dem Gravitations-Gesetze die Gleichung:

$$\frac{mp}{mq} = \frac{k\left(\frac{mE}{r^2}\right)}{k\left(\frac{mS}{R^2}\right)}, \quad \text{oder:} \quad \frac{S}{E} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{q}{p},$$

welche man zur Berechnung der Sonnenmasse benutzen kann. Setzt man in dieser Gleichung $\frac{q}{p} = \frac{0{,}0059}{0{,}0027}$ und $\frac{R}{r} = 382$, so erhält man: $\frac{S}{E} = 320\,000$.

Für zwei verschiedene Planeten, welche beide in kreisförmigen Bahnen um die Sonne sich bewegen, ergiebt sich als Verhältniss ihrer Centripetal-Beschleunigungen:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{\left(\frac{v_1^2}{r_1}\right)}{\left(\frac{v^2}{r}\right)}.$$

Nach dem Gravitations-Gesetze ist zugleich $\frac{p_1}{p} = \frac{r^2}{r_1^2}$. Man erhält also durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe die Gleichung:

$$\frac{v}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r}}.$$

Wenn die Umlaufszeiten dieser beiden Planeten resp. mit t_1 und t bezeichnet werden, so ist:

$$\frac{v_1 t_1}{v t} = \frac{2 r_1 \pi}{2 r \pi}, \quad \text{oder:} \quad \frac{t_1}{t} = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{v}{v_1},$$

und man erhält nach Substitution des oben für $\frac{v}{v_1}$ gefundenen Werthes die Gleichung:

$$\frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{r_1^3}{r^3}},$$

welche ausdrückt: dass die Quadrate der Umlaufszeiten sich verhalten wie die dritten Potenzen der Bahnhalbmesser.

Die Anwendung dieser Gleichung auf die beiden Planeten „Neptun“ und „Erde“, für welche das Verhältniss $\frac{r_1}{r} = 30$ gesetzt werden kann, führt zu dem Werthe:

$$\frac{t_1}{t} = \sqrt{30^3} = 164,$$

ergiebt also für den Planeten Neptun eine Umlaufszeit von 164 Jahren.

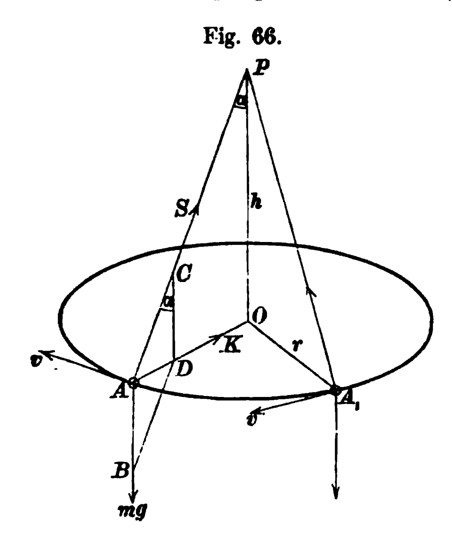
Eine gleichförmige Kreisbewegung kann auch durch Zusammenwirken mehrerer Kräfte hervorgebracht werden, sobald nur die Mittelkraft aller dieser Kräfte die oben gefundenen Eigenschaften der Centripetal-Kraft besitzt.

Wenn ein materieller Punkt, der eine horizontal gerichtete Anfangsgeschwindigkeit v besitzt, und auf welchen ausser seinem Gewichte mg noch eine zweite Kraft S wirkt, eine horizontale Kreislinie vom Halbmesser r gleichförmig durchlaufen soll, so muss diese zweite Kraft S so beschaffen sein: erstens, dass die Mittelkraft K von den beiden Kräften mg und S stets die in Gleichung 58) angegebene Grösse hat; zweitens, dass die Richtung dieser Mittelkraft K rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung stehend beständig durch den Mittelpunkt O jenes Kreises hindurchgeht (Fig. 66). Wenn man also ein Parallelogramm $ABDC$ construirt, dessen Diagonale $\overline{AD} = K$ und dessen verticale Seite $\overline{AB} = mg$ ist, so stellt die Seite $\overline{AC}$ dieses Parallelogramms ihrer Grösse und Richtung nach die gesuchte Kraft S für denjenigen Zeitpunkt dar, in welchem der materielle Punkt an der Stelle A sich befindet.

Für jede andere Stelle der Kreislinie, z. B. den Punkt A_1, würde die Kraft S ihrer Richtung und Grösse nach durch die

gleiche Construction zu bestimmen sein. Da die Kraft mg constant ist, so ergiebt sich auf diese Weise, dass die Kraft S während der Bewegung stets einen und denselben Winkel α mit der verticalen Achse des Kreises einschliessen, ihre Richtungslinie folglich beständig durch einen und denselben Punkt P derselben hindurch gehen muss. Die Grösse des Winkels α lässt sich bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 66.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{K}{mg},$$

welche, wenn darin für K der Werth aus Gleichung 58) substituirt wird, die Form annimmt:

$$59)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{rg}.$$

Wenn man hierin $\frac{r}{h}$ statt $\operatorname{tg}\alpha$ setzt und die Gleichung dann für h auflöst, so erhält man für die Höhe des Punktes P über der Kreisebene die Gleichung:

$$60)\quad h = g\,\frac{r^2}{v^2}.$$

Die Grösse, welche die Kraft S beständig haben muss, würde man ferner aus der Gleichung bestimmen können:

$$61)\quad S = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{r}\right)^2} = m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}.$$

Die Zeit t, in welcher der materielle Punkt einen Umlauf ausführt, findet man, indem man den ganzen Umfang des Kreises $2r\pi$ dividirt durch den in einer Secunde zurückgelegten Weg v; es ist also:

$$t = 2\pi\,\frac{r}{v},$$

oder, wenn man für $\frac{r}{v}$ aus Gleichung 60) seinen Werth $\sqrt{\frac{h}{g}}$ substituirt:

$$62)\quad t = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Eine solche horizontale gleichförmige Kreisbewegung kann z. B. auf folgende Weise entstehen. Das eine Ende eines geradlinig ausgestreckten Fadens soll an einer Kugel, das andere Ende an einem festen Punkte P befestigt sein. Wenn man den Faden in irgend eine Richtung PA (Fig. 66) als Anfangsrichtung bringt und hierauf der Kugel eine Anfangsgeschwindigkeit v mittheilt, welche ihrer Richtung nach rechtwinkelig zu der Vertical-Ebene PAO steht und ihrer Grösse nach den aus Gleichung 60) zu entnehmenden Werth:

$$v = r\sqrt{\frac{g}{h}}$$

hat, so wird die Kugel eine horizontale gleichförmige Kreisbewegung um den Punkt O als Mittelpunkt ausführen, und der Faden dabei eine Kegelfläche beschreiben, deren Spitze in P liegt. Eine solche Vorrichtung wird ein Centrifugal-Pendel genannt. Wenn bei der Anfangsstellung des Fadens $h = 5^m$ und $r = 2^m$ war, so musste die Anfangsgeschwindigkeit die Grösse haben:

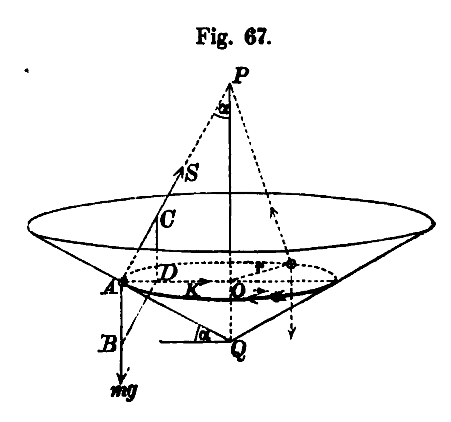
$$v = 2\sqrt{\frac{9{,}81}{5}} = 2^m{,}8.$$

Aus Gleichung 62) ist zu erkennen, dass die Umlaufszeit eines solchen Centrifugal-Pendels nur von der Höhe des Punktes P über der horizontalen Bahn-Ebene abhängt. Alle Centrifugal-Pendel also, bei denen wie im vorliegenden Falle diese Höhe 5^m beträgt, haben eine und dieselbe Umlaufszeit, nämlich:

$$t = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, \sqrt{\frac{5}{9{,}81}} = 4{,}48 \text{ Secunden.}$$

Die Kraft S, welche bei der eben beschriebenen Vorrichtung durch den Faden auf den materiellen Punkt übertragen wurde, kann auch auf andere Weise hervorgebracht werden. Denkt man sich den Faden PA durchschnitten und statt dessen die Kugel an allen Stellen der Bahnlinie unterstützt durch eine feste Unterlage, deren Oberfläche überall rechtwinkelig zur Richtung des Fadens steht, so wird der Gegendruck dieser festen Fläche dieselbe Wirkung hervorbringen, welche vorher durch die Spannung des Fadens ausgeübt wurde. Diese feste Fläche muss die Form einer Kegelfläche haben, deren Spitze in dem Punkte Q liegt, und deren Seitenlinien überall rechtwinkelig stehen zu den Seitenlinien der von dem Faden beschriebenen Kegelfläche, folglich mit der Horizontalen denselben Winkel α einschliessen, um welchen die Richtung des Fadens gegen die Verticale geneigt war (Fig. 67).

Fig. 67.



Die Gleichung 59) kann daher benutzt werden, um z. B. bei einer Eisenbahncurve den Winkel α zu bestimmen, um welchen die Schwellen gegen die Horizontale geneigt werden müssen, wenn die Rad-Flanschen des Wagens weder

nach aussen noch nach innen hin einen Seitendruck gegen die Schienen ausüben sollen. Wenn der Krümmungshalbmesser der Curve $r = 500^m$ und die Geschwindigkeit, mit welcher der Wagen die Curve durchlaufen soll, $v = 15^m$ beträgt, so ergiebt sich für diesen Neigungswinkel die Gleichung:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{15^2}{500 \,.\, 9{,}81} = 0{,}04587; \quad \alpha = 2^0\,38'.$$

Wenn mit b die Entfernung der Schienen von Mitte zu Mitte gerechnet bezeichnet wird, so ist $b \sin \alpha$ die Grösse, um welche die aussen liegende Schiene gegen die innen liegende überhöhet werden muss.

Man kann der Gleichung für die Centripetal-Kraft noch eine andere Form geben dadurch, dass man die Geschwindigkeit v des materiellen Punktes ausdrückt durch die Geschwindigkeit, mit welcher der zugehörige Halbmesser des Kreises um den Mittelpunkt desselben sich dreht. Während der materielle Punkt den Umfang des Kreises gleichförmig durchläuft, führt der Drehungshalbmesser, d. h. die gerade Linie, welche denselben mit dem Mittelpunkte verbindet, eine gleichförmige Drehbewegung aus.

Die Bogenlänge, welche der Endpunkt des Halbmessers in jeder Secunde durchläuft, wird die Bogen-Geschwindigkeit oder Peripherie-Geschwindigkeit genannt.

Der Winkel, um welchen der Halbmesser in jeder Secunde sich dreht, wird die Winkel-Geschwindigkeit oder Dreh-Geschwindigkeit desselben genannt.

Um die Grösse dieser Winkel-Geschwindigkeit durch eine Zahl auszudrücken, muss zuvor eine bestimmte Winkel-Grösse festgesetzt werden, welche als Winkel-Einheit gelten soll. Am einfachsten gestalten sich die Beziehungen zwischen Bogen-Geschwindigkeit und Winkel-Geschwindigkeit, wenn man als Winkel-Einheit denjenigen (zwischen 57° und 58° liegenden) Winkel wählt, dessen Bogen allemal gleich dem zugehörigen Halbmesser ist (wie das im Folgenden immer geschehen soll, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird). Da die Winkel sich verhalten wie die Bogen, welche mit gleichem Halbmesser in denselben beschrieben sind, so wird für einen Winkel, in welchem der Bogen das n-fache des zugehörigen Halbmessers beträgt, alsdann diese Zahl n unmittelbar die zugehörige Winkelzahl bilden, d. h. es ist allemal:

$$\text{Winkelzahl} = \frac{\text{Bogen}}{\text{Halbmesser}}.$$

Die Grösse v in der Gleichung für die Centripetal-Kraft bedeutete die Bogenlänge, welche der materielle Punkt in jeder Secunde durchläuft, oder die Bogen-Geschwindigkeit. Der Winkel ω,

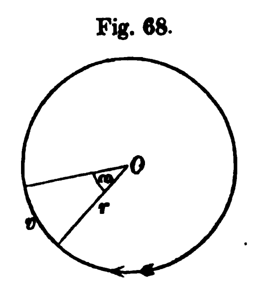


Fig. 68.

welcher zu diesem Bogen gehört, ist derjenige Winkel, um welchen der Halbmesser in jeder Secunde sich dreht, also die zugehörige Winkel-Geschwindigkeit (Fig. 68).

Zwischen den drei Grössen v, ω, r findet demnach die Beziehung statt:

$$63)\quad \omega = \frac{v}{r},$$

oder in Worten ausgedrückt:

$$\text{Winkel-Geschwindigkeit} = \frac{\text{Bogen-Geschwindigkeit}}{\text{Halbmesser.}}.$$

Wenn man den aus dieser Gleichung sich ergebenden Werth $v = r\omega$ in Gleichung 58) substituirt, so erhält man für die Centripetal-Kraft die Gleichung:

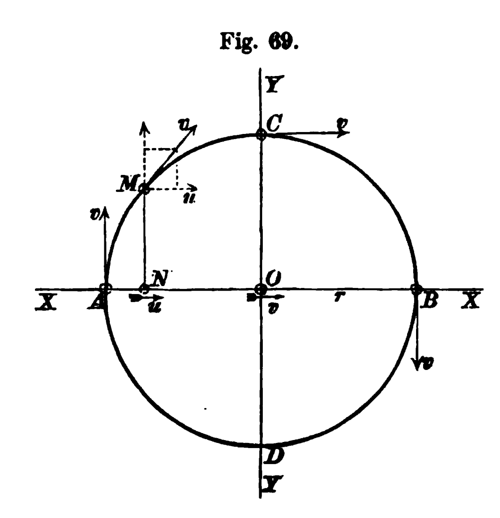
$$64)\quad K = m r \omega^2.$$

§ 28.

Geradlinige Schwingungen.

Die im vorigen Paragraphen erklärte gleichförmige Kreisbewegung lässt sich noch von einem anderen Gesichtspunkte aus untersuchen. Man kann dieselbe nämlich — indem man die Principien der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen anwendet — auch auffassen als Resultirende von zwei rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitenbewegungen in den Richtungen XX und YY (Fig. 69). Der Kürze wegen soll XX die horizontale, YY die verticale Richtung genannt werden. Man kann sich in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit sowohl als auch die wirkende Kraft nach diesen beiden Richtungen zerlegt denken und nun jede von den beiden

Fig. 69.



Seitenbewegungen für sich allein zum Gegenstande einer besonderen Untersuchung machen.

Es soll untersucht werden: wie die in dem Punkte A beginnende Bewegung beschaffen gewesen sein würde, wenn die verticale Seiten-Geschwindigkeit sowohl wie die verticale Seitenkraft der Centripetal-Kraft von Anfang an gefehlt hätten. Offenbar würde der materielle Punkt in diesem Falle nur die horizontale Seitenbewegung jener gleichförmigen Kreisbewegung ausgeführt haben, und zwar — nach dem Gesetze der Unabhängigkeit der Bewegungen — genau in derselben Weise, wie sie bei der wirklichen Bewegung erfolgte. Denn die verticale Seiten-Geschwindigkeit wird nur durch die verticale Seitenkraft geändert, und die horizontale Seiten-Geschwindigkeit nur durch die horizontale Seitenkraft.

Anstatt den Bogen AM gleichförmig zu durchlaufen, würde der materielle Punkt nunmehr die geradlinige Strecke AN in derselben Zeit zurücklegen; anstatt den halben Kreisumfang ACB gleichförmig zu durchlaufen, würde der Punkt nunmehr in derselben Zeit den horizontalen Durchmesser AB durchlaufen. Indem man die Peripherie-Geschwindigkeit v an den verschiedenen Stellen zerlegt, findet man, dass die Geschwindigkeit dieser Horizontal-Bewegung in dem Punkte A (wo v rechtwinkelig zur Horizontalen gerichtet ist) mit Null anfangen, in dem Punkte N die Grösse u, in dem Punkte O die Grösse v, in dem Punkte B wiederum die Grösse Null erreichen würde. Hierauf würde die Geschwindigkeit negativ werden, d. h. der Punkt würde umkehren, den horizontalen Durchmesser in gleicher Weise rückwärts durchlaufen und in dem Punkte A angekommen alsdann die gleiche Bewegung aufs Neue beginnen.

Solche geradlinig hin- und zurücklaufende Bewegungen, bei welchen periodisch dieselben Bewegungszustände wiederkehren, nennt man Schwingungen. Die Schwingungsdauer, d. h. die während einmaligen Durchlaufens der Schwingungsbahn verfliessende Zeit, ist gleich der halben Umlaufszeit der zugehörigen Kreisbewegung, hat also die Grösse:

$$65)\quad t = \frac{r\pi}{v}.$$

In dieser Gleichung bedeutet v die constante Peripherie-Geschwindigkeit der zugehörigen Kreisbewegung, zugleich aber auch die Maximal-Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung,

nämlich diejenige Geschwindigkeit, welche der schwingende Punkt allemal in der Mitte seiner Bahn erreicht.

Wenn man den aus Gleichung 58) sich ergebenden Werth:

$$v = \sqrt{\frac{Kr}{m}}$$

für diese Grösse substituirt, so nimmt die vorige Gleichung die Form an:

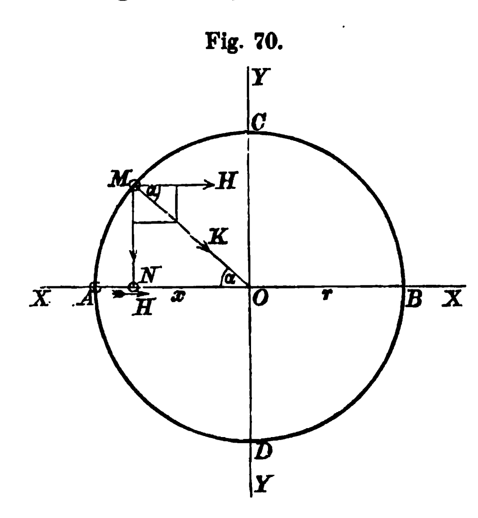
$$66) \quad t = \pi \sqrt{\frac{mr}{K}}.$$

In dieser Gleichung bedeutet K die Centripetal-Kraft der correspondirenden Kreisbewegung. Um die Bedeutung dieser Grösse für die schwingende Bewegung zu erkennen, hat man sich bei der gleichförmigen Kreisbewegung — in derselben Weise, wie vorher die Geschwindigkeit — so auch die wirkende Kraft nunmehr an jeder Stelle nach horizontaler und verticaler Richtung zerlegt zu denken. Für die Stelle M ergiebt sich aus Fig. 70 als horizontale Seitenkraft:

$$67) \quad H = K \cos \alpha = K \frac{x}{r}.$$

Diese Kraft ist es, welche den schwingenden Punkt treibt in dem Augenblicke, wo seine Entfernung von dem Schwingungscentrum gleich x ist. Die Kraft H ändert sich mit der Entfernung x, sie wird Null, wenn $x = 0$ wird, d. h. wenn der schwingende Punkt durch den Mittelpunkt seiner Bahn hindurchgeht; sie erreicht ihren grössten absoluten Werth:

Fig. 70.



$$H_m = \pm K,$$

wenn $x = \pm r$ wird, d. h. wenn der schwingende Punkt an den Endpunkten der Schwingungsbahn sich befindet, sie ist positiv oder negativ — d. h. sie wirkt nach rechts oder links — jenachdem der schwingende Punkt links oder rechts von der Mitte seiner

Bahn sich befindet; sie ist ferner proportional der Grösse x, weil der Quotient $\frac{K}{r}$ in Gleichung 67) eine unveränderliche Grösse ist.

Hieraus ergiebt sich, dass jene schwingende Bewegung stattfinden wird, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Erstens, die treibende Kraft muss proportional dem Abstande von dem festen Punkte O zunehmen.

Zweitens, sie muss beständig nach diesem festen Punkte hin wirken.

Drittens, die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes — falls eine solche überhaupt vorhanden war — muss in die Richtung der geraden Linie fallen, welche den Anfangspunkt mit jenem festen Punkte verbindet.

Wenn man den Quotienten $\frac{K}{r}$ mit A bezeichnet, so nehmen die Gleichungen 67) und 66) die Formen an:

$$68)\quad H = Ax,$$

$$69)\quad t = \pi\sqrt{\frac{m}{A}}.$$

Man erkennt aus Gleichung 68), dass A die Grösse ist, welche die treibende Kraft H erreicht, wenn $x = 1$ wird. Der Quotient $\frac{A}{m}$ ist also die in diesem Augenblicke stattfindende Beschleunigung. Bezeichnet man diese Beschleunigung mit q, so nimmt die Gleichung 69) die noch einfachere Form an:

$$70)\quad t = \frac{\pi}{\sqrt{q}}.$$

Das in dieser Gleichung enthaltene Gesetz lässt sich in folgenden Worten aussprechen:

Die Schwingungsdauer ist gleich der Zahl π dividirt durch die Quadratwurzel aus der Schwingungs-Beschleunigung in der Entfernung Eins vom Schwingungscentrum.

Zugleich erkennt man aus dieser Gleichung, dass unter sonst gleichen Umständen die Schwingungsdauer ganz unabhängig ist von der Schwingungsweite.

Die Geschwindigkeit v dagegen, mit welcher der schwingende Punkt durch die Mitte seiner Schwingungsbahn hindurchgeht, ist proportional der Schwingungsweite. Man erhält nämlich aus Glei-

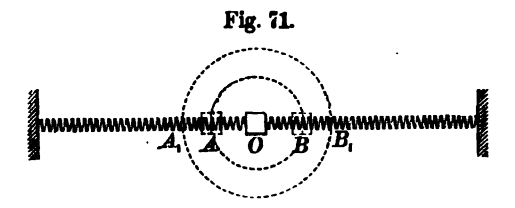
chung 65), wenn man darin für t den gefundenen Werth substituirt und dieselbe dann für v auflöst, den Werth:

71) $v = r \cdot \sqrt{q}$.

Wenn man in den Figuren 69 und 70 statt der horizontalen die verticale Seitenbewegung der gleichförmigen Kreisbewegung als Gegenstand der Untersuchung gewählt und dabei statt des Punktes A den Punkt D als Anfangspunkt der Bewegung angenommen hätte, so würde man in Bezug auf die schwingende Bewegung zwischen den Endpunkten D und C des verticalen Durchmessers natürlich zu gleichen Resultaten gelangt sein. Jede gleichförmige Kreisbewegung kann daher aufgefasst werden als Resultirende zweier gleicher rechtwinkelig zu einander gerichteter geradliniger Schwingungs-Bewegungen, welche so mit einander combinirt sind, dass die Zeitpunkte des Geschwindigkeits-Maximums der einen zusammenfallen mit den Zeitpunkten, in welchen die Geschwindigkeit der anderen Null wird. Wenn statt dessen die beiden combinirten (gleichartig vorausgesetzten) Schwingungen ungleiche Schwingungsweite hätten, so würde zwar statt der gleichförmigen Kreisbewegung eine ungleichförmige elliptische Bewegung entstehen; die Umlaufszeit würde jedoch dieselbe, nämlich gleich der doppelten Schwingungsdauer bleiben.

Denkt man sich einen Körper zwischen elastischen Federn derartig eingespannt, dass bei irgend einer Verschiebung des Körpers nach der linken oder rechten Seite hin allemal eine Kraft entsteht, welche den Körper nach seiner früheren Lage wieder zurückdrängt, und denkt man sich die Federn so construirt, dass diese zurückdrängende Kraft stets der Grösse jener Verschiebung proportional ist, so wird der Körper, wenn man ihm eine solche Verschiebung OA ertheilt und ihn dann loslässt, Schwingungen der oben beschriebenen Art zwischen den Punkten A und B ausführen (Fig. 71). Angenommen: die Federn wären so beschaffen, dass bei einer Verschiebung von 16 Millimetern die zurücktreibende Kraft 0,8 Kilogramm betrüge; dann würde bei einer Verschiebung von 1 Meter diese Kraft in Gewichtseinheiten ausgedrückt die Grösse erreichen:

Fig. 71.



$$A = \frac{0{,}8}{0{,}016} = 50 \text{ Kil.}$$

Wenn das Gewicht des Körpers 2,5 Kilogramm beträgt, so ist nach Gleichung 41) die Masse desselben $m = \frac{2{,}5}{g}$ zu setzen, und man erhält für die Schwingungs-Beschleunigung in der Entfernung Eins den Werth:

$$q = \frac{A}{m} = \frac{50 \cdot 9{,}81}{2{,}5} = 196^m{,}2.$$

Nach Gleichung 70) ist also die Schwingungsdauer, oder die Zeit, in welcher der Körper einmal den Weg AB durchläuft:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{196{,}2}} = 0{,}224 \text{ Sec.}$$

Genau dieselbe Grösse würde die Schwingungsdauer haben, wenn $A_1\ B_1$ die Schwingungsbahn wäre, d. h. wenn der Körper im Augenblicke des Loslassens bei A_1 sich befunden hätte. Wenn $AO = 0^m{,}001$ und $A_1\ O = 0^m{,}1$ ist, so hat (nach Gleichung 71) die Schwingungs-Geschwindigkeit in der Mitte der Schwingungsbahn im ersteren Falle die Grösse $v = 0{,}001\ \sqrt{196{,}2} = 0^m{,}014$ im letzteren die Grösse $v_1 = 0{,}1\ \sqrt{196{,}2} = 1^m{,}4$.

Das Gewicht des Körpers ist hierbei als ohne Einfluss betrachtet. Sollte die Schwingungsbahn jedoch verticale Lage haben und der Einfluss des Gewichtes berücksichtigt werden, so würde man finden, dass die Schwingungsdauer nicht dadurch geändert würde. Nur der Schwingungs-Mittelpunkt würde eine andere Lage erhalten, und zwar um so viel tiefer liegen als die einer Kraft von 2,5 Kil. entsprechende Verschiebung beträgt, nämlich um $\frac{2{,}5}{50} = 0^m{,}05$.

Wenn ein vertical aufgehängter elastischer Faden so beschaffen ist, dass ein angehängtes Gewicht ihm eine Verlängerung ertheilt, welche der Grösse desselben proportional ist, so wird irgend ein an dem Faden hängender Körper, den man anfänglich etwas hob oder senkte und dann losliess, verticale Schwingungen der vorigen Art ausführen — vorausgesetzt, dass diese Schwingungen sich nicht bis zu einer Weise erstreckten, bei welcher der Faden zeitweise schlaff würde. Ist z. B. der Faden so beschaffen, dass — wie beim vorigen Falle — ein Gewicht von 0,8 Kil. ihm eine Verlängerung von $0^m{,}016$ ertheilt, so wird ein Körper von 2,5 Kil. Gewicht eine Verlängerung $\overline{EO} = 0^m{,}05$ hervorbringen (Fig. 72). Verschiebt man diesen Körper in verticaler Richtung aus seiner Lage O um eine Grösse OA oder OB, welche kleiner ist als OE, und lässt ihn dann los, so wird der Körper verticale Schwingungen ausführen, deren Dauer wie im vorigen Falle 0,224 Sec. beträgt. Denn bei der vorausgesetzten Beschaffenheit des elastischen Fadens wird auch jetzt noch jede Hebung des Körpers, welche den Endpunkt E des unverlängerten Fadens nicht überschreitet, eine Kraft hervorrufen, welche der Grösse der Hebung proportional ist. Diese Kraft besteht aus dem Ueberschusse des Gewichtes über den aufwärts wirkenden elastischen Widerstand, sie beträgt z. B. die Hälfte des Gewichtes, wenn die Hebung gleich $\frac{1}{2}\ OE$, und wird gleich dem ganzen Gewichte, wenn der Körper bis zu dem Punkte E selbst gehoben wird.

Fig. 72.

§ 29.

Gleichförmige geradlinige Bewegung (Gleichgewicht) des materiellen Punktes.

Die Mittelkraft der auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte ist diejenige Kraft, welche für sich allein dieselbe Wir-

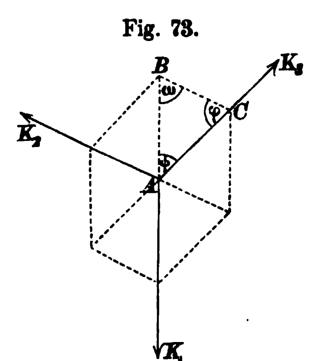
kung wie jene Kräfte hervorbringen würde. Wenn also diese Mittelkraft Null ist, so bringen die Kräfte keine Wirkung hervor, d. h. sie halten einander im Gleichgewicht, und es ist so gut als ob gar keine Kraft wirkte. Wenn auf einen materiellen Punkt gar keine Kraft wirkt, so ändert sich weder Richtung noch Geschwindigkeit seiner Bewegung. Hieraus folgt, dass die Bewegung eines materiellen Punktes geradlinig und gleichförmig ist, wenn die Mittelkraft der auf ihn wirkenden Kräfte Null ist.

Umgekehrt: wenn man weiss, dass die Bewegung eines materiellen Punktes geradlinig und gleichförmig ist, so schliesst man daraus, dass die auf ihn wirkenden Kräfte einander im Gleichgewicht halten; wenn man dagegen weiss, dass die Bewegung krummlinig oder ungleichförmig ist, so schliesst man daraus, dass die Kräfte nicht im Gleichgewichte sind.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der im Gleichgewichtszustande befindliche materielle Punkt sich bewegt, ist gleich seiner Anfangsgeschwindigkeit; sie ist Null, wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null war. Der Ruhestand ist daher als ein specieller Fall des Gleichgewichtes zu betrachten. Ruhe setzt Gleichgewicht der wirkenden Kräfte voraus, nicht aber umgekehrt das Gleichgewicht die Ruhe. Es kann Gleichgewicht vorhanden sein, und doch dabei Bewegung stattfinden.

Wenn eine Kraft von einer anderen Kraft aufgehoben werden soll, so muss dieselbe entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse mit ihr haben. Hieraus folgt, dass, wenn die auf einen materiellen Punkt in beliebiger Anzahl wirkenden Kräfte einander im Gleichgewicht halten sollen, jede von ihnen mit der Mittelkraft aller übrigen entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse haben muss.

Fig. 73.

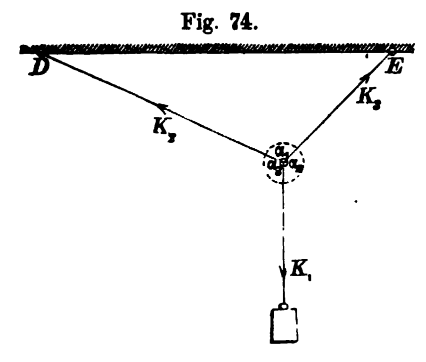


Sollen z. B. die drei Kräfte K_1, K_2, K_3 einander im Gleichgewicht halten, so muss jede von ihnen mit der Diagonale des aus den beiden anderen construirten Parallelogramms gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung haben (Fig. 73). Die Seiten des Dreiecks ABC repräsentiren die drei Kräfte und verhalten sich wie die Sinus-Zahlen der gegenüberliegenden Winkel φ, ψ, ω. Setzt man statt dessen die Sinus-Zahlen der Winkel α_1, α_2, α_3 (Fig. 74), welche jene resp. zu 180° ergänzen, so erhält man die Proportion:

$$72)\quad K_1 : K_2 : K_3 = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_3 .$$

Es ergiebt sich hieraus ein einfaches Mittel, die Richtigkeit des Parallelogramm-Gesetzes auf experimentellem Wege zu prüfen. Der Verbindungspunkt dreier Fäden, von denen der eine mit einem Gewichte K_1 belastet, die beiden anderen resp. an den Punkten D und E befestigt sind, kann als ein unter Einwirkung dreier Kräfte im Gleichgewicht befindlicher materieller Punkt angesehen werden. Durch Messung der drei Winkel und Kräfte kann man sich von der Richtigkeit der obigen Proportion — mithin auch des Parallelogramms der Kräfte — überzeugen.

Fig. 74.



Die allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes erhält man aus Gleichung 42), indem man den darin gefundenen Werth der Mittelkraft gleich Null setzt:

$$\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen besteht aus drei Gliedern, welche (als Quadratzahlen) nie negativ sein können, wird also nur dann gleich Null sein, wenn jedes der drei Glieder für sich Null ist. Die obige Gleichung schliesst also die drei Bedingungen ein:

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0.$$

Wenn man hierin aus Fig. 37 die Werthe substituirt, für welche die Zeichen R_x, R_y, R_z als Abkürzungen eingeführt wurden, so erhält man als allgemeine Gleichgewichts-Bedingungen des materiellen Punktes die drei Gleichungen:

73) $\Sigma(K \cos \alpha) = 0$, 74) $\Sigma(K \cos \beta) = 0$, 75) $\Sigma(K \cos \gamma) = 0$.

Da die Lage des rechtwinkeligen Achsen-Systems eine willkürlich zu wählende war, so ergeben sich hieraus folgende zwei Sätze:

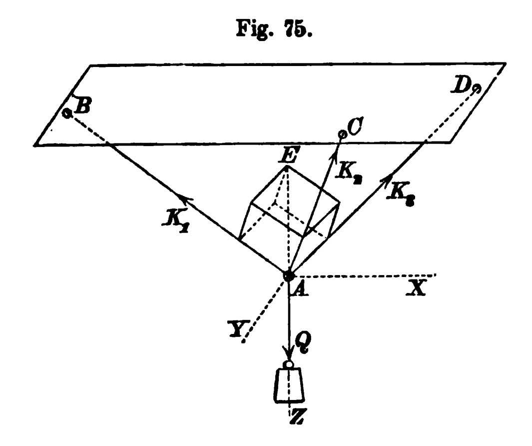
Wenn die auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte einander im Gleichgewicht halten, so ist in Bezug auf jede beliebige Achsenrichtung die Summe der bei rechtwinkeliger Zerlegung in sie hineinfallenden Seitenkräfte gleich Null.

Umgekehrt: wenn in Bezug auf jede von drei bestimmten rechtwinkelig zu einander gerichteten Achsen die Summe der Seitenkräfte Null ist, so findet in Bezug auf jede beliebige andere

Achsenrichtung das Gleiche statt, und sind die Kräfte im Gleichgewicht.

Kennt man einige von den Kräften, welche auf einen materiellen Punkt wirken, und weiss man zugleich, dass derselbe im Gleichgewichts-Zustande sich befindet, so kann man in manchen Fällen die übrigen noch unbekannten Kräfte bestimmen dadurch, dass man auf das ganze Kräfte-System die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen anwendet.

Fig. 75.



Wenn z. B. an dem Verbindungspunkte A dreier in den Punkten B, C, D befestigter Fäden mittelst eines vierten Fadens ein Gewicht Q aufgehängt ist, so kann man aus dem Ruhezustande des Punktes A schliessen, dass die mittelst der vier Fäden auf ihn übertragenen Zugkräfte Q, K_1, K_2, K_3 den Gleichgewichts-Bedingungen genügen müssen (Fig. 75). Denkt man sich das rechtwinkelige Achsen-System so gelegt, dass AZ in die Richtung der Schwere, die beiden anderen AX und AY also in die Horizontal-Ebene hineinfallen, so nehmen für diesen Fall die Bedingungs-Gleichungen die Form an:

$$K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 + K_3 \cos\alpha_3 = 0$$
$$K_1 \cos\beta_1 + K_2 \cos\beta_2 + K_3 \cos\beta_3 = 0$$
$$K_1 \cos\gamma_1 + K_2 \cos\gamma_2 + K_3 \cos\gamma_3 + Q = 0.$$

Wenn die Richtungen der Fäden (und mit ihnen sämmtliche Winkel) bekannt sind, so können die drei unbekannten Grössen K_1, K_2, K_3 aus diesen drei Gleichungen berechnet werden. Setzt man z. B. $Q = 500$ kil. und:

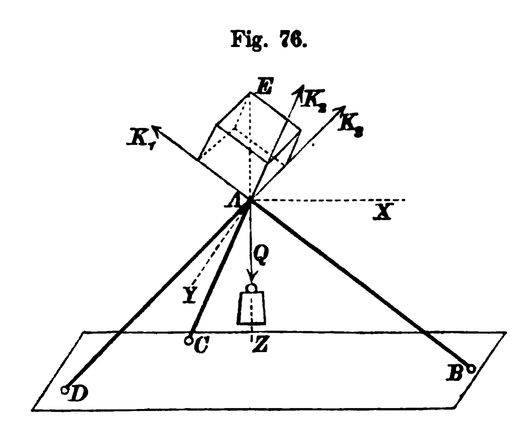
$$\cos\alpha_1 = +\frac{2}{3}, \quad \cos\alpha_2 = +\frac{2}{7}, \quad \cos\alpha_3 = -\frac{4}{9},$$
$$\cos\beta_1 = +\frac{2}{3}, \quad \cos\beta_2 = +\frac{6}{7}, \quad \cos\beta_3 = -\frac{8}{9},$$
$$\cos\gamma_1 = -\frac{1}{3}, \quad \cos\gamma_2 = -\frac{3}{7}, \quad \cos\gamma_3 = -\frac{1}{9},$$

so wird $K_1 = 300$ kil., $K_2 = 700$ kil., $K_3 = 900$ kil.

Statt dessen kann man die Aufgabe auch durch Construction lösen, indem man ein Parallelepipedon construirt, dessen Kanten resp. den Richtungen der unbekannten Kräfte parallel sind und dessen Diagonale AE mit der gegebenen Kraft Q gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung hat.

Die gleiche Construction und Berechnung würde für den in Fig 76 dargestellten Fall gelten, bei welchem die das Gewicht Q im Gleichgewicht haltenden Kräfte K_1, K_2, K_3 — anstatt als Zugkräfte mittelst Fäden auf den Punkt A übertragen zu werden — als Gegendrücke dreier in den Punkten B, C, D unterstützter Stangen auftreten. Durch Umkehrung dieser drei Kräfte erhält man die Druckkräfte, welche die Stangen ihrerseits durch das Gewicht Q erleiden.

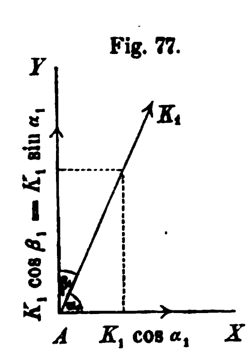
Fig. 76.



Genau dieselbe Kraftvertheilung endlich würde in allen diesen Fällen auch dann noch stattfinden, wenn die ganze Vorrichtung (etwa auf einem Wagen) in gleichförmig und geradlinig fortschreitender Bewegung begriffen wäre.

Die Zahl der Gleichgewichts-Bedingungen eines materiellen Punktes reducirt sich auf zwei, wenn sämmtliche Kräfte in einer und derselben Ebene wirken. Legt man das Achsen-System so, dass die Z-Achse rechtwinkelig zu dieser Ebene gerichtet ist, so werden die Grössen $\cos \gamma_1 \ldots . \cos \gamma_n$ sämmtlich Null, und zur Bestimmung der Richtung irgend einer von den Kräften ist der Winkel, den sie mit der X-Achse einschliesst, allein schon ausreichend. Wenn die Winkel $\alpha_1 \ldots . \alpha_n$ immer in einerlei Sinne von der Richtung AX als Anfangsrichtung aus gemessen werden, so können statt der Grössen $\cos \beta_1 \ldots . \cos \beta_n$ resp. die Grössen $\sin \alpha_1 \ldots . \sin \alpha_n$ gesetzt werden (s. Fig. 77), und die Gleichgewichts-Bedingungen nehmen die Formen an:

Fig. 77.



$$\Sigma (K \cos \alpha) = 0, \qquad \Sigma (K \sin \alpha) = 0.$$

In dem speciellen Falle endlich, wenn sämmtliche Kraftrichtungen in eine und dieselbe gerade Linie fallen, reduciren sich die Gleichgewichts-Bedingungen auf die eine:

$$\Sigma (K) = 0,$$

welche ausdrückt, dass nach der einen Richtung hin gerade so viel Kraft wirken muss, als nach der entgegengesetzten Richtung.

Wenn in diesem letzteren Falle zugleich der im Gleichgewichtszustande befindliche materielle Punkt nach einer von den beiden Richtungen hin in gleichförmiger Bewegung begriffen ist, so pflegt man wohl die der Bewegungsrichtung entgegenwirkende Kraft-Summe im Gegensatze zu der die Bewegung fördernden Kraft-Summe den Widerstand zu nennen.

Die Bedingung, welche erfüllt sein muss, wenn die Bewegung eine gleichförmige sein soll, lässt sich daher auch in der Form aussprechen:

$$\text{Kraft} = \text{Widerstand.}$$

Eine unter solchen Umständen erfolgende gleichförmige Bewegung wird durch den Sprachgebrauch des gewöhnlichen Lebens mitunter in einer Weise bezeichnet, welche leicht zu Missverständnissen führt. Wenn durch die mittelst eines Seiles ausgeübte Zugkraft eine Last gleichförmig gehoben, oder ein Schiff, ein Wagen, ein Pflug gleichförmig vorwärts getrieben wird, so pflegt man den Vorgang wohl mit den Worten zu bezeichnen: „Die Kraft überwindet den Widerstand“ und ist geneigt mit dem Begriffe des „Ueberwindens“ die Vorstellung zu verbinden: Die überwindende Kraft müsse grösser sein als der überwundene Widerstand. Man gelangt zu einer solchen fehlerhaften Auffassung, indem man die Bedingungen der Entstehung einer neuen Bewegung verwechselt mit den Bedingungen der Fortsetzung einer schon vorhandenen Bewegung. Um zu bewirken, dass der Körper aus dem Ruhezustande in Bewegung übergehe, dazu ist allerdings eine Kraft erforderlich, welche grösser ist als der Widerstand, weil während des Ueberganges die Bewegung eine beschleunigte ist. Wenn aber die Bewegung einmal im Gange ist, und es nur darauf ankommt, die Bewegung gleichförmig zu erhalten, so muss die Kraft weder grösser noch kleiner, vielmehr genau gleich dem zu überwindenden Widerstande sein.

SIEBENTES CAPITEL.

Bewegung auf vorgeschriebenen Bahnen.

§ 30.

Widerstände fester Flächen, Linien, Punkte.

Nur durch Kräfte können Bewegungen hervorgebracht, vernichtet oder abgeändert werden.

Wenn also auf einen materiellen Punkt gewisse Kräfte wirken, deren Mittelkraft K bekannt ist, und es findet sich, dass die von dem Punkte wirklich ausgeführte Bewegung abweicht von derjenigen Bewegung, welche die Kraft K für sich allein hervor-

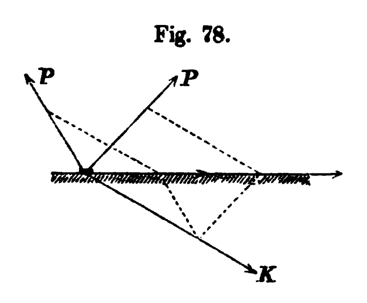
gebracht haben würde, so muss man die Ursache dieser Abweichung in irgend einer **Kraft** suchen, welche neben der Kraft K noch thätig war. Diese unbekannte Kraft musste genau so beschaffen sein, dass sie mit jener Kraft K zusammen eine Mittelkraft bildete, welche alle zur Erklärung der wirklich ausgeführten Bewegung erforderlichen Eigenschaften besass.

Nach diesem Principe sind die Einwirkungen zu beurtheilen, welche ein in seiner freien Bewegung beschränkter materieller Punkt von Seiten der beschränkenden Hindernisse erleidet. Diese sogenannten Hindernisse sind immer **Kräfte**. Grösse und Richtung dieser Kräfte können aus der wirklich ausgeführten Bewegung erschlossen werden, sobald die ausserdem etwa noch wirkenden Kräfte bekannt sind.

Wenn an der Oberfläche einer ruhenden festen Wand ein materieller Punkt sich bewegt, und die auf denselben wirkende Kraft K eine solche Richtung hat, dass sie für sich allein wirkend den Punkt in den inneren Raum hinter der Oberfläche hineintreiben würde, so schliesst man aus dem Verbleiben des Punktes an der Oberfläche, dass ausser der Kraft K noch irgend eine andere Kraft P thätig ist, welche von Seiten der festen Wand auf den materiellen Punkt ausgeübt wird. Wenn die Wandoberfläche eine Ebene ist, so muss die Mittelkraft von K und P in diese Ebene hineinfallen, weil sonst der Punkt die Ebene verlassen würde.

Aus dieser Bedingung allein lässt sich indessen die Grösse und Richtung der unbekannten Kraft P noch nicht bestimmen. Denn es lässt sich auf unendlich viele verschiedene Arten ein Parallelogramm construiren, dessen eine Seite K ist, und dessen Diagonale in die Ebene hineinfällt (Fig. 78).

Fig. 78.



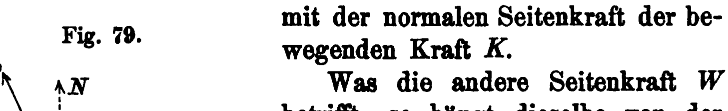
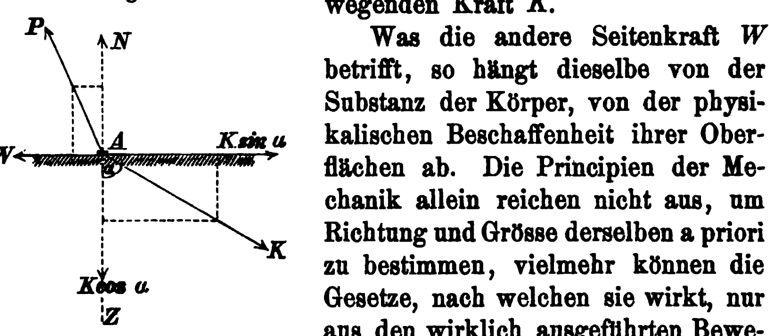
Welche Richtung auch immer die unbekannte Kraft P haben möge, immer kann man dieselbe als Mittelkraft zweier Seitenkräfte N und W ansehen, von denen die eine N in die Richtung der Normalen, die andere W in die Ebene selbst hineinfällt. Die Seitenkraft N kann man immer aus der gegebenen Kraft K allein bestimmen, auch ohne die wirklich ausgeführte Bewegung zu kennen.

Denn wenn die Mittelkraft aus K und P in die Ebene hineinfallen soll, so muss nothwendig die in die Richtung AZ bei rechtwinkeliger Zerlegung hineinfallende Seitenkraft der Mittelkraft gleich Null sein. Es ergiebt sich also aus Fig. 79 die Bedingungsgleichung:

$$K \cos \alpha - N = 0, \quad \text{oder:} \quad N = K \cos \alpha,$$

d. h. der normale Gegendruck der ebenen Wandfläche hat unter allen Umständen entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse mit der normalen Seitenkraft der bewegenden Kraft K.

Fig. 79.

Was die andere Seitenkraft W betrifft, so hängt dieselbe von der Substanz der Körper, von der physikalischen Beschaffenheit ihrer Oberflächen ab. Die Principien der Mechanik allein reichen nicht aus, um Richtung und Grösse derselben a priori zu bestimmen, vielmehr können die Gesetze, nach welchen sie wirkt, nur aus den wirklich ausgeführten Bewegungen auf dem Wege der Beobachtung ermittelt werden. Solche Beobachtungen haben ergeben, dass diese Kraft W allemal derjenigen Richtung entgegen wirkt, in welcher der materielle Punkt entweder wirklich sich bewegt, oder ohne dieselbe sich bewegen würde; dass sie zunimmt mit dem Drucke N (welchem sie annäherungsweise proportional angenommen werden darf) und dass sie unter sonst gleichen Umständen um so kleiner ist, je glatter die Oberflächen der Körper sind. Man nennt diese Kraft W den Reibungswiderstand. Die Theorie der Reibungswiderstände soll weiter unten in einem besonderen Capitel ausführlicher erörtert werden. Vor der Hand soll angenommen werden, dass die Wandfläche vollkommen glatt ist, also:

$$W = 0.$$

In diesem Falle reducirt sich die Wirkung der Wand auf die eine Kraft N, durch welche die normale Seitenkraft der Kraft K aufgehoben wird. Der materielle Punkt bewegt sich daher wie ein freier Punkt, auf den die Kraft $K \sin \alpha$ allein wirkt. Wenn man sich den materiellen Punkt zwischen zwei solchen glatten parallelen Wandflächen eingeschlossen denkt, welche sowohl nach der einen als nach der anderen Seite hin jede normal zu ihnen

gerichtete Bewegung verhindern, so gelangt man auf diese Weise zu der Vorstellung von der Bewegung eines materiellen Punktes, dem statt des unendlichen Raumes nur eine Ebene als Bewegungsgebiet offen steht. Diese Ebene hat man sich ausgestattet zu denken mit Normalkräften, welche allemal dann zur Wirkung kommen, wenn ohne dieselben ein Heraustreten aus der Ebene erfolgen würde, und immer gerade gross genug — auch nicht grösser — sind, als nöthig, um dieses Heraustreten zu verhindern.

Denkt man sich einen materiellen Punkt von festen Körpern in der Art umgeben, dass statt des unendlichen Raumes nur eine einzige gerade Linie demselben als Bewegungsgebiet offen steht — wie etwa eine Kugel in einer geradlinigen Röhre — so gelangt man auf ähnliche Weise zu der Vorstellung von einer festen geraden mathematischen Linie, ausgestattet mit normalen Widerstandskräften, welche jede rechtwinkelig zu derselben wirkende Kraft aufheben, jede längs derselben wirkende Kraft dagegen ungehindert zur Wirkung kommen lassen (Fig. 80).

Fig. 80.

N K

Endlich kann man sich auch einen materiellen Punkt auf die Art von festen Körpern eingeschlossen denken, dass nach jeder Richtung des unendlichen Raumes hin seine Bewegung verhindert wird, und gelangt auf diese Weise zu der Vorstellung von einem festen mathematischen Punkte, ausgestattet mit Widerstandskräften, welche allemal dann zur Wirkung gelangen, wenn ohne dieselben eine Bewegung des materiellen Punktes eintreten würde und gerade gross genug — auch nicht grösser — sind, als nöthig ist, um jede Bewegung überhaupt zu verhindern.

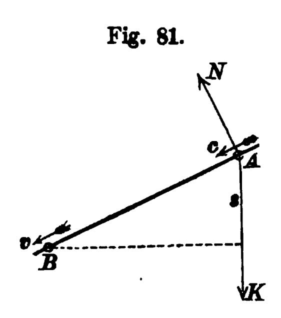
§ 31.

Bewegung auf geradliniger Bahn.

Wenn ein materieller Punkt unter Einwirkung der constanten Kraft K auf geradlinig vorgeschriebener Bahn von A nach B sich bewegt, so besteht die Wirkung der festen Bahnlinie darin, dass zu der Kraft K beständig so viel (rechtwinkelig zur Bahnlinie gerichteter) Gegendruck N hinzutritt, als nöthig ist, um die Mittelkraft in die Richtung AB hineinzubringen (Fig. 81). Die Kraft N verrichtet während der Bewegung keine mechanische Arbeit, weil

sie zur Bewegungsrichtung rechtwinkelig gerichtet ist, kann also bei Anwendung des Princips der lebendigen Kraft stets unberücksichtigt bleiben. Die Arbeit der Mittelkraft ist daher in diesem Falle gleich der Arbeit, welche die Kraft K für sich allein verrichtet. Nach dem Principe der lebendigen Kraft ist diese Arbeit gleich zu setzen der von ihr hervorgebrachten Zunahme an lebendiger Kraft. Man erhält also nach Fig. 81 die Gleichung:

Fig. 81.



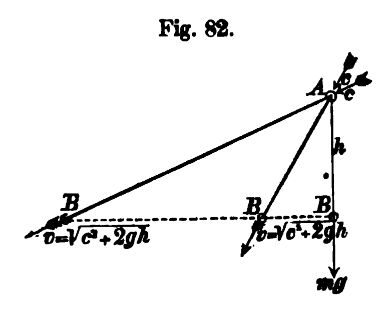
$$76)\quad \frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2} = K s.$$

Setzt man für K das Gewicht des materiellen Punktes mg, und für s die in verticaler Richtung durchlaufene Höhe h, so erhält man wieder die schon früher (in Bezug auf die in Fig. 51 dargestellte Bewegung) gefundene Gleichung:

$$77)\quad \frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2} = m g h, \quad \text{oder:} \quad v = \sqrt{c^2 + 2 g h},$$

aus welcher hervorgeht, dass die Endgeschwindigkeit v unabhängig ist von der Richtung der Bahnlinie, vielmehr nur abhängt von der Anfangsgeschwindigkeit c und der Höhendifferenz h der beiden Punkte A und B (Fig. 82). Die Vergleichung der Fig. 82 mit Fig. 51 (im § 22) zeigt, dass für die Berechnung der Endgeschwindigkeit in beiden Fällen dieselben Regeln gelten. Wenn also wie bei dem im § 22 berechneten Zahlenbeispiele die Anfangsgeschwindigkeit $c = 15^m$ und die Höhe $h = 10^m$ angenommen wird, so ergiebt sich auch für die Endgeschwindigkeit wiederum der früher gefundene Werth:

Fig. 82.



$$v = \sqrt{15^2 + 2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 10} = 20^m{,}5.$$

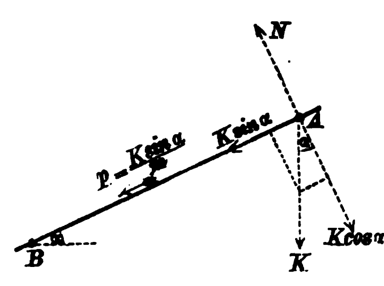
Die Mittelkraft der beiden Kräfte K und N ist $K \sin\alpha$ (s. Fig. 83). Denn von den beiden Seitenkräften der Kraft K, nämlich $K \sin\alpha$ und $K \cos\alpha$, wird die letztere durch den Gegendruck N aufgehoben, und die erstere bewegt den materiellen Punkt längs der Bahnlinie gerade so, als ob derselbe vollkommen frei wäre, ertheilt demselben also eine Beschleunigung:

$$p = \frac{K \sin\alpha}{m}.$$

Die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte, und können daher nach Substitution des soeben für p gefundenen Werthes die

Gleichungen 2) ... 6) des § 7 unmittelbar angewendet werden, um jede hinsichtlich des weiteren Verlaufes der Bewegung zu stellende Frage zu beantworten.

Fig. 83.



Setzt man wiederum $K = mg$, so erhält man als Beschleunignng der Schwere auf einer um den Winkel α gegen die Horizontale geneigten Bahn:

$$78)\quad p = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha.$$

Hiernach würde sich z. B. für die Beschleunigung eines Eisenbahnwagens auf einer im Verhältniss 1 : 100 geneigten Bahnstrecke die Grösse ergeben:

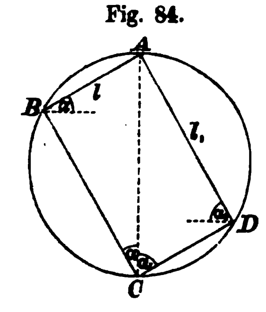
$$p = 9{,}81 \cdot \frac{1}{100} = 0^{m}{,}0981,$$

d. h. seine Geschwindigkeit würde — wenn Luft- und Reibungs-Widerstände nicht entgegenwirkten — um etwa 98 Millimeter in jeder Secunde zunehmen. Auf dieser Bahn müsste der Wagen eine Strecke von 1000 Metern zurücklegen, um an eine Stelle zu gelangen, welche um 10 Meter tiefer liegt. Wenn also die Anfangsgeschwindigkeit — wie beim vorigen Zahlenbeispiel mit Bezug auf Fig. 82 angenommen wurde — 15^{m} betrug, so würde der Wagen nach Zurücklegung einer Strecke von 1000^{m} eine Geschwindigkeit von $20^{m}{,}5$ pro Secunde erreichen.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$ gesetzt wird, so ergiebt sich — nach § 7, Gleichung 6), wenn darin $p = g \sin \alpha$ substituirt wird — für die in t Secunden zurückgelegte Wegeslänge l die Gleichung:

$$l = g \sin \alpha \frac{t^2}{2},$$

Fig. 84.



welche für t aufgelöst die Form annimmt:

$$79)\quad t = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{l}{\sin \alpha}\right)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Bewegungsdauer nur von der Grösse des Quotienten $\frac{l}{\sin \alpha}$ abhängt, dass also Bahnstrecken von verschiedenen Neigungswinkeln in gleichen Zeiten durchlaufen werden, wenn die Quotienten:

$$\frac{l}{\sin \alpha} = \frac{\text{Bahnlänge}}{\text{Sinus des Neigungswinkels}}$$

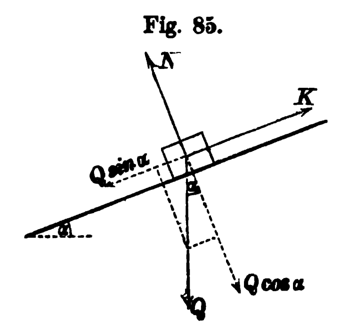
bei diesen Bahnen übereinstimmende Werthe haben. Die vier Seiten eines beliebigen mit $\overline{AC}$ als verticaler Diagonale construirten Rechtecks $ABCD$ (Fig. 84) genügen dieser Bedingung, denn es ist:

$$\frac{l}{\sin \alpha} = \frac{l_1}{\sin \alpha_1} = \overline{AC}.$$

Hieraus folgt, dass alle durch einen Endpunkt des verticalen Durchmessers gelegten Sehnen eines verticalen Kreises in gleichen Zeiten durchlaufen werden von einem durch die Schwere getriebenen materiellen Punkte.

Die Bewegung eines materiellen Punktes auf geradliniger vorgeschriebener Bahn ist gleichförmig, wenn die bei rechtwinkeliger Zerlegung der treibenden Kräfte in die Bahnrichtung hineinfallenden Seitenkräfte einander im Gleichgewicht halten. Die Mittelkraft der treibenden Kräfte ist alsdann rechtwinkelig zur Bahn gerichtet und wird durch den Gegendruck derselben aufgehoben.

Fig. 85.



Um z. B. eine Last vom Gewichte Q gleichförmig bergan zu ziehen auf einer unter dem Winkel α ansteigenden Bahn (Fig. 85), dazu bedarf es — abgesehen von Reibungswiderständen — einer bergan ziehenden Kraft:

80) $K = Q \sin \alpha$,

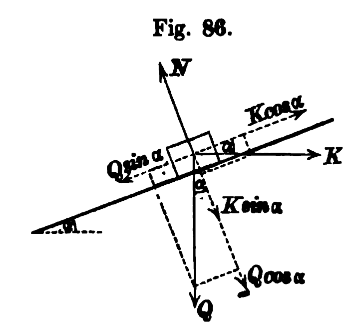
und der Gegendruck der Bahn hat dabei die Grösse:

$$N = Q \cos \alpha.$$

Wenn dagegen — wie in Fig. 86 — die Zugkraft K in horizontaler Richtung wirkt, so muss die Bedingung erfüllt sein:

81) $K \cos \alpha = Q \sin \alpha$, oder: $K = Q \operatorname{tg} \alpha$.

Fig. 86.



Für den Gegendruck der Bahn ergiebt sich im letzteren Falle die Gleichung:

$$N = Q \cos \alpha + K \sin \alpha,$$

oder nach Substitution des für K gefundenen Werthes:

$$N = Q (\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha) = \frac{Q}{\cos \alpha}.$$

Es macht hierbei durchaus keinen Unterschied, ob die gleichförmige Bewegung der Last aufwärts oder abwärts gerichtet ist. Dieselben Gleichungen gelten daher auch für den Fall, wenn die Last in abwärts gerichteter Bewegung begriffen ist, und die Kraft K gerade so gross (auch nicht grösser) sein soll, als nöthig ist, um eine Beschleunigung dieser Bewegung zu verhindern.

§ 32.

Gleichförmige Bewegung auf krummliniger Bahn.

Der normale Widerstand einer geradlinigen Bahn tritt immer nur dann in Wirksamkeit, wenn eine von der Bahnrichtung abweichende Kraft denselben als Gegendruck hervorruft. Wenn keine solche Kraft wirkt, so ist auch kein Druck vorhanden.

Bei der Bewegung auf krummliniger Bahn dagegen ist ein solcher Druck auch dann thätig, wenn gar keine sonstige Kraft

auf den materiellen Punkt wirkt. Denn um die Bewegungsrichtung eines Körpers beständig abzuändern, dazu ist fortwährend Kraft erforderlich; ohne eine solche Kraft würde der Körper dem Gesetze der Trägheit folgend immer geradeaus sich bewegen. Wenn — wie vorausgesetzt werden soll — keine Reibung stattfindet, so wirkt auch hier der Druck beständig rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung, hat also gerade diejenigen Eigenschaften, welche im § 22 gefunden wurden für eine Kraft, welche nicht die Grösse, sondern nur die Richtung der Geschwindigkeit verändern soll.

Der materielle Punkt wird daher, wenn keine sonstigen Kräfte ihn treiben, die vorgeschriebene krummlinige Bahn in gleichförmiger Bewegung durchlaufen.

Man bestimmt für diesen Fall die Grösse und Richtung des Normaldrucks, indem man untersucht, welche Kraft auf einen freien materiellen Punkt wirken müsste, um die gleiche Bewegung hervorzubringen, d. h. um auf eben dieselbe Weise seine Bewegung beständig von der geradlinigen abzulenken, wie die vorgeschriebene Bahnlinie es erfordert. Eine solche ablenkende Kraft müsste immer nach derjenigen Seite hin wirken, nach welcher die Ablenkung erfolgen soll, also an jeder Stelle in der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahnlinie hin. Denn während der materielle Punkt den unendlich kleinen Bogen mn durchläuft (Fig. 87), befindet er sich genau in derselben Situation, wie wenn er auf einem Kreisbogen von gleicher Krümmung sich bewegte. Für diesen Fall aber wäre es die nach dem Mittelpunkte des Kreises wirkende Centripetal-Kraft, welche die verlangte Eigenschaft besässe. Nach § 27 (Gleichung 58) hat also an derjenigen Stelle der Bahnlinie, wo ϱ der Krümmungshalbmesser derselben ist, der von aussen nach innen gerichtete Gegendruck der Bahn die Grösse:

Fig. 87.

$$82)\quad N = \frac{mv^2}{\varrho}.$$

Da die Masse m und die Geschwindigkeit v des materiellen Punktes während der Bewegung immer dieselbe Grösse behalten,

so ändert sich der Druck mit dem Krümmungshalbmesser, wird grösser an Stellen von stärkerer Krümmung und kleiner in schwächer gekrümmten Theilen der Bahnlinie.

Wenn der materielle Punkt z. B. eine Spirale von aussen nach innen durchläuft, so ist der Druck in beständigem Wachsen begriffen; wenn dagegen die Bahnlinie an allen Stellen gleiche Krümmung hat, wie z. B. eine Schraubenlinie oder eine Kreislinie, so behält der Druck beständig dieselbe Grösse. Wenn die Bahnlinie eine Stelle hätte, für welche $\varrho = 0$ ist, so würde an dieser Stelle $N = \infty$; d. h. so wenig es in der Natur unendlich grosse Kräfte giebt, eben so wenig ist es möglich, den materiellen Punkt zu zwingen, eine Bahnlinie mit Ecken in gleichförmiger Bewegung zu durchlaufen.

Auch dann noch ist die Bewegung eine gleichförmige, wenn ausser dem Gegendruck der Bahn auf den materiellen Punkt noch eine Kraft K wirkt, welche beständig rechtwinkelig zur Bahn gerichtet ist. Der Gegendruck der Bahn aber wird alsdann ein anderer; denn die Kraft K ruft für sich allein schon einen ihr gleichen Gegendruck hervor, und dazu kommt dann der zur Richtungsänderung der Bewegung erforderliche Druck $\frac{mv^2}{\varrho}$. Der totale Gegendruck wird also die Mittelkraft von diesen beiden Drücken bilden.

In dem speciellen Falle, wenn die vorgeschriebene Bahnlinie eine ebene Curve ist und die Kraft K in der Ebene derselben wirkt, ist:

$$83)\quad N \pm K = \frac{mv^2}{\varrho},$$

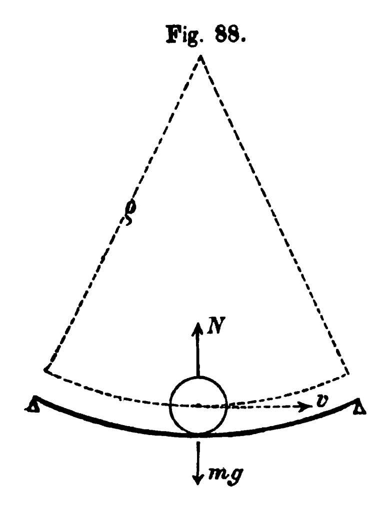
d. h. je nachdem die Kraft K nach innen oder nach aussen wirkt, schwächt oder verstärkt sie den Gegendruck N. Wenn die Kraft K nach aussen wirkt, so ist es der Ueberschuss des Drucks N über die Kraft K; wenn sie nach innen wirkt, so ist es die Summe der beiden Kräfte, welche die Centripetal-Kraft bildet.

Immer ist bei gleichförmiger Bewegung auf krummliniger vorgeschriebener Bahn die Mittelkraft sämmtlicher auf den materiellen Punkt einwirkender Kräfte die Centripetal-Kraft.

Hieraus folgt, dass $N = 0$ wird, wenn zufällig die Kraft K für sich allein schon die Grösse und Richtung der Centripetal-Kraft hat. In diesem Falle könnten die Wände der Bahn hinweggenommen werden, der (alsdann völlig freie) materielle Punkt würde trotzdem die Bewegung längs der vorgeschriebenen Bahnlinie ausführen.

Wenn eine Kugel (oder ein Eisenbahnwagen) auf einer geradlinigen horizontalen Brücke entlang rollt, so ist der Gegendruck der Unterlage gleich dem Gewichte der Kugel. Wenn dagegen in Folge einer nach unten convexen Krümmung der Brückenbahn der Mittelpunkt der Kugel einen Kreisbogen vom Halbmesser ϱ beschreibt, so ist nach Fig. 88 der Gegendruck der Brückenbahn in der Mitte derselben zu berechnen aus der Gleichung:

Fig. 88.



$$N - mg = \frac{mv^2}{\varrho}, \text{ oder:}$$

$$\frac{N}{mg} = 1 + \frac{v^2}{\varrho g}.$$

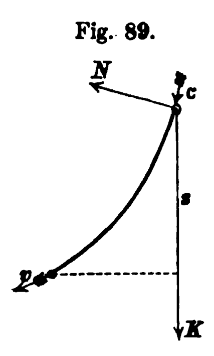
Wenn also z. B. $v = 14^m$ und $\varrho = 20^m$ ist, so wird: $\frac{N}{mg} = 2$. In diesem Falle ist also der Druck der Kugel gegen die Unterlage doppelt so gross als das Gewicht der Kugel.

§ 33.

Ungleichförmige Bewegung auf krummliniger Bahn.

Wenn die treibende Kraft nicht rechtwinkelig zur Bahn gerichtet ist, so ändert sie die Geschwindigkeit des materiellen Punktes. Man kann die Grösse der hervorgebrachten Geschwindigkeitsänderung auch hier mittelst des Princips der lebendigen Kraft bestimmen, indem man die von der treibenden Kraft allein verrichtete mechanische Arbeit der Zunahme an lebendiger Kraft gleich setzt. Denn welche Richtung auch immer diese Kraft haben möge, der normale Gegendruck der Bahn ist immer rechtwinkelig zur Bewegung gerichtet und verrichtet niemals mechanische Arbeit.

Fig. 89.



Wenn also die treibende Kraft constant ist, so gilt für die Bewegung des materiellen Punktes dieselbe Gleichung (s. Fig. 89):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = Ks,$$

welche in § 31 für die Bewegung auf geradliniger Bahn gefunden wurde. Es zeigt sich also, dass die Zunahme der Geschwindigkeit nur von der Grösse des Productes Ks abhängt und im

Uebrigen vollkommen unabhängig ist von der Form der vorgeschriebenen Bahnlinie.

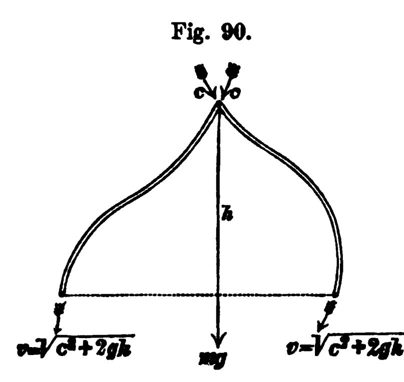
Hiernach erhält man z. B. für die Bewegung einer Kugel, welche von der Schwere getrieben ein vollkommen glattes gekrümmtes Rohr durchläuft, dieselbe Gleichung 77):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = mgh, \quad \text{oder:} \quad v = \sqrt{c^2 + 2gh},$$

welche schon in § 31 für die Bewegung auf geradliniger Bahn und in § 22 für die freie Bewegung eines von der Schwere getriebenen materiellen Punktes gefunden wurde. Setzt man beispielsweise (wie dort) $h = 10^m$ und $c = 15^m$, so erhält man auch hier wieder:

$$v = \sqrt{15^2 + 2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 10} = 20^m{,}5.$$

Fig. 90.



Wenn man die Bedeutungen der beiden Buchstaben v und c mit einander vertauscht, also die Anfangsgeschwindigkeit mit v und die Endgeschwindigkeit mit c bezeichnet, so gilt die obige Gleichung 77) für die umgekehrte Bewegungsrichtung, d. h. für die ansteigende Bewegung längs der Curve. Denn die unmittelbare Anwendung des Princips der lebendigen Kraft führt in diesem Falle zu der Gleichung:

$$84) \quad \frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -mgh,$$

welche genau mit der obigen übereinstimmt. Wenn die Geschwindigkeit am oberen Endpunkt $c = 0$ ist, so wird:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad \text{oder:} \quad h = \frac{v^2}{2g}, \quad \text{oder:} \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Eine mit 10^m Anfangsgeschwindigkeit am untern Ende in das Rohr eintretende Kugel steigt also in demselben hinan bis zur Höhe:

$$h = \frac{10^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 5^m{,}1$$

und würde bei der Rückkehr mit der Geschwindigkeit von 10^m unten wieder ankommen.

Um einen Körper von der Masse m gleichförmig vertical aufwärts zu bewegen, dazu bedarf es einer Kraft $= mg$, und diese Kraft verrichtet, während sie den Körper bis zu der Höhe h erhebt, die mechanische Arbeit mgh. Wenn man statt dessen eine gleich grosse mechanische Arbeit darauf verwendete, dem Körper in horizontaler Richtung eine gewisse Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ zu ertheilen, und demselben alsdann eine krummlinig ansteigende Bahn vorschriebe, so würde die gleiche Wirkung erzielt werden, insofern der Körper auf dieser Bahn ebenfalls bis zu der Höhe h sich erheben würde.

Um für irgend einen Zeitpunkt die Beschleunigung längs der Bahnrichtung (die Tangential-Beschleunigung) zu bestimmen, hat

man die treibende Kraft K in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, von denen die eine tangential, die andere rechtwinkelig zur Bahnlinie gerichtet ist (Fig. 91). Die tangentiale Seitenkraft $K \cos \alpha$ ertheilt dem materiellen Punkte die Tangential-Beschleunigung:

Fig. 91.

$$85) \quad p = \frac{K \cos \alpha}{m}.$$

Die normale Seitenkraft $K \sin \alpha$ hat weiter keine Wirkung, als dass sie ausser dem sonst schon wirkenden noch einen neuen Gegendruck hervorruft, welcher entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse mit ihr hat. Die Mittelkraft der rechtwinkelig zur Bahnlinie gerichteten Seitenkräfte bildet dann diejenige Kraft, welche die Centripetal-Beschleunigung hervorbringt, nämlich die Centripetal-Kraft.

Wenn die vorgeschriebene Bahnlinie eine ebene Curve ist und die Kraft K in der Ebene derselben wirkt, so wird diese Mittelkraft gleich der Summe oder der Differenz der beiden Kräfte N und $K \sin \alpha$, je nachdem die letztere in der Richtung von aussen nach innen oder von innen nach aussen wirkt (vergl. § 32, Gleichung 83). Der totale Gegendruck N ist also, wenn die Kraft $K \sin \alpha$ in der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkte hin wirkt, zu bestimmen aus der Gleichung:

$$86) \quad N + K \sin \alpha = \frac{m v^2}{\varrho}.$$

Wenn dagegen die Seitenkraft $K \sin \alpha$ in die Richtung nach aussen fällt, so ist:

$$87) \quad N - K \sin \alpha = \frac{m v^2}{\varrho}.$$

§ 34.

Bewegung in verticalem Kreise.

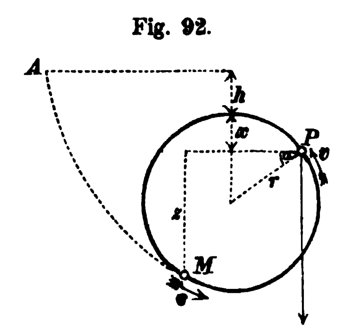
(Centrifugal-Bahn. Mathematisches Pendel.)

Die Geschwindigkeit v, mit welcher der materielle Punkt irgend eine Stelle P der Kreislinie erreicht, kann wie früher nach dem Principe der lebendigen Kraft berechnet werden, wenn der Anfangspunkt M und die Anfangsgeschwindigkeit c gegeben sind. Man erhält nach Fig. 92 die Gleichung:

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2} = - m g z.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit c kann man sich auch dadurch entstanden denken, dass der materielle Punkt auf irgend einer anderen Bahn herabgleitend bei dem Punkte M tangential in die Kreislinie eingetreten ist. Betrachtet man den Punkt A dieser Bahn als Ausgangspunkt der dort mit der Geschwindigkeit Null anfangenden Bewegung, so ergiebt sich für die Geschwindigkeit an der Stelle P nach Fig. 92 die Gleichung:

Fig. 92.



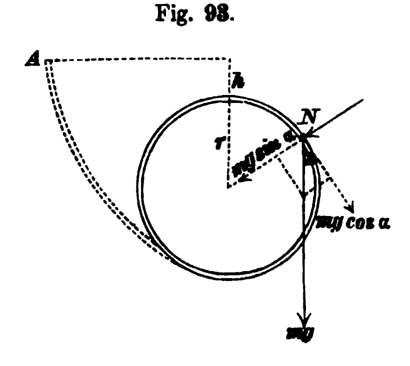
$$\frac{mv^2}{2} - 0 = mg\,(h + x).$$

oder, wenn darin für x der Werth $r\,(1 - \sin\alpha)$ substituirt, und die Gleichung für v^2 aufgelöst wird:

$$88)\quad v^2 = 2g\,[h + r\,(1 - \sin\alpha)].$$

Der nach innen wirkende Gegendruck N der Bahnlinie an dieser Stelle ist nach Gleichung 86) zu bestimmen, welche für diesen Fall die Form annimmt (s. Fig. 93):

Fig. 93.



$$N + mg\sin\alpha = \frac{mv^2}{r}$$

oder, wenn darin für v^2 der gefundene Werth substituirt, und die Gleichung für N aufgelöst wird:

$$89)\quad N = 2mg\left(\frac{h}{r} + 1 - \frac{3}{2}\sin\alpha\right).$$

Ob der Druck N nach innen oder nach aussen hin auf den materiellen Punkt wirkt, d. h. ob es die äussere oder die innere Wand der Bahn ist, welche den Gegendruck leistet, das wird davon abhängen, ob aus der Gleichung 89) ein positiver oder negativer Werth für N sich ergiebt. Der nach innen gerichtete Gegendruck wird um so kleiner, je grösser $\sin\alpha$, also am kleinsten in dem höchsten Punkte der Kreislinie, wo $\sin\alpha = 1$ wird, nämlich:

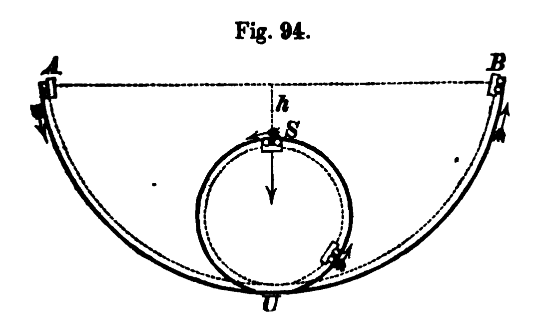
$$N(\min) = 2mg\left(\frac{h}{r} - \frac{1}{2}\right).$$

Soll auch an dieser Stelle noch die äussere Wand diejenige sein, welche den Gegendruck leistet, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$90)\quad h > \frac{r}{2}.$$

Wenn es an allen Stellen der Bahnlinie nur die äussere Wand ist, welche den Gegendruck leistet, so ist die innere Wand ganz überflüssig und kann daher hinweggenommen werden, ohne dass hierdurch Etwas in der Bewegung geändert würde. Auf diesem Principe beruht die Einrichtung der sogenannten Centrifugal-Bahn (Fig. 94), bei welcher ein Wagen von der Schwere getrieben längs eines gebogenen Schienenweges $AUSB$, und zwar an der concaven Seite desselben sich fortbewegt, ohne durch die Schwere von demselben entfernt zu werden. Liegt der Anfangspunkt A hoch genug, so wird der Wagen auch an der höchsten Stelle S des Kreises noch einen Druck gegen die Schiene ausüben, also nach oben hin, obwohl hier die Schwere in entgegengesetzter Richtung wirkt.

Fig. 94.

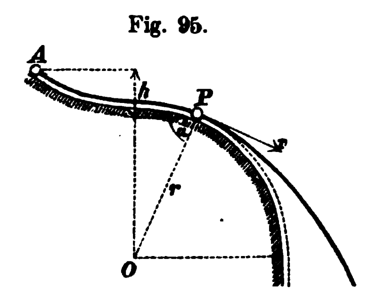


Wenn die Bedingung 90) nicht erfüllt ist, wenn statt dessen $h < \frac{r}{2}$ ist, so wird es in dem oberen Theile der Kreislinie die innere, in dem unteren die äussere Wand sein, welche den Gegendruck leistet. Die Stelle, wo weder die innere noch die äussere Wand einen Gegendruck leistet, findet man, indem man in Gleichung 89) $N = 0$ setzt und die Gleichung für $\sin \alpha$ auflöst:

$$91) \quad \sin \alpha = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{h}{r}\right).$$

Unterhalb dieser Stelle P müsste die äussere Wand den Gegendruck leisten, um den (von oben herab kommenden) materiellen Punkt zu zwingen, in der Kreislinie zu bleiben (Fig. 95). Wenn also die äussere Wand ganz fehlte, so würde der materielle Punkt an dieser Stelle die Kreislinie verlassen und von hieran wie ein freier materieller Punkt sich weiter bewegen. Seine Bewegung würde alsdann in eine Wurfbewegung übergehen, und die an der Stelle P erlangte Geschwindigkeit v die Anfangsgeschwindigkeit dieser Wurfbewegung bilden.

Fig. 95.

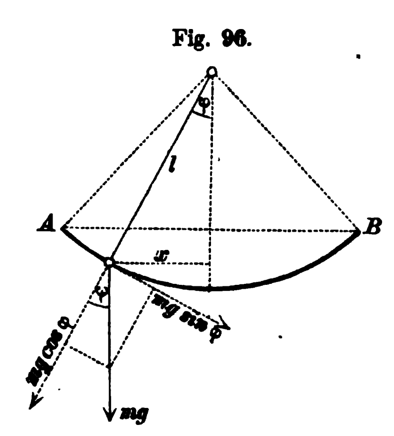


Mathematisches Pendel.

Wenn die Geschwindigkeit an der tiefsten Stelle des Kreises sehr klein ist, so wird schon nach geringem Ansteigen eine Umkehr erfolgen. Der materielle Punkt wird zu der tiefsten Stelle zurückkehren, an der anderen Seite hinansteigen, dann wieder

umkehren und in dieser Weise fortfahren, um den tiefsten Punkt des Kreises herum Schwingungen auszuführen. Eine solche schwingende Bewegung wird z. B. eine Kugel ausführen, wenn dieselbe durch einen Faden oder eine Stange mit einem festen Punkte verbunden, ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt und dann der Wirkung der Schwere überlassen wird. Je mehr der Faden oder die Stange als eine gewichtlose Linie, und die Kugel ihrer Kleinheit wegen als ein materieller Punkt betrachtet werden darf, um so mehr wird eine solche Vorrichtung dem Begriffe des „einfachen“ oder „mathematischen Pendels“ entsprechen.

Fig. 96.



In dem Augenblicke, wo der Elongations-Winkel — d. h. der Winkel, den das Pendel mit der verticalen Gleichgewichtslage einschliesst — gleich φ ist, beträgt die Tangential-Beschleunigung des materiellen Punktes (nach Fig. 96):

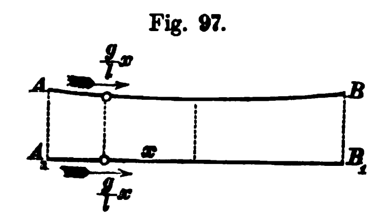
$$\frac{mg \sin \varphi}{m} = g \sin \varphi = \frac{g}{l}\, x.$$

Diese Beschleunigung ändert sich also proportional der Horizontal-Entfernung x von der Gleichgewichtslage und nimmt für $x = 1$ den Werth an:

$$92) \quad q = \frac{g}{l}.$$

Denkt man sich einen anderen materiellen Punkt statt des Bogens AB die Horizontal-Projection desselben $A_1\, B_1$ (s. Fig. 97) durchlaufend und zwar in der Weise, dass seine Beschleunigung stets der Entfernung x proportional sich ändert und in der Entfernung Eins den Werth q annimmt, so würde derselbe zum Durchlaufen des Weges $A_1\, B_1$ nach Gleichung 70) die Zeit gebrauchen:

Fig. 97.



$$t = \frac{\pi}{\sqrt{q}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Der den Bogen durchlaufende Punkt hat zwar einen etwas längeren Weg zurückzulegen und wird deshalb etwas mehr Zeit gebrauchen, doch wird der Unterschied um so kleiner sein, je geringer die Abweichung der Bogenbahn von der Horizontal-Bahn, d. h. je kleiner der ganze Schwingungswinkel ist. Bei sehr kleinem Schwingungswinkel kann daher die Gleichung:

$$93)\quad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

als annähernd auch für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels gültig angesehen werden, und zeigt, dass annähernd auch für Pendelschwingungen der Satz gilt: die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Schwingungsweite.

Die Gleichung 93) kann benutzt werden, um irgend eine von den drei in ihr vorkommenden Grössen zu bestimmen, sobald die beiden anderen schon anderweitig bekannt sind. Sie kann z. B. für g aufgelöst:

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2},$$

zur Berechnung der Fallbeschleunigung dienen, wenn die beiden Grössen t und l durch Beobachtungen direct gefunden wurden. So giebt dieselbe ferner, für l aufgelöst:

$$l = \frac{g t^2}{\pi^2}$$

die Länge an, welche das Pendel haben muss, wenn die Schwingungsdauer t Secunden betragen soll. Setzt man z. B. in der letzteren Gleichung $t = 1$, so erhält man die Länge des Secunden-Pendels:

$$L = \frac{g}{\pi^2} = 0^{\mathrm{m}},994.$$

§ 35.

Anwendung auf die Bestimmung von Krümmungshalbmessern.

Zerlegt man die Mittelkraft sämmtlicher auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte in zwei Seitenkräfte, von denen die eine in der Richtung der Bahnlinie, die andere rechtwinkelig zu derselben nach dem Krümmungsmittelpunkte hin wirkt, so bildet die letztere die Centripetal-Kraft, und kann für dieselbe stets der in den Gleichungen 86) und 87) des § 33 gefundene Werth:

$$\frac{m v^2}{\varrho}$$

gesetzt werden. Die Centripetal-Beschleunigung ist gleich der Centripetal-Kraft dividirt durch die Masse, also:

$$94)\quad p = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Wie man aus dieser Gleichung die Centripetal-Beschleunigung p bestimmen kann, wenn die Geschwindigkeit v und der Krümmungshalbmesser ϱ gegeben sind, so kann dieselbe auch umgekehrt zur Berechnung der Grösse ϱ dienen, sobald die Grösse p aus anderweitig bekannten Eigenschaften der Bewegung sich bestimmen lässt.

In vielen Fällen kann man für die Untersuchung einer krummlinigen Bewegung durch Zerlegung derselben in ihre Seitenbewegungen vereinfachende Gesichtspunkte gewinnen, wie schon die Theorie der parabolischen Bewegungen als Beispiel zeigte. Wenn man die Beschleunigung p dann das eine Mal aus den Seitenbewegungen, das andere Mal mittelst der Gleichung 94) aus der resultirenden Bewegung bestimmt, so erhält man durch Gleichsetzung beider Werthe eine Gleichung für den Krümmungshalbmesser der Bahnlinie.

Wenn ein materieller Punkt eine Kreislinie vom Halbmesser r in gleichförmiger Bewegung mit der Geschwindigkeit u durchläuft, so ist die Centripetal-Beschleunigung:

$$95)\quad p = \frac{u^2}{r}.$$

Wenn gleichzeitig die Ebene des Kreises eine geradlinig fortschreitende gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c ausführt, so kommt durch diese zweite Bewegung **keine** neue Beschleunigung zu der vorigen hinzu. Folglich hat auch die resultirende Bewegung noch die Beschleunigung $\frac{u^2}{r}$.

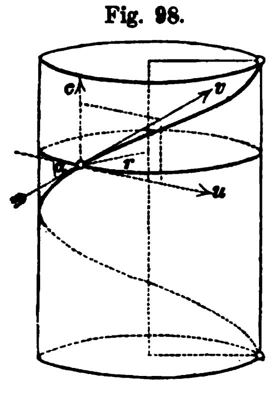
Schraubenlinie.

Die Bahnlinie der resultirenden Bewegung wird eine Schraubenlinie, wenn die Geschwindigkeit c rechtwinkelig zur Ebene des Kreises gerichtet ist. Für die resultirende Geschwindigkeit erhält man (nach Fig. 98) die Gleichung:

$$v^2 = u^2 + c^2 = \left(\frac{u}{\cos\alpha}\right)^2.$$

Da u und c constant sind, so ist auch v constant; der Punkt durchläuft also die Schraubenlinie in gleichförmiger Bewegung. Die

Fig. 98.



Centripetal-Beschleunigung der Schraubenlinien-Bewegung muss gleich der Centripetal-Beschleunigung der Kreisbewegung sein. Wenn also mit ϱ der Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie bezeichnet wird, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{u^2}{r},$$

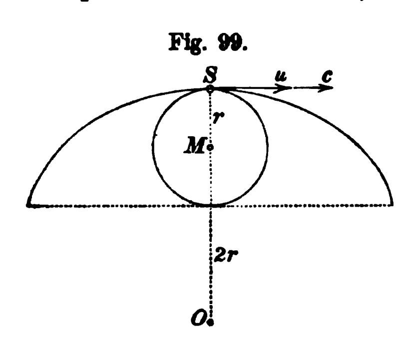
welche nach Substitution des für v^2 gefundenen Werthes für ϱ aufgelöst die Form annimmt:

$$96)\quad \varrho = \frac{r}{\cos \alpha^2}.$$

Cycloide.

Die Bahnlinie der resultirenden Bewegung wird eine Cycloide, wenn die Richtungslinie der fortschreitenden Bewegung in die Ebene der Kreislinie hineinfällt; eine gemeine Cycloide, wenn zugleich die beiden Geschwindigkeiten u und c gleiche Grössen haben. Die Richtung der Beschleunigung $\frac{u^2}{r}$ geht stets durch den Mittelpunkt M der Kreislinie, fällt also in dem Augenblicke, wo die beiden Geschwindigkeiten u und c gleiche Richtung haben, ihrer Grösse und Richtung nach zusammen mit der Centripetal-Beschleunigung der Cycloiden-Bewegung (siehe Fig. 99). Die Gleichsetzung der beiden Centripetal-Beschleunigungen:

Fig. 99.



$$\frac{(u+c)^2}{\varrho} = \frac{u^2}{r}$$

ergiebt für den Krümmungshalbmesser der Cycloide im Scheitelpunkte die Gleichung:

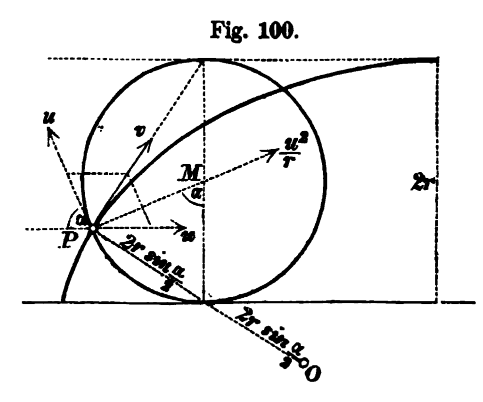
$$97)\quad \overline{OS} = \varrho = r \cdot \frac{(u+c)^2}{u^2},$$

welche für die gemeine Cycloide die Form annimmt:

$$\varrho = r\,\frac{(2\,u)^2}{u^2} = 4\,r.$$

Um für eine beliebige andere Stelle P den Krümmungshalbmesser der gemeinen Cycloide zu bestimmen, würde man die nach dem Punkte M hin gerichtete resultirende Beschleunigung $\frac{u^2}{r}$ in zwei Seitenbeschleunigungen zu zerlegen haben, von denen die eine mit der Richtung der resultirenden Geschwindigkeit v, die andere mit der Richtung des Krümmungshalbmessers PO zusammenfällt, und die letztere dann der Centripetal-Beschleunigung der Cycloiden-Bewegung gleichzusetzen haben. Aus Fig. 100 findet man für die Seitenbeschleunigung in der Richtung PO den Werth:

Fig. 100.



$$\frac{u^2}{r}\sin\frac{\alpha}{2},$$

und für die Centripetal-Beschleunigung der Cycloiden-Bewegung den Werth:

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{\left(2u\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\varrho}.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe erhält man für den Krümmungshalbmesser ϱ die Gleichung:

$$98)\quad \overline{OP} = \varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Parabel.

Die gegebene Parabel kann angesehen werden als eine nach dem Gesetze der parabolischen Bewegung beschriebene Bahnlinie (vergl. § 14 und § 25). Die Anfangsgeschwindigkeit c (im Scheitelpunkte S) und die constante Beschleunigung p dieser parabolischen Bewegung müssen so beschaffen sein, dass die Gleichung ihrer Bahnlinie (vergl. § 14 Gleichung 29):

$$99)\quad y^2 = \frac{2c^2}{p}x$$

mit der gegebenen Gleichung der Parabel:

$$100)\quad y^2 = Ax$$

übereinstimmt; d. h. die Grössen c und p müssen der Bedingung entsprechen:

$$101)\quad \frac{2c^2}{p} = A.$$

Um für irgend eine Stelle P den Krümmungshalbmesser $\overline{OP} = \varrho$ zu bestimmen, zerlegt man die Beschleunigung p in ihre beiden Seitenbeschleunigungen tangential und normal zur Bahnlinie und setzt die letztere gleich der Centripetal-Beschleunigung. Nach Fig. 101 führt dies zunächst zu der Gleichung:

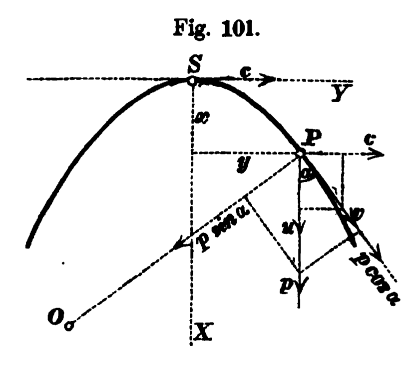


Fig. 101.

$$102) \quad p \sin \alpha = \frac{v^2}{\varrho},$$

welche nach Substitution des Werthes $v = \frac{c}{\sin \alpha}$ für ϱ aufgelöst die Form annimmt:

$$103) \quad \varrho = \frac{c^2}{p \sin \alpha^3}.$$

Für die Geschwindigkeit v ergiebt sich nach dem Principe der lebendigen Kraft der Werth:

$$104) \quad v = \sqrt{c^2 + 2px},$$

und mit Benutzung desselben kann man die Grösse $\sin \alpha$ nunmehr berechnen aus der Gleichung:

$$105) \quad \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 2px}}.$$

Wenn man z. B. $p = g = 9{,}81$ und $A = 10$ setzt, so wird nach Gleichung 101): $c = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 10}{2}} = 7^{\mathrm{m}}$. Wenn ferner: $x = 20^{\mathrm{m}}$ gesetzt wird, d. h. wenn für diejenige Stelle, deren Abscisse gleich 20^{m} ist, der Krümmungshalbmesser berechnet werden soll, so erhält man die Werthe:

$$v = \sqrt{7^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 20} = 21^{\mathrm{m}}, \quad \sin \alpha = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{7^2}{9{,}81 \left(\frac{1}{3}\right)^3} = 135^{\mathrm{m}}.$$

ACHTES CAPITEL.

Relative Bewegung des materiellen Punktes.

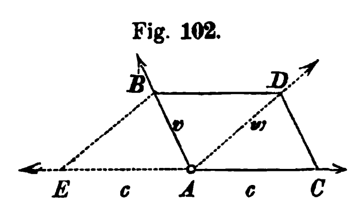
§ 36.

Relative Bewegung im gleichförmig fortschreitenden Raume.

Wenn ein materieller Punkt mit der Geschwindigkeit v eine geradlinige gleichförmige Bewegung ausführt, und der Raum, in welchem diese Bewegung geschieht, gleichzeitig in irgend einer

anderen Richtung mit der Geschwindigkeit c geradlinig fortschreitet, so ist die wirkliche oder absolute Geschwindigkeit w des materiellen Punktes die Resultirende jener beiden Geschwindigkeiten und wird ihrer Grösse und Richtung nach durch die Diagonale AD des aus den beiden Geschwindigkeiten v und c construirten Parallelogrammes $ABDC$ dargestellt (Fig. 102). Im Gegensatze zu dieser absoluten Geschwindigkeit w wird jene Geschwindigkeit v die **relative** Geschwindigkeit in Beziehung auf den fortschreitenden Raum genannt — auch wohl die scheinbare Geschwindigkeit, insofern einem mit dem Raume sich fortbewegenden Beobachter, der von seiner eigenen Bewegung Nichts merkte, jene Geschwindigkeit als die wirkliche Geschwindigkeit des materiellen Punktes erscheinen würde.

Fig. 102.



Um aus den beiden gegebenen Geschwindigkeiten w und c die relative Geschwindigkeit v zu bestimmen, müsste man also die wahre Geschwindigkeit w in zwei Seitengeschwindigkeiten zerlegen und zwar auf solche Weise, dass eine von beiden ihrer Grösse und Richtung nach mit der gegebenen Geschwindigkeit c übereinstimmte; die andere Seitengeschwindigkeit würde dann die gesuchte relative Geschwindigkeit sein. Eine solche Zerlegung lässt sich indessen auch zurückführen auf eine Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten. Wie nämlich die **Seite** AB des Parallelogramms $ABDC$ auch betrachtet werden kann als **Diagonale** eines anderen Parallelogramms $AEBD$, dessen eine Seite AE entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse mit der Seite AC hat, so kann die relative Geschwindigkeit v auch angesehen werden als Resultirende von folgenden zwei Geschwindigkeiten: die eine ist die wahre Geschwindigkeit des materiellen Punktes, die andere ist die entgegengesetzt genommene Geschwindigkeit des fortschreitenden Raumes. Es ergiebt sich hieraus folgende Regel für die Bestimmung der relativen Geschwindigkeit:

Man füge zu der wahren Geschwindigkeit noch die entgegengesetzt genommene Geschwindigkeit des fortschreitenden Raumes hinzu und bestimme dann die Resultirende von diesen beiden Geschwindigkeiten.

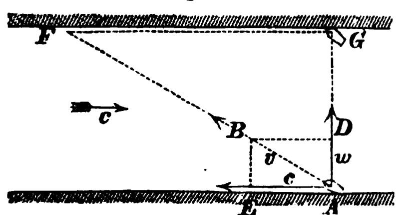
Soll z. B. in einem mit der Geschwindigkeit c fliessenden Wasser die wahre Bewegung eines Kahnes oder eines Schwimmers rechtwinkelig zur Stromrich-

tung mit der Geschwindigkeit w geschehen, so muss die relative Bewegung in Bezug auf die bewegte Wasseroberfläche in der Richtung der Diagonale AB des aus den Geschwindigkeiten w und $-c$ construirten Parallelogrammes $ADBE$ geschehen (Fig. 103), und zwar mit der Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{w^2 + c^2}.$$

Die Arbeit des Hinüber-Ruderns oder -Schwimmens würde gerade so gross sein, wie wenn eine Strecke AF in stillstehendem Wasser mit gleicher Geschwindigkeit zurückgelegt würde; die aufzuwendende Anstrengung also um so grösser ausfallen, je grösser die Stromgeschwindigkeit ist.

Fig. 103.



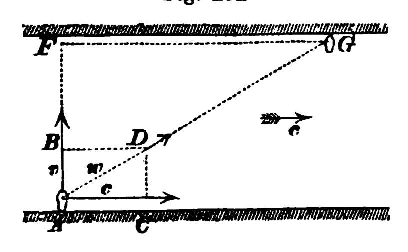
Für die Ueberfahrtsdauer t erhält man, wenn mit b die Strombreite bezeichnet wird, die Gleichung:

$$t = \frac{b}{w} = \frac{b}{\sqrt{v^2 - c^2}}.$$

Es würde also z. B. wenn $b = 1200^m$, $v = 2^m$, $c = 1^m,6$ ist, die Ueberfahrtsdauer $t = \frac{1200}{\sqrt{2^2 - 1,6^2}} = 1000$ Secunden betragen. Wäre dagegen $v < c$, so würde t imaginär, d. h. es würde in diesem Falle überhaupt nicht möglich sein, den Punkt G von dem Punkte A aus auf geradem Wege zu erreichen.

Wenn statt dessen die relative Bewegung rechtwinkelig zur Stromrichtung geschieht (Fig. 104), so wird zwar die wirklich zurückgelegte Strecke AG um so länger ausfallen, je grösser die Stromgeschwindigkeit ist. Da aber die Arbeit des Ruderns oder des Schwimmens nur von der in Bezug auf die bewegte Wasserfläche ausgeführten relativen Bewegung abhängt, so hat in diesem Falle die Stromgeschwindigkeit gar keinen Einfluss auf die Gesammt-Anstrengung. Handelt es sich also nur darum, überhaupt das jenseitige Ufer zu erreichen — wenn auch nicht an der gerade gegenüberliegenden Stelle — so macht es hinsichtlich der erforderlichen Anstrengung durchaus keinen Unterschied, ob ein stillstehendes Wasser oder ein reissender Strom die beiden Ufer trennt.

Fig. 104.

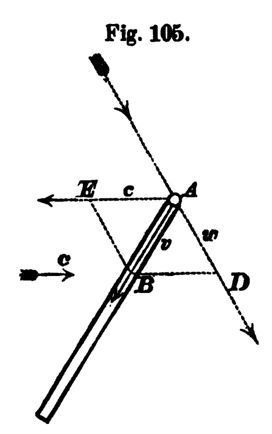


Es würde z. B. bei den im vorigen Falle angenommenen Zahlenwerthen $b = 1200^m$, $v = 2^m$ die Ueberfahrtsdauer unabhängig von der Stromgeschwindigkeit c unter allen Umständen die Grösse $t = \frac{b}{v} = \frac{1200}{2} = 600$ Secunden haben.

Die Richtung, welche einem mit der Geschwindigkeit c fortschreitenden Rohre gegeben werden muss, wenn eine in der Richtung AD mit der Geschwindigkeit w sich bewegende Kugel die Achsenrichtung des Rohres durchlaufen

soll, ohne die innere Wandfläche desselben zu berühren, findet man, indem man die Diagonale AB des aus den Geschwindigkeiten w und $-c$ gebildeten Parallelogramms $ADBE$ construirt (Fig. 105). Genau auf dieselbe Weise kann man die Richtung bestimmen, welche dem Fernrohre eines an der fortschreitenden Bewegung der Erde theilnehmenden Beobachters gegeben werden muss, damit dasselbe den von einem Fixsterne S ausgesendeten Lichtstrahl auffange (Fig. 106). Das Fernrohr muss mit der Verbindungslinie AS zwischen Erde und Fixstern einen Winkel α einschliessen, welcher für den Augenblick, in welchem die Bewegungsrichtung der Erde rechtwinkelig zu jener Verbindungslinie steht, zu bestimmen ist aus der Gleichung:

Fig. 105.



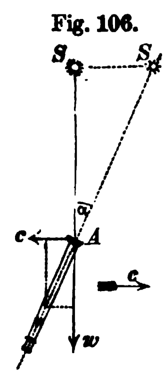
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{w}.$$

Die Geschwindigkeit w des Lichtstrahls beträgt ungefähr 40 000 Meilen pro Secunde und die mittlere Geschwindigkeit c, mit welcher die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne sich bewegt, beträgt ungefähr 4 Meilen pro Secunde. Es ist also ungefähr:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}0001, \quad \text{oder:} \quad \alpha = 20 \text{ Sec.}$$

Da dem Beobachter diejenige Stelle des Himmels, nach welcher das Fernrohr zeigt, der Ort des Fixsterns zu sein scheint, so wird für ihn der Stern nicht an seinem wirklichen Orte S, sondern an der Stelle S_1 zu stehen scheinen, also nach derjenigen Seite hin verschoben, nach welcher die Bewegung der Erde gerichtet ist. Diese von der fortschreitenden Bewegung der Erde herrührende Abweichung des scheinbaren Ortes von dem wahren Orte eines Fixsternes wird die Aberration des Lichtes genannt. Da die Bewegungsrichtung der Erde während ihres Umlaufes um die Sonne beständig sich ändert, so ist auch die Verschiebung des scheinbaren Ortes eines Fixsternes in beständiger Aenderung begriffen. In Folge dessen beschreibt der scheinbare Ort eines jeden Fixsternes im Laufe eines Jahres eine Ellipse, deren Mittelpunkt der wahre Ort des Sternes ist; für Sterne, welche in der Ebene der Erdbahn liegen, geht diese Ellipse in eine gerade Linie über, und für einen Stern, welcher in der Achse der Erdbahn (im Pole der Ekliptik) sich befindet, wird die Ellipse eine Kreislinie.

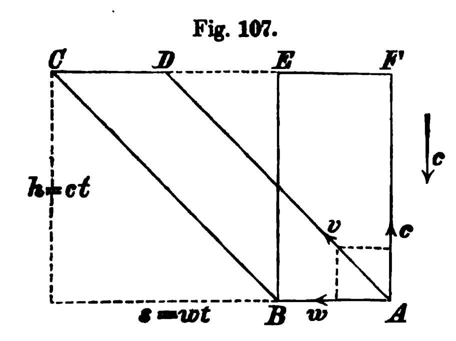
Fig. 106.



Eine horizontale Platte AB, welche in horizontaler Richtung mit der constanten Geschwindigkeit w sich bewegt, hat in Bezug auf die senkrecht mit der (constant vorausgesetzten) Geschwindigkeit c herabfallenden Regentropfen eine relative Geschwindigkeit v, welche man erhält, indem man aus der Geschwindigkeit w und der entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit c die Resultirende bildet (Fig. 107). Während der Zeit t fängt die Platte alle diejenigen Regentropfen auf, welche zu Anfang dieses Zeitraumes in dem prisma-

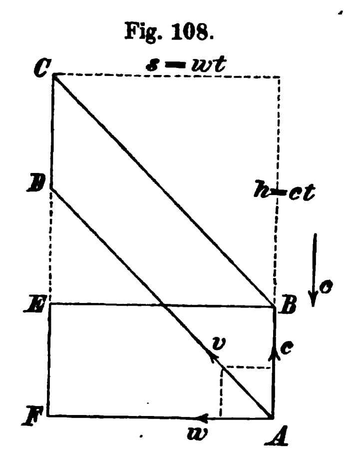
tischen Raume $ABCD$ enthalten waren, also in einem Prisma, welches denselben Rauminhalt hat wie das Prisma $ABEF$. Die Regenmenge, welche die Platte während der Zeit t auffängt, ist also unabhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher die Platte sich bewegt, und stets gleich derjenigen Regenmenge, welche die ruhende Platte während dieses Zeitraumes auffangen würde.

Fig. 107.



Eine verticale Platte, welche in horizontaler Richtung mit der constanten Geschwindigkeit w sich bewegt, fängt während Zurücklegung der Strecke s alle diejenigen Regentropfen auf, welche zu Anfang der Bewegung in dem Prisma $ABCD$ enthalten waren (Fig. 108), also in einem Prisma, welches denselben Rauminhalt hat wie das Prisma $ABEF$. Die während Zurücklegung der Strecke s aufgefangene Regenmenge ist also unabhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher die Platte sich bewegt.

Fig. 108.



Bei horizontaler gleichförmiger Bewegung sind also die von einer horizontalen Fläche pro Zeiteinheit aufgefangene Regenmenge und die von einer verticalen Fläche pro Längeneinheit der Bewegung aufgefangene Regenmenge beide vollkommen unabhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher die Fläche sich bewegt.

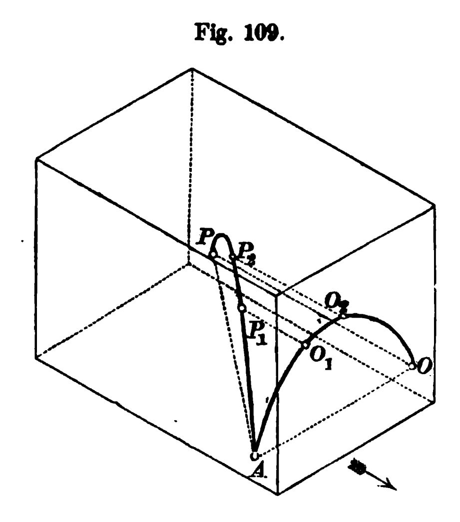
Der Satz von der relativen Geschwindigkeit gilt auch für ungleichförmige und krummlinige fortschreitende Bewegungen: denn das Wort „Geschwindigkeit" bezieht sich (wie in Cap. II. und Cap. III. erklärt wurde) allemal auf eine gleichförmige geradlinige Bewegung, und zwar diejenige, mit welcher die betreffende ungleichförmige Bewegung am meisten übereinstimmt in einem bestimmten Zeitpunkte. Wenn also für diesen bestimmten Zeitpunkt die relative Geschwindigkeit in Beziehung auf den fortschreitenden Raum gesucht wird, so findet man dieselbe, indem man von der wahren Geschwindigkeit und von der entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit des fortschreitenden Raumes für diesen Zeitpunkt die Resultirende bildet.

Ferner bleibt der bewiesene Satz auch dann noch gültig,

wenn das Wort „Geschwindigkeit" mit dem Worte „Bewegung" vertauscht wird. Man bestimmt die relative Bewegung und den relativen Ort, indem man die Bahnstrecke, um welche der fortschreitende Raum inzwischen vorgerückt ist, in entgegengesetztem Sinne genommen von dem wahren Orte aus abträgt.

So findet man z. B. die Bahnlinie der relativen Bewegung eines geworfenen Körpers in Beziehung auf einen fortschreitenden Raum (etwa eines Steines, der in das eine Fenster eines im Fahren begriffenen Wagens hinein und aus dem anderen wieder hinausfliegt), indem man die den einzelnen Zeitpunkten entsprechenden relativen Orte nach und nach auf die eben angegebene Weise aufsucht (Fig. 109). Man findet den nach der Zeit t_1 erreichten relativen Ort P_1, indem man von dem nach dieser Zeit erreichten wirklichen Orte O_1 aus eine Strecke $O_1 P_1$ abträgt, welche entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse hat mit derjenigen Strecke, um welche in der Zeit t_1 der Wagen vorgerückt ist. Auf gleiche Weise sind die nach den Zeiten t_2, t_3 ... erreichten relativen Orte P_2, P_3 ... zu bestimmen; die Verbindungslinie aller dieser Punkte bildet die Bahnlinie der relativen Bewegung.

Fig. 109.



§ 37.

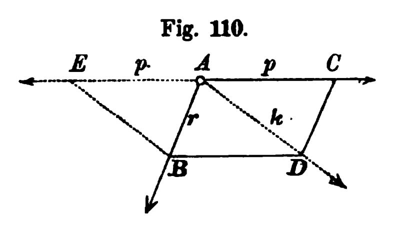
Relative Bewegung im ungleichförmig fortschreitenden Raume.

Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz von der relativen Geschwindigkeit behält auch dann noch seine Gültigkeit, wenn das Wort „Geschwindigkeit" mit dem Worte „Beschleunigung" vertauscht wird, und kann in dieser Form benutzt werden zur Bestimmung der relativen Bewegung in einem mit Beschleunigung (geradlinig oder krummlinig) fortschreitenden Raume.

Wenn ein materieller Punkt eine Bewegung mit der Beschleunigung r ausführt in einem Raume, welcher selbst wiederum mit der Beschleunigung p fortschreitet, so ist seine wirkliche Beschleunigung k die Resultirende von r und p, folglich durch die Diagonale des aus den beiden Beschleunigungen r und p construirten

Parallelogramms $ACDB$ darzustellen (Fig. 110). Die Seite AB dieses Parallelogramms bildet zugleich die Diagonale des Parallelogramms $ADBE$; die relative Beschleunigung r kann daher betrachtet werden als die Resultirende von folgenden zwei Beschleunigungen: die eine k ist die wahre Beschleunigung des materiellen Punktes, die andere ist die in entgegengesetzter Richtung genommene Beschleunigung p des fortschreitenden Raumes.

Fig. 110.



Wenn k die wahre (oder absolute) Beschleunigung eines materiellen Punktes von der Masse m ist, so hat die wahre auf denselben wirkende Totalkraft jedenfalls die Grösse:

$$mk = K.$$

Auf gleiche Weise sind die den beiden Seitenbeschleunigungen r und p entsprechenden Kräfte ihrer Grösse nach auszudrücken durch die Producte:

$$mr = R \quad \text{und} \quad mp = P,$$

während die Richtungen dieser Kräfte mit den Richtungen der ihnen entsprechenden Beschleunigungen zusammenfallen.

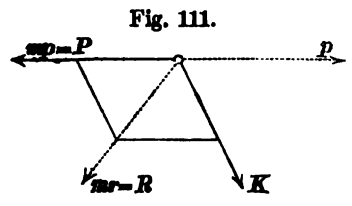
Was insbesondere die Kraft R betrifft, so hat dieselbe folgende Bedeutung: es ist diejenige Kraft, welche in einem ruhenden Raume dem materiellen Punkte eine Bewegung ertheilen würde, die genau übereinstimmt mit seiner relativen Bewegung in Bezug auf den fortschreitenden Raum. Diese Kraft R kann demnach die relative Kraft genannt werden, oder auch die scheinbare Kraft, insofern ein an der Bewegung des fortschreitenden Raumes theilnehmender, von seiner eigenen Bewegung Nichts merkender Beobachter statt der wahren Kraft K die Kraft R als die auf den materiellen Punkt wirkende Totalkraft ansehen würde.

Hiernach lässt sich in dem Satze von der relativen Beschleunigung das Wort „Beschleunigung" auch durch das Wort „Kraft" ersetzen; und ergiebt sich für die Bestimmung der relativen Bewegung im ungleichförmig fortschreitenden Raume die folgende Regel:

Man betrachte den fortschreitenden Raum als ruhend, füge die seiner Beschleunigung p entsprechende, aber entgegengesetzt genommene Kraft $mp = P$ zu der wahren

auf den materiellen Punkt wirkenden Totalkraft K noch hinzu und bestimme nunmehr von diesen beiden Kräften P und K die Mittelkraft R. Die von dieser Kraft R hervorgebrachte Bewegung ist die gesuchte relative Bewegung in Beziehung auf den fortschreitenden Raum (Fig. 111).

Fig. 111.



Die relative Bewegung eines freifallenden Körpers in Bezug auf einen mit der Beschleunigung p fortschreitenden Raum geschieht gerade so, wie wenn eine dieser Beschleunigung entgegengerichtete Kraft mp noch ausser dem Gewichte mg auf den Körper wirkte. Ist die Beschleunigung p vertical abwärts gerichtet, so geschieht die relative Fallbewegung gerade so, als ob (statt des wirklichen Gewichtes) eine Kraft:

$$R = mg - mp,$$

welche das relative (oder scheinbare) Gewicht genannt werden kann, auf den Körper wirkte. Die relative Fallbeschleunigung ist daher in diesem Falle:

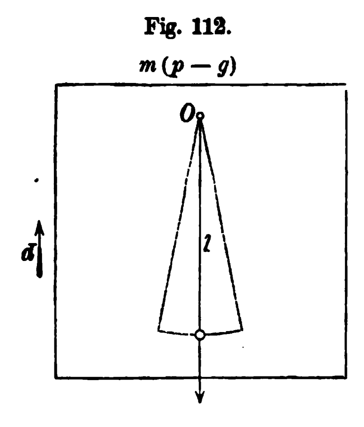
$$r = g - p.$$

Wenn hierbei p grösser wäre als g, so würde r negativ, d. h. die relative Fallbewegung würde alsdann von unten nach oben gerichtet sein und in dieser Richtung mit der Beschleunigung $p - g$ vor sich gehen. Eine an dem Punkte O mittelst eines Fadens aufgehängte Kugel würde in einem so beschleunigten Raume nach oben hin hängen, und der Faden dabei mit der Kraft $m(p - g)$ gespannt sein (Fig. 112). Aus dieser relativen Gleichgewichtslage ein wenig entfernt und dann losgelassen, würde ein solches Pendel Schwingungen ausführen, deren Dauer nach Gleichung 93) annähernd die Grösse:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{p - g}}$$

haben würde. Ein in diesem Raume stehend die Schwingungen Beobachtender würde den Kopf nach unten und die Füsse nach oben wenden.

Fig. 112.



Wenn dagegen die Beschleunigung p des fortschreitenden Raumes von unten nach oben gerichtet ist, so ergeben sich für das relative Gewicht und die relative Fallbeschleunigung resp. die Werthe:

$$R = m(g + p), \quad r = g + p.$$

Hat die Beschleunigung p des fortschreitenden Raumes eine horizontale Richtung z. B. von links nach rechts, so ist eine Kraft mp in der Richtung von rechts nach links hinzuzufügen, man erhält daher (nach Fig. 113) für relatives Gewicht und relative Fallbeschleunigung resp. die Werthe:

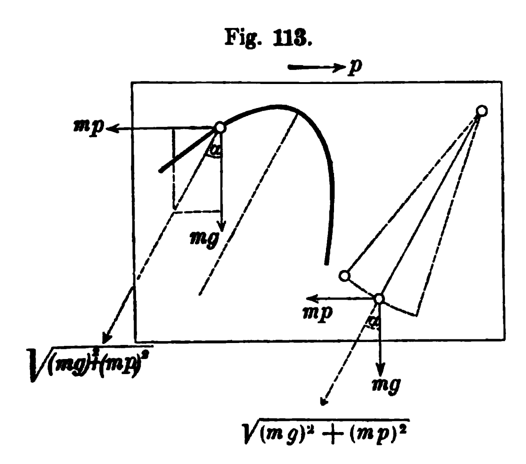
$$R = m\sqrt{g^2 + p^2}, \qquad r = \sqrt{g^2 + p^2}$$

und die Richtungen derselben würden zu bestimmen sein aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{g}.$$

Die Bahnlinie der relativen Bewegung eines geworfenen Körpers würde in einem so beschleunigten Raume eine Parabel sein, deren Achse den Winkel α mit der Verticalen einschliesst, und die Gleichungen dieser relativen Wurfbewegung würden sich aus den in § 24 gefundenen Gleichungen ergeben, wenn man darin überall $\sqrt{g^2 + p^2}$ statt g substituirt.

Fig. 118.



Ein in diesem Raume aufgehängtes Pendel würde in seiner relativen Gleichgewichtslage ebenfalls den Winkel α mit der Verticalen einschliessen, und um die Schwingungsdauer desselben zu erhalten, würde man in Gleichung 93) ebenfalls statt g den oben für die relative Fallbeschleunigung r gefundenen Werth zu substituiren haben, also ist:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{r}}.$$

Die relative Kraft ist bedingt durch die **Beschleunigung** des fortschreitenden Raumes; sie ist dagegen vollkommen unabhängig von der Richtung und Grösse der **Geschwindigkeit**, mit welcher der Raum sich zur Zeit bewegt. Sobald man aus der wahren Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes und aus der Anfangsgeschwindigkeit des fortschreitenden Raumes — nach den in § 36 gefundenen Regeln — die relative Anfangsgeschwindigkeit bestimmt hat, kann man, wenn nur die relative Kraft für jeden Augenblick bekannt ist, die weitere Fortsetzung der relativen Bewegung behandeln, ohne auf die **Geschwindigkeit** des fortschreitenden Raumes irgend weitere Rücksicht zu nehmen; d. h. man kann den Raum fortan als ruhend ansehen.

Welcher Art auch immer die wahre Bewegung eines von Kräften getriebenen materiellen Punktes sein möge: derselbe kann stets als in relativem Ruhezustande (mithin auch in relativem Gleichgewichtszustande) sich befindend angesehen werden, und zwar in Bezug auf einen fortschreitenden Raum, welcher genau

dieselbe Bewegung ausführt. Jeder materielle Punkt befindet sich in relativem Gleichgewichtszustande in Bezug auf seinen eigenen Ort. Wenn einem Körper von der Masse m die Beschleunigung p ertheilt wird durch eine mittelst eines Fadens auf ihn übertragene Zugkraft Z, so kann man diese Bewegung als relativen Gleichgewichtszustand auffassen, bei welchem die Zugkraft Z durch eine entgegengesetzt gerichtete Kraft mp relativ aufgehoben wird. Der Faden wird dabei gerade so gespannt, wie wenn derselbe ruhte, und der Zugkraft Z ein Widerstand:

$$W = mp$$

entgegenwirkte. Da diese Kraft der trägen Masse des Körpers proportional ist und überhaupt in der Eigenschaft der Trägheit ihren Ursprung hat, so kann man dieselbe den Trägheitswiderstand des Körpers nennen. In gleichem Sinne ist es zulässig, auch bei der relativen Bewegung des Körpers in Beziehung auf irgend einen anderen beschleunigten Raum eine der Beschleunigung p dieses Raumes entsprechende, aber entgegengesetzt genommene Kraft mp abkürzungsweise mit dem Worte Trägheitswiderstand zu bezeichnen, wobei jedoch stets in Erinnerung zu behalten ist, dass dieses Wort nicht eine wirklich vorhandene Kraft bezeichnet, sondern dass dieser Benennung die Auffassung der Bewegung als einer relativen Bewegung zu Grunde liegt.

In diesem Sinne darf man dem oben bewiesenen Satze von der relativen Kraft auch die folgende kürzere Fassung geben:

Die relative Kraft ist die Mittelkraft aus der wahren Kraft und dem Trägheitswiderstande.

§ 38.

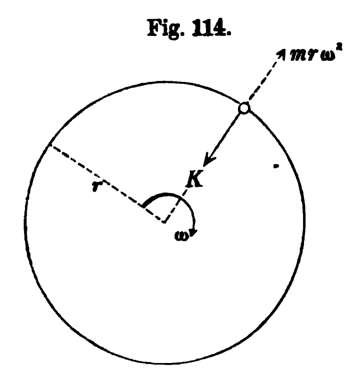
Relatives Gleichgewicht im gleichförmig sich drehenden Raume.

Centrifugal-Kraft. Schwungkugel-Regulator. Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung.

Die wahre Bewegung eines materiellen Punktes, welcher in einem gleichförmig sich drehenden Raume seinen relativen Ort nicht ändert, also in relativem Ruhezustande sich befindet, ist eine gleichförmige Kreisbewegung. Wenn ein materieller Punkt eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt, so bildet die Mittelkraft aller auf denselben einwirkenden Kräfte stets die nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtete Centripetal-Kraft (§ 27). Wenn also m die Masse des materiellen Punktes, r die Entfernung des-

selben von der Drehachse, ω die Drehgeschwindigkeit des Raumes ist (Fig. 114), so hat die wahre auf den materiellen Punkt wirkende Totalkraft nach Gleichung 64) die Grösse:

Fig. 114.



$$K = m r \omega^2$$

und wirkt in der Richtung nach dem Mittelpunkte der Kreisbahn. Da der materielle Punkt zugleich in Bezug auf den bewegten Raum in relativem Gleichgewichtszustande sich befindet, so kann man diese Kraft K als durch eine entgegengesetzt gerichtete Kraft von gleicher Grösse $m r \omega^2$ relativ aufgehoben ansehen. Diese letztere Kraft ist in der Richtung des Halbmessers nach aussen gerichtet und wird Centrifugal-Kraft genannt.

Ein materieller Punkt, welcher im gleichförmig sich drehenden Raume seinen relativen Ort nicht verlässt, wird also von der Centripetal-Kraft und der Centrifugal-Kraft im relativen Gleichgewicht gehalten.

Die Centrifugal-Kraft ist die der Centripetal-Beschleunigung des relativen Ortes entsprechende, aber in entgegengesetzter Richtung genommene Kraft, bildet also (nach § 37) den Trägheitswiderstand des materiellen Punktes für diesen Fall. Sie ist — wie überhaupt die Trägheitswiderstände — nicht als eine wirklich vorhandene, sondern nur als eine scheinbar wirkende Kraft aufzufassen, insofern ein an der Bewegung des Raumes theilnehmender, von derselben aber Nichts merkender Beobachter aus der scheinbaren Ruhe des materiellen Punktes den Schluss ziehen würde, dass ausser der wahren nach dem Drehungsmittelpunkte wirkenden Kraft noch eine zweite entgegengesetzt gerichtete Kraft auf denselben wirkt, welche gerade gross genug ist, um jene aufzuheben.

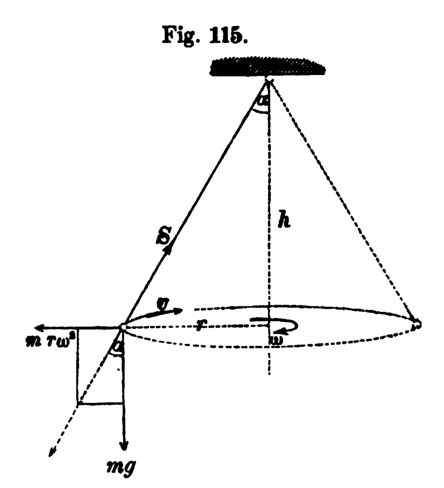
Für das Auffinden der Bedingungen, unter welchen ein im gleichförmig sich drehenden Raume relativ ruhender materieller Punkt seinen relativen Ort nicht verlässt, ergiebt sich hiernach die folgende Regel.

Man betrachte den sich drehenden Raum als ruhend, füge zu der wahren auf den materiellen Punkt wir-

kenden Kraft noch die Centrifugal-Kraft hinzu, und wende alsdann die Bedingungsgleichungen des absoluten Gleichgewichts an.

Die Anwendung dieser Regel auf das in § 27 erklärte und in Fig. 66 dargestellte Centrifugal-Pendel führt zu derselben Bedingungsgleichung, welche dort bereits für den Elongations-Winkel α gefunden wurde. Die am Ende des Fadens hängende Kugel kann angesehen werden als im relativen Gleichgewichtszustande befindlich in Bezug auf einen Raum, welcher mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{r}$ um die Verticale des Aufhängepunktes sich dreht (Fig. 115). Die wahren auf die Kugel wirkenden Kräfte sind das Gewicht der Kugel mg und die Spannung des Fadens S. Fügt man noch die Centrifugal-Kraft $mr\omega^2$ hinzu, so kann man nunmehr die Kugel als unter Einwirkung der drei Kräfte mg, S, $mr\omega^2$ im relativen Gleichgewichtszustande befindlich ansehen. Bedingung des Gleichgewichts ist, dass die Mittelkraft der beiden Kräfte mg und $mr\omega^2$ durch die Spannung des Fadens aufgehoben wird. Man erhält also für den Winkel α, den der Faden mit der Verticalen einschliessen muss, die Bedingungsgleichung:

Fig. 115.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{r}{h}, \quad \text{oder:} \quad h = \frac{g}{\omega^2},$$

welche mit der früher gefundenen Gleichung 59) übereinstimmt, sobald in der letzteren $r\omega$ statt v substituirt wird.

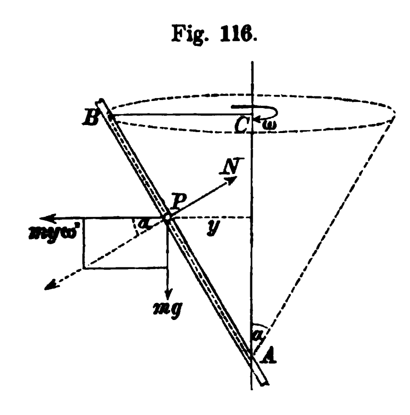
Für ein Centrifugal-Pendel, welches n Umläufe pro Minute macht, würde $\omega = \frac{n}{60} \cdot 2\pi$ zu setzen sein; man erhält also z. B. für $n = 35$ die Werthe: $\omega = 3{,}665$, $h = 0^m{,}73$, und für $n = 40$ die Werthe $\omega = 4{,}1888$, $h = 0^m{,}559$.

Wenn die Kugel in einem Rohre AB eingeschlossen ist, welches, unter dem Winkel α gegen die Verticale geneigt, mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die verticale Drehachse AC sich dreht, so befindet sich die Kugel in derselben Situation, wie wenn sie in dem ruhenden Rohre der Einwirkung der beiden Kräfte mg und $my\omega^2$ ausgesetzt wäre, deren Mittelkraft von dem Gegendruck N des Rohres aufgehoben werden muss, wenn keine Verschiebung längs des Rohres eintreten soll (Fig. 116). Bedingung des Gleichgewichts ist, dass diese Mittelkraft rechtwinkelig zur Richtung des Rohres gerichtet ist; man erhält also die Gleichung:

$$106) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{mg}{my\omega^2} = \frac{g}{y\omega^2}, \quad \text{oder:} \quad y = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass es in dem Rohre nur eine relative Gleichgewichtslage P für die Kugel giebt, insofern ein vorgeschriebener Werth für α einen bestimmten Werth y für die Entfernung der Kugel von der Drehachse erfordert. So z. B. für $\alpha = 45^0$ und $\omega = 3{,}665$ (entsprechend der Umdrehungszahl $n = 35$ pro Minute) erhält man $y = 0^m{,}73$. Sollte jede andere Stelle des Rohres ebenfalls eine Gleichgewichtslage sein, so müsste entsprechend den verschiedenen Werthen von y der Neigungswinkel α des Rohres an den verschiedenen Stellen verschiedene Werthe haben, d. h. das Rohr müsste nach einer bestimmten krummen Linie gekrümmt sein, deren Form auf folgende Weise gefunden werden kann.

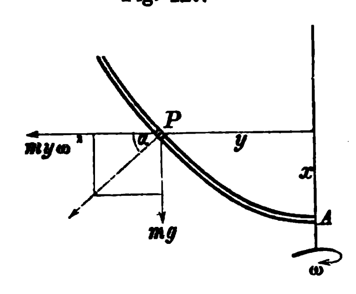
Fig. 116.



Wenn in dem ruhenden Rohre unter Einwirkung der zwei Kräfte mg und $my\omega^2$ die Kugel von A nach P sich bewegte, so würde die Summe der von den beiden Kräften verrichteten mechanischen Arbeiten die Grösse Null haben müssen; denn die Curve soll der Voraussetzung nach so beschaffen sein, dass an jeder Stelle die Mittelkraft jener beiden Kräfte rechtwinkelig zu der Richtung derselben gerichtet ist (Fig. 117). Wenn also mit $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{H}$ resp. die von der verticalen und von der horizontalen Kraft verrichteten Arbeiten bezeichnet werden, so muss die Bedingungsgleichung erfüllt sein:

$$0 = \mathfrak{V} + \mathfrak{H}.$$

Fig. 117.



Die von der constanten Kraft mg verrichtete mechanische Arbeit ist:

$$\mathfrak{V} = -mgx.$$

Die veränderliche Kraft $my\omega^2$ nimmt proportional dem Horizontalwege y zu; die von ihr verrichtete Arbeit lässt sich (nach der in § 21 und Fig. 41 erklärten Methode) durch die Fläche des Dreiecks abc (Fig. 118) graphisch darstellen und beträgt:

$$\mathfrak{H} = \frac{my\omega^2 \,.\, y}{2}.$$

Fig. 118.

Nach Substitution dieser beiden Werthe nimmt die obige Bedingungsgleichung die Form an:

$$0 = -mgx + \frac{my^2\omega^2}{2}, \text{ oder:}$$

$$107) \quad y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\, x.$$

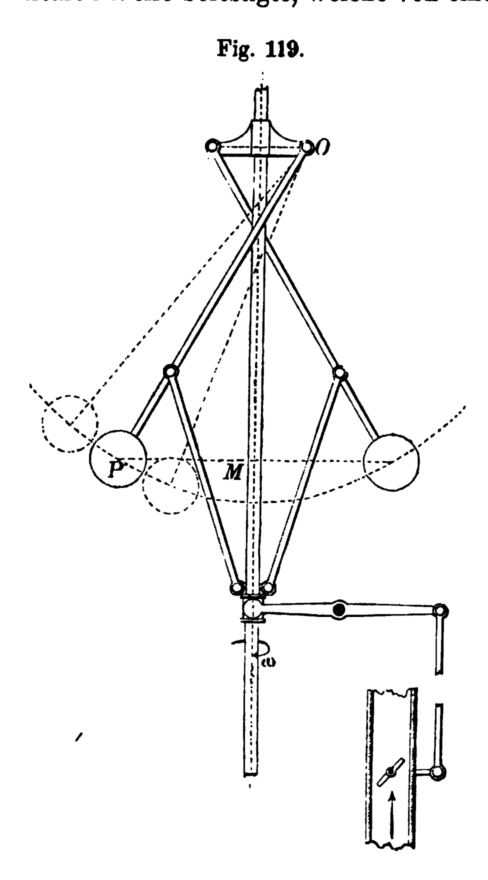
Diese Gleichung zeigt, dass die Krümmungslinie des Rohres eine Parabel sein muss, deren Parameter $\frac{2g}{\omega^2}$ von der Grösse der Drehgeschwindigkeit ω

abhängt. In einem solchen parabolisch gekrümmten Rohre ist demnach jede Stelle eine Gleichgewichtslage für die Kugel, sobald die Drehgeschwindigkeit ω des Rohres genau diejenige Grösse hat, bei welcher die Grösse $\frac{2g}{\omega^2}$ mit dem Parameter der Parabel übereinstimmt. Wenn statt dessen das Rohr mit einer anderen Winkelgeschwindigkeit sich drehte, so würde nunmehr keine Stelle desselben eine Gleichgewichtslage sein. Wäre die Drehgeschwindigkeit etwas zu gross, so würde die Kugel beständig steigen, wäre die Winkelgeschwindigkeit etwas zu klein, so würde die Kugel beständig sinken.

Schwungkugel-Regulator.

Wenn man ein auf solche Art construirtes Rohr an einer verticalen Welle befestigte, welche von einer Kraft-Maschine getrieben wird, und wenn man zugleich auf irgend eine Weise (mittelst Hebel- und Stangenverbindungen) die Kugel mit der Kraft-Quelle derartig in Verbindung setzte, dass die sinkende Bewegung der Kugel ein Oeffnen, die steigende Bewegung der Kugel ein Schliessen der Kraft-Quelle herbeiführte, so würde eine solche Vorrichtung dazu dienen können, die Geschwindigkeit der Kraft-Maschine zu reguliren.

Fig. 119.



Da für solchen Zweck als Bewegungsgebiet der Kugel ein kleines Bogenstück der ganzen Parabel schon ausreicht, so kann — für die Praxis hinreichend genau — statt des Parabelbogens auch ein Kreisbogen genommen werden, dessen Mittelpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkte des Parabelbogens zusammenfällt, und anstatt die Kugel in ein nach diesem Kreisbogen

gekrümmtes Rohr einzuschliessen, kann man dieselbe auch an dem Endpunkte einer leichten Stange befestigen, welche in jenem Krümmungsmittelpunkte O ihren Drehpunkt hat (Fig. 119). Wenn die Kugel nach beiden Seiten hin nur wenig von ihrer mittleren Stellung P sich entfernen kann, so wird sie alsdann nahezu in derselben Situation sich befinden, wie wenn ein parabolisch gekrümmtes Rohr ihre relative Bewegungsbahn bildete.

Bei der Construction eines solchen Regulators sind als gegebene Grössen zu betrachten: erstens, die Drehgeschwindigkeit ω, mit welcher bei normalem Gange der Maschine die verticale Welle sich dreht; zweitens, der mittlere Abstand der Kugel von der verticalen Drehachse, für welchen je nach der Dicke der Welle und der Kugel ein passend scheinender Werth y willkürlich angenommen werden darf. Die zu berechnenden Grössen sind: erstens, der Krümmungshalbmesser $OP = \varrho$ für die betreffende Stelle der Parabel, welcher zugleich die Länge der Kugelstange bildet, zweitens, die Entfernung $ON = \varepsilon$, in welcher der Drehpunkt der Kugelstange von der verticalen Drehachse sich befinden muss (Fig. 120). Zur Berechnung dieser beiden Grössen kann die Gleichungen 107) in Verbindung mit den Gleichungen 99), 103), 105) des § 35 benutzt werden, in welchen letzteren dreien für die willkürlich zu wählende Beschleunigung p auch die Fallbeschleunigung g gesetzt werden darf.

Fig. 120.

Die Gleichung der zu construirenden Parabel ist nach Gleichung 107):

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\,x.$$

Als Gleichung der Bahnlinie einer Wurfbewegung, deren Horizontalgeschwindigkeit c ist, erhält man nach Gleichung 99):

$$y^2 = \frac{2c^2}{g}\,x.$$

Die Gleichsetzung dieser beiden Werthe von y^2 ergiebt für diejenige Grösse, welche die Horizontalgeschwindigkeit c der Wurfbewegung haben muss, wenn die beiden Parabeln gleiche Form haben sollen, die Gleichung:

$$\frac{2c^2}{g} = \frac{2g}{\omega^2}, \quad \text{oder:} \quad c = \frac{g}{\omega}.$$

Hiernach kann zur Bestimmung des Neigungswinkels α, den an der betreffenden Stelle die Parabel mit der verticalen Achse einschliesst, die Gleichung 105):

$$\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 2gx}}$$

benutzt werden, in welcher für die Grösse x der dem gegebenen Werthe von y entsprechende, aus der obigen Parabelgleichung zu entnehmende, Werth einzusetzen ist; worauf dann aus Gleichung 103):

$$\varrho = \frac{c^2}{g \sin\alpha^3}$$

der Krümmungshalbmesser oder die Länge der Kugelstange zu bestimmen ist. Die Grösse ε ergiebt sich endlich aus der Gleichung:

$$\varepsilon = LP - MP = \varrho \cos\alpha - y.$$

Wenn z. B. bei normalem Gange der Maschine die verticale Welle 35 Umläufe in jeder Minute macht, so ist:

$$\omega = \frac{35 \,.\, 2\pi}{60} = 3{,}665 \quad \text{und} \quad c = \frac{9{,}81}{3{,}665} = 2^{\text{m}}{,}677.$$

Wenn ferner der mittlere Abstand der Kugel von der verticalen Drehachse

$$y = 0^{\text{m}}{,}4$$

betragen soll, so sind die Grössen x und α resp. zu berechnen aus den Gleichungen:

$$x = \frac{9{,}81 \,.\, 0{,}4^2}{2 \,.\, 2{,}677^2} = 0^{\text{m}}{,}1095, \qquad \sin\alpha = \frac{2{,}677}{\sqrt{2{,}677^2 + 2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}1095}} = 0{,}877,$$

$$\alpha = 61^0\, 18', \qquad \cos\alpha = 0{,}48.$$

Hiernach erhält man für die Länge der Kugelstange den Werth:

$$\varrho = \frac{2{,}677^2}{9{,}81 \,.\, 0{,}877^3} = 1^{\text{m}}{,}083,$$

und für den Abstand ihres Aufhängepunktes von der verticalen Drehachse die Grösse:

$$\varepsilon = 1{,}083 \,.\, 0{,}48 - 0{,}4 = 0^{\text{m}}{,}120.$$

Abhängigkeit der Fallbeschleunigung g von der geographischen Breite.

Da die Erde mit allen ihr angehörigen Körpern fortwährend um ihre Achse sich dreht, so ist der Gleichgewichtszustand eines an der Erdoberfläche ruhenden Körpers nicht als ein absoluter, sondern als ein relativer Gleichgewichtszustand aufzufassen. Man findet die Bedingungen dieses relativen Gleichgewichts, indem man (der oben gefundenen Regel gemäss) den Körper als im absoluten Ruhezustande befindlich ansieht und dafür zu den sonstigen

auf ihn einwirkenden Kräften noch die seiner Kreisbewegung entsprechende Centrifugal-Kraft hinzurechnet.

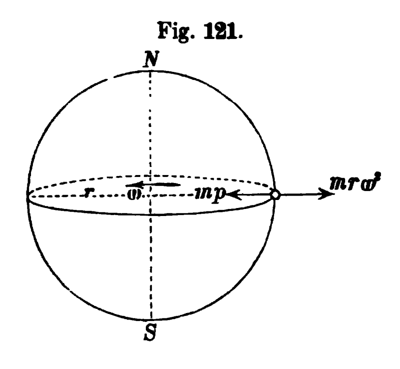


Fig. 121.

Bei einem am Aequator ruhenden Körper ist die Centrifugal-Kraft der Schwere entgegengerichtet; man erhält daher die Kraft, mit welcher ein Körper daselbst gegen seine Unterlage gedrückt wird (das scheinbare Gewicht des Körpers), indem man die Centrifugal-Kraft von dem wahren Gewichte des Körpers subtrahirt (Fig. 121). Die Zeit, in welcher die Erde eine Umdrehung um ihre Achse NS ausführt, beträgt:

$$23^h 56' 4'',1, \quad \text{oder:} \quad 86164,1 \text{ Sec.}$$

Die Winkelgeschwindigkeit, oder der Winkel, um welchen die Erde in jeder Secunde sich dreht, hat demnach die Grösse:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164,1} = 0,000\,072\,92.$$

Betrachtet man die Erde als eine Kugel vom Halbmesser:

$$r = 6\,370\,000^m,$$

so erhält man für die Centrifugal-Kraft einer am Aequator befindlichen Masse m den Werth:

$$108) \quad m r \omega^2 = m \,.\, 6\,370\,000 \,.\, 0,000\,072\,92^2 = m \,.\, 0,033\,87.$$

Wenn also mit mp das wahre Gewicht der Masse bezeichnet wird (d. h. die von der Erde auf den Körper ausgeübte Anziehungskraft), und mit $m g_0$ das scheinbare Gewicht des Körpers, so ergiebt sich für letzteres die Gleichung:

$$m g_0 = m p - m r \omega^2 = m p - m \,.\, 0,033\,87.$$

Hieraus folgt, dass die Beschleunigung des freien Falles am Aequator:

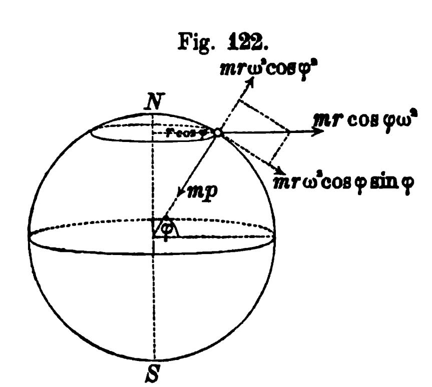
$$109) \quad g_0 = p - r \omega^2 = p - 0^m,033\,87$$

ungefähr 34 Millimeter weniger beträgt, als sie betragen würde, wenn die Erde sich nicht um ihre Achse drehte.

Ein Ort, dessen geographische Breite $= \varphi$ ist, durchläuft während einer Umdrehung der Erde den Umfang eines Kreises vom Halbmesser $r \cos \varphi$ (Fig. 122). Die Centrifugal-Kraft einer daselbst befindlichen Masse m wirkt in der Richtung des Drehungs-

halbmessers nach aussen und hat die Grösse $m \cdot r \cos \varphi \cdot \omega^2$. Das scheinbare Gewicht mg, oder diejenige Kraft, welche im gewöhnlichen Leben das Gewicht des Körpers genannt wird, ist die Mittelkraft aus der Centrifugal-Kraft und dem wahren Gewichte mp, weicht demnach sowohl der Richtung als der Grösse nach von dem wahren Gewichte ab. Zerlegt man die Centrifugal-Kraft in zwei rechtwinkelig zu einander gerichtete Seitenkräfte, von denen die eine:

Fig. 122.



$$m \cdot r \cos \varphi \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi$$

in der Richtung des Erdhalbmessers nach aussen (also der Schwere entgegen), die andere:

$$m \cdot r \cos \varphi \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi$$

in horizontaler Richtung nach dem Aequator hin wirkt, und fasst man die Wirkungen dieser beiden Seitenkräfte getrennt auf, so findet man, dass die erstere für sich allein nur eine Grössen-Abweichung des scheinbaren Gewichtes bedingen würde, und dass die Richtungs-Abweichung allein durch die horizontale Seitenkraft hervorgebracht wird. Da diese letztere rechtwinkelig zu der Richtung des wahren Gewichtes gerichtet und ausserdem im Verhältniss zu demselben sehr klein ist, so wird die Grösse des scheinbaren Gewichtes durch sie so gut wie gar nicht beeinflusst, und darf daher, wenn es sich nur um die Bestimmung der Grössen-Abweichung handelt, dieselbe so berechnet werden, wie wenn die horizontale Seitenkraft gar nicht vorhanden wäre. Hiernach erhält man für die Grösse des scheinbaren Gewichtes die Gleichung:

$$mg = mp - mr\omega^2 \cos \varphi^2 = mp - mr\omega^2 (1 - \sin \varphi^2),$$

woraus sich für die Beschleunigung des freien Falles der Werth ergiebt:

$$g = p - r\omega^2 + r\omega^2 \sin \varphi^2 = g_0 + r\omega^2 \sin \varphi^2.$$

Hierin bedeutet g_0 denjenigen Werth, welchen g annimmt, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird, also die Fallbeschleunigung am Aequator, für welche durch directe Beobachtungen (mittelst des Pendels) der Werth gefunden ist:

$$g_0 = 9^m,7806.$$

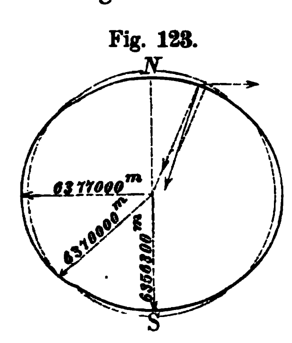
Wenn man ausserdem für $r\omega^2$ den in Gleichung 108) berechneten Werth substituirt, so erhält man für die Abhängigkeit der Fallbeschleunigung von der geographischen Breite die allgemeine Gleichung:

$$110)\quad g = 9^m,7806 + 0,033\,87 \sin \varphi^2.$$

Eine Vergleichung der aus directen Pendel-Messungen an Orten von verschiedenen geographischen Breiten gefundenen Werthe von g mit den nach dieser Gleichung berechneten Zahlenwerthen zeigt, dass die beobachteten Werthe mit den berechneten Werthen nicht übereinstimmen, dass vielmehr, um eine solche Uebereinstimmung herbeizuführen, dem numerischen Coefficienten von $\sin \varphi^2$ in Gleichung 110) noch eine Correction ertheilt werden muss.

Die Ursache dieser Abweichung ist in der horizontalen Seitenkraft der Centrifugal-Kraft zu suchen — zwar nicht in dem directen, sondern vielmehr in dem indirecten Einflusse dieser Kraft. Wenn nämlich die Erde eine genaue Kugelform hätte, so würde ein an der Oberfläche dieser Kugel befindlicher leicht beweglicher Körper nicht im Gleichgewichte sich befinden, vielmehr würde derselbe durch jene horizontale Seitenkraft in Bewegung versetzt werden. Dasselbe gilt von einem Wassertheilchen an der Oberfläche des Meeres. In Folge dessen hat die Meeresoberfläche — und abgesehen von localen Erhebungen oder Senkungen auch die mittlere Erdoberfläche — eine von der Kugelfläche abweichende Form angenommen, welche so beschaffen ist, dass an jeder Stelle die Richtung der Mittelkraft von Schwere und Centrifugal-Kraft rechtwinkelig zu dieser Fläche gerichtet ist. Die Erde hat die Form eines an den Polen abgeplatteten Rotations-Ellipsoides, und der Halbmesser des Aequators ist um etwa 20 000 Meter grösser als die Entfernung der Pole vom Erdmittelpunkte (Fig. 123).

Fig. 123.



Da nach dem Gravitations-Gesetze die Intensität der Anziehungskraft mit zunehmender Entfernung vom Anziehungscentrum abnimmt, so ist auch das absolute Gewicht eines Körpers am Aequator kleiner als an den Polen. Das scheinbare Gewicht muss daher vom Aequator nach den Polen hin in noch rascherer Progression

zunehmen als in Gleichung 110) ohne Berücksichtigung dieser Abweichung von der Kugelgestalt gefunden wurde.

In der That haben die Pendel-Beobachtungen ergeben, dass für den numerischen Coefficienten von $\sin \varphi^2$ anstatt 0,03387 der grössere Werth 0,0506 gesetzt werden muss, wenn die Gleichung mit den Beobachtungen übereinstimmende Werthe liefern soll; dass also das wahre Gesetz der Abhängigkeit der Fallbeschleunigung von der geographischen Breite des Ortes dargestellt wird durch die Gleichung:

$$111)\quad g = 9^m{,}7806 + 0{,}0506 \sin \varphi^2.$$

Hiernach hat z. B. an einem Orte, dessen geographische Breite $\varphi = 50^0\, 46'\, 34''$ ist (wie die der Stadt Aachen), in der Höhe der Meeresfläche die Beschleunigung des freien Falles im luftleeren Raume die Grösse:

$$g = 9^m{,}7806 + 0{,}0506 \,.\, 0{,}774681^2 = 9^m{,}811.$$

DRITTER ABSCHNITT.

Statik fester Körper

oder

Lehre vom Gleichgewicht eines Systems von unveränderlich mit einander verbundenen materiellen Punkten.

NEUNTES CAPITEL.

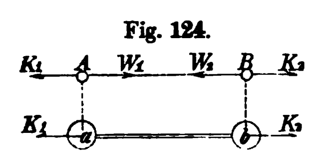
Ableitung der allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen für einen festen Körper.

§ 39.

Begriff des Systems unveränderlich verbundener materieller Punkte.

Wenn ein ruhender materieller Punkt A von der auf ihn einwirkenden Kraft K_1 nicht in Bewegung versetzt werden soll, so muss dieser Kraft das Gleichgewicht gehalten werden durch eine andere Kraft W_1 von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung (Fig. 124). Wenn irgend ein in der Kraftrichtung liegender zweiter materieller Punkt B den Ausgangspunkt dieser Kraft W_1 bildet, so erleidet nach dem Gesetze der Wechselwirkung (§ 20) der Punkt B eine genau eben so grosse Gegenwirkung W_2 von Seiten des Punktes A. Soll dieser zweite materielle Punkt ebenfalls im Ruhezustande bleiben, so muss der Kraft W_2 das Gleichgewicht gehalten werden durch eine andere Kraft K_2, welche der Kraft W_2 (und folglich auch der Kraft K_1) gleich und entgegengesetzt ist.

Fig. 124.



Es ist denkbar, dass die beiden Kräfte W_1, W_2 wie Widerstände wirken, d. h. dass sie zur Kategorie derjenigen Kräfte

gehören, welche — wie z. B. die in § 30 erwähnten Widerstände fester Flächen, Linien, Punkte — nie selbst Bewegungen hervorbringen, sondern nur die Wirkungen anderer Bewegungsursachen zu verrichten im Stande sind; es ist denkbar, dass diese beiden Kräfte allemal nur dann zur Wirkung gelangen, wenn sie durch andere Bewegungsursachen hervorgerufen werden, welche ohne sie eine Veränderung des Abstandes der beiden Punkte herbeiführen würden; und dass sie alsdann immer mit derjenigen Intensität wirken, welche erforderlich ist, um eine solche Veränderung des Abstandes $\overline{AB}$ zu verhindern.

Wenn das der Fall ist, wenn die beiden materiellen Punkte auf eine solche Art durch Wechselwirkung mit einander verbunden sind, so werden die beiden gleichen entgegengesetzten Kräfte K_1, K_2 unter allen Umständen von den beiden Widerständen im Gleichgewicht gehalten, welche Grösse auch immer jene Kräfte haben mögen. Obwohl es dann in der That die beiden Kräfte W_1, W_2 sind, durch welche die Kräfte K_1, K_2 aufgehoben werden, so pflegt man doch in solchem Falle den Gleichgewichtszustand so aufzufassen, als ob die beiden Kräfte K_1, K_2 unmittelbar einander im Gleichgewicht hielten. Man sieht die beiden materiellen Punkte als durch eine gerade Linie verbunden an, und denkt sich diese geometrische Linie ausgestattet mit den physikalischen Eigenschaften der Unausdehnbarkeit und Unzusammendrückbarkeit — Eigenschaften, welche in Wirklichkeit auf dem Vorhandensein von Widerstandskräften beruhen. Durch diese Verbindungslinie denkt man sich also die beiden materiellen Punkte in ihrer Beweglichkeit derartig beschränkt, dass nur solche Bewegungen, bei denen die Entfernung der beiden Punkte ungeändert bleibt, noch als ausführbar zu betrachten sind. Zur Veranschaulichung einer solchen Vorstellung können zwei Kugeln a und b dienen, welche durch eine sehr leichte und sehr feste Stange mit einander verbunden sind (Fig. 124). Je leichter und fester die Stange, je kleiner die Durchmesser der Kugeln im Verhältniss zu ihrem Abstande sind, um so mehr werden dieselben angesehen werden dürfen als zwei materielle Punkte, welche durch eine starre Linie in unveränderlichem Abstande gehalten werden.

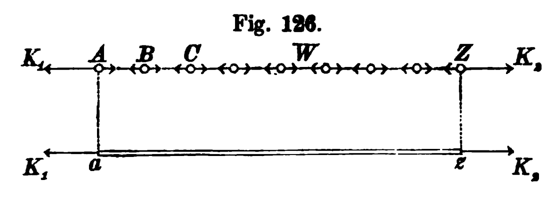
Wenn die Kraft K_2 durch eine gleich grosse und gleich gerichtete Kraft W_3 ersetzt wird, deren Ausgangspunkt irgend ein dritter materieller Punkt ist, so wird dadurch in dem Gleichgewichtszustande der beiden Punkte A und B Nichts geändert

(Fig. 125). Der Punkt C erleidet dann eine gleich grosse Gegenwirkung W_4, und um auch diesen Punkt im Gleichgewicht zu halten, müsste man an demselben eine Kraft K_2, welche der Kraft W_4 (und folglich auch der Kraft K_1) gleich und entgegengesetzt ist, anbringen.

Fig. 125.

Denkt man sich auf gleiche Weise eine grössere Zahl von materiellen Punkten geradlinig an einander gereiht, und zwischen je zwei benachbarten Punkten ein solches Paar von Widerständen vorhanden, durch welche die Abstände derselben stets unverändert erhalten werden, so erkennt man, dass zwei an den Endpunkten A und Z dieser Reihe in der Richtung derselben nach entgegengesetzten Seiten hin wirkende gleich grosse Kräfte K_1, K_2 unter allen Umständen einander im Gleichgewicht halten (Fig. 126). Vorausgesetzt also, dass die physikalischen Bedingungen für das Auftreten derartiger Wechselwirkungen in einer solchen Reihe von materiellen Punkten vorhanden sind, darf man die ganze Punktenreihe als eine starre Linie ansehen und darf den früher gefundenen Satz: „zwei gleich grosse entgegengesetzte Kräfte halten einander im Gleichgewicht“ auch für den Fall noch als gültig betrachten, wenn die beiden Kräfte keinen gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben, wenn vielmehr ihre Angriffspunkte an den entgegengesetzten Endpunkten einer starren Linie liegen, in deren Richtung die Kräfte nach entgegengesetzten Seiten hin wirken. Auch erkennt man leicht, dass der Gleichgewichtszustand dieser Punkten-Reihe nicht aufhören würde, wenn der Angriffspunkt einer der beiden Kräfte K von dem Endpunkte nach einem der Zwischenpunkte B, C... verlegt würde.

Fig. 126.



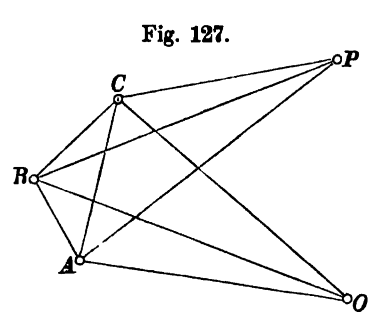
Je grösser man die Zahl der Punkte, und je kleiner man die Abstände zwischen je zwei Nachbarpunkten annimmt, um so mehr nähert man sich der Vorstellung einer starren materiellen Linie, d. h. einer geometrischen Linie, welche man sich ausgestattet denkt mit den physikalischen Eigenschaften einer ihrer Länge stetig mit Masse bedeckenden Reihe von unendlich vielen materiellen Punkten.

Die zwischen je zwei Nachbarpunkten thätige Widerstandskraft W, durch welche der Abstand derselben unverändert erhalten wird, nennt man die **Spannung** der materiellen Linie, und zwar **Zug-Spannung**, wenn diese Widerstandskraft der Vergrösserung, **Druck-Spannung**, wenn dieselbe der Verkleinerung des Abstandes entgegenwirkt. Die von den beiden gleichen Kräften K in der materiellen Linie erzeugte Spannung hat an allen Stellen derselben stets gleiche Grösse mit den spannenden Kräften.

Wenn nicht nur zwischen je zwei Nachbarpunkten, sondern zwischen je zwei Punkten überhaupt die Bedingung der Unveränderlichkeit des Abstandes besteht, so kann eine sehr dünne und sehr feste steife **Stange** az (Fig. 126) annäherungsweise als Versinnlichung des Begriffs einer solchen materiellen Linie gelten. Wenn dagegen nur je zwei Nachbarpunkte als durch eine starre Linie verbunden angesehen werden sollten, so würde damit die Eigenschaft der Biegsamkeit noch nicht ausgeschlossen, und würde daher eine vollkommen biegsame **Kette** oder ein vollkommen biegsamer **Faden** von unveränderlicher Länge dieser Vorstellung am meisten entsprechen.

In ähnlicher Weise wie bei jener geradlinigen Punkten-Reihe kann man sich auch bei einer beliebigen Gruppirung von materiellen Punkten je zwei derselben durch eine starre Linie in unveränderlichem Abstande gehalten denken. Wenn drei nicht in einer geraden Linie liegende materielle Punkte A, B, C unter einander durch starre Linien verbunden sind, und zwei andere materielle Punkte O, P mit jenen dreien ebenfalls durch starre Linien verbunden sind, so ist auch der Abstand zwischen den beiden Punkten O und P unveränderlich (Fig. 127). Wenn ausser diesen beiden noch mehrere andere materielle Punkte mit jenen dreien auf gleiche Weise verbunden sind, so haben alle diese Punkte auch gegen einander unveränderliche Lage, und es ist so gut, als wären alle diese Punkte unter einander ebenfalls durch starre Linien verbunden.

Fig. 127.



Je grösser man sich die Zahl dieser materiellen Punkte, und je kleiner man sich die Abstände der benachbarten Punkte denkt,

um so mehr nähert man sich dem Begriff eines absolut festen Körpers, oder eines geometrischen Körpers, welchen man sich ausgestattet zu denken hat mit den physikalischen Eigenschaften eines seinen Raum stetig erfüllenden Systems von unendlich vielen unveränderlich mit einander verbundenen materiellen Punkten. Je zwei Punkte eines solchen Systems sind als durch eine gerade starre materielle Linie verbunden anzusehen; zwei auf diese beiden Punkte nach den entgegengesetzten Richtungen der Verbindungslinie wirkende gleich grosse Kräfte halten daher stets einander im Gleichgewicht, und dieser Gleichgewichtszustand bleibt auch dann noch bestehend, wenn der Angriffspunkt einer der Kräfte an eine andere Stelle der materiellen Linie verlegt wird.

Annäherungsweise findet der Begriff des Systems unveränderlich verbundener materieller Punkte eine Verwirklichung in denjenigen Körpern, welche man im gewöhnlichen Leben „feste Körper“ nennt. Zwischen den materiellen Punkten eines solchen Körpers sind in der That gewisse Widerstandskräfte — die Elasticitäts-Widerstände — thätig, durch welche die Abstände derselben nahezu unverändert erhalten werden. Versucht man, zwei Punkte eines sehr harten festen Körpers durch Druck- oder Zug-Kräfte einander zu nähern oder von einander zu entfernen, so findet man, dass diesen Verschiebungen Widerstände entgegenwirken, durch welche die aufgewendeten Kräfte — falls dieselben nicht eine übermässige Grösse hatten — allemal im Gleichgewicht gehalten werden. Streng genommen zwar stellt sich dieser Gleichgewichtszustand zwischen Kräften und Widerständen erst dann her, wenn eine kleine Verschiebung bereits wirklich eingetreten ist. Doch sind dergleichen Formänderungen einerseits nur vorübergehende, insofern sofort nach dem Aufhören der Kraftwirkung die ursprünglichen Abstände zwischen den materiellen Punkten sich wiederherstellen, andrerseits sind dieselben so klein, dass in einer grossen Zahl von Fällen es durchaus nicht erforderlich ist, auf dieselben Rücksicht zu nehmen — ihre Berücksichtigung wenigstens in der gestellten Aufgabe nicht verlangt wird.

Es erscheint hiernach zulässig und rathsam, die Gesammtheit derjenigen Aufgaben, welche die sogenannten festen Körper betreffen — jenachdem darin die Mitberücksichtigung jener Form-Aenderungen und der Veränderlichkeit jener Elasticitäts-Widerstände verlangt oder nicht verlangt wird — in zwei gesonderte Gruppen zu zerlegen, und demgemäss die „Mechanik fester Körper“

in die beiden Haupt-Abtheilungen einzutheilen: „Mechanik absolut fester Körper“ und „Mechanik elastischer fester Körper“. In der letzteren Abtheilung, welche wohl auch die „Lehre von der Elasticität und Festigkeit der Körper“ genannt wird, finden alle diejenigen Fälle ihre Erledigung, in welchen die Formänderungen der Körper in Betracht kommen, sowie die Grösse der Elasticitäts-Widerstände und die Gesetze, nach welchen dieselben mit der Form des Körpers und mit den auf ihn einwirkenden Kräften sich ändern. Die erstere Abtheilung dagegen umfasst ausschliesslich alle diejenigen vergleichsweise einfacheren Fälle, in denen alle Formänderungen gänzlich unberücksichtigt bleiben, und die Körper demnach als absolut unveränderliche Systeme von materiellen Punkten angesehen werden dürfen.

Ein System von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten befindet sich im Gleichgewichtszustande, wenn jeder einzelne Punkt desselben im Gleichgewichtszustande sich befindet, d. h. wenn jeder einzelne Punkt eine geradlinige gleichförmige Bewegung ausführt (deren Geschwindigkeit auch Null sein kann). Wegen der Unveränderlichkeit der Abstände stimmen alsdann mit der Bewegung eines Punktes die Bewegungen aller übrigen Punkte genau überein, und ist folglich das ganze System in diesem Falle entweder in fortschreitender geradliniger und gleichförmiger Bewegung begriffen, oder auch — insofern die Geschwindigkeit Null als specieller Fall einer solchen Bewegung zu betrachten ist — im Ruhezustande befindlich.

Wenn dagegen ein einziger Punkt des Systems ungleichförmig oder krummlinig sich bewegt, so sind mit den Aenderungen in dem Bewegungszustande dieses einen Punktes immer Bewegungsänderungen anderer Punkte des Systems verbunden, und man kann in diesem Falle das ganze System als im Nichtgleichgewicht befindlich ansehen. Dieser letztere Fall, bei welchem auf die Aenderungen der Stellung des Systems gegen die Richtungen der wirkenden Kräfte, sowie auf die Art der Massenvertheilung im Inneren des Systems Rücksicht genommen werden muss, ist offenbar verwickelter als der Fall des Gleichgewichts, bei welchem die Verbindungslinien der einzelnen Punkte stets dieselben Richtungen behalten, auch von den unendlich vielen materiellen Punkten des Systems nur diejenigen in Betracht kommen, welche die Angriffspunkte der auf das System wirkenden Kräfte bilden. Ueberdies lässt sich — wie später gezeigt wird — der Fall des Nichtgleich-

gewichts mittelst der Principien der „Lehre von der relativen Bewegung" zurückführen auf den des Gleichgewichts. Aus diesem Grunde ist es zweckmässig, die Lehre vom Gleichgewicht oder die „Statik fester Körper" der Lehre vom Nichtgleichgewicht (Dynamik fester Körper) voranzustellen.

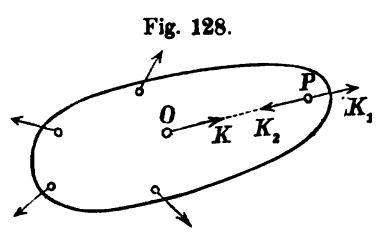
Im § 29 ist nachgewiesen, dass hinsichtlich der Gleichgewichtsbedingungen für die auf einen einzelnen materiellen Punkt wirkenden Kräfte es durchaus keinen Unterschied macht, ob der Punkt im Ruhezustande oder in geradliniger gleichförmiger Bewegung begriffen ist. Hieraus folgt, dass auch für die auf ein ganzes System wirkenden Kräfte die Bedingungen des Gleichgewichts genau übereinstimmen mit denen der Ruhe. Es kann daher bei den nachfolgenden Untersuchungen das System als im absoluten Ruhezustande befindlich angenommen werden, ohne dass die Allgemeinheit der Untersuchungen dadurch beeinträchtigt würde.

§ 40.

Mittelkraft zweier in derselben Ebene wirkender Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

In einem von mehreren Kräften im Gleichgewicht gehaltenen Systeme unveränderlich verbundener materieller Punkte kann der Angriffspunkt jeder einzelnen Kraft an irgend eine andere Stelle ihrer Richtungslinie verlegt werden, ohne dass der Gleichgewichtszustand dadurch gestört würde — vorausgesetzt, dass der neue Angriffspunkt dem Systeme ebenfalls angehört, also mit dem früheren als durch eine starre Linie verbunden angesehen werden kann.

Fig. 128.

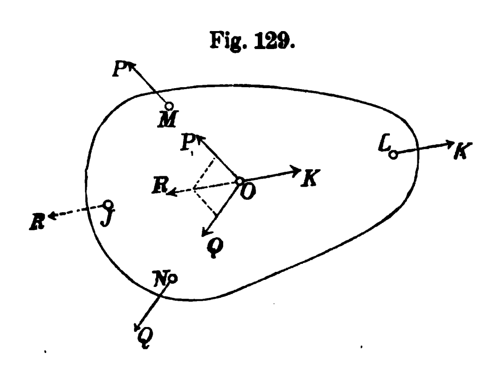


Denn ohne dass dadurch Etwas geändert würde, können an irgend einem Punkte P in der Richtungslinie der Kraft K zwei ihr gleiche einander entgegengesetzte Kräfte K_1 und K_2 angebracht werden (Fig. 128). Die beiden Kräfte K und K_2 werden alsdann (nach § 39) durch den Widerstand der starren Verbindungslinie OP aufgehoben, und die übrig bleibende Kraft K_1 hat daher auf den Gleichgewichtszustand genau denselben Einfluss, welcher vorher von der Kraft K ausgeübt wurde.

Hieraus folgt, dass für drei an gemeinschaftlichem Angriffspunkte einander im Gleichgewicht haltende Kräfte K, P, Q statt

des gemeinschaftlichen Angriffspunktes O auch die in ihren Richtungslinien liegenden zu demselben Systeme gehörigen Punkte L, M, N als Angriffspunkte gewählt werden können, ohne dass in der Wirkung der Kräfte Etwas geändert würde (Fig. 129). Die Anwendung des in Gleichung 72) gefundenen Satzes auf diese letzteren nun nicht mehr an gemeinschaftlichem Angriffspunkte wirkenden drei Kräfte führt zu folgendem Satze:

Fig. 129.



Wenn drei Kräfte einen Köper im Gleichgewicht halten, so schneiden ihre Richtungslinien einander in einem Punkte, und ihre Grössen verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, welcher später unter dem Namen des „Satzes von den drei Kräften" mehrfach zur Lösung von Aufgaben benutzt werden wird.

Eine Störung des Gleichgewichtszustandes würde auch dann nicht eintreten, wenn in Fig. 129 die beiden Kräfte P, Q durch ihre Mittelkraft ersetzt würden, und wenn als Angriffspunkt dieser letzteren statt des Punktes O irgend ein anderer in ihrer Richtungslinie liegender Punkt J gewählt würde. Die in den Punkten M, N wirkenden Kräfte P, Q haben daher genau dieselbe Wirkung, wie die in dem Punkte J wirkende Kraft R. Es kann folglich von der Mittelkraft zweier Kräfte unter Umständen auch dann noch die Rede sein, wenn die beiden Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten wirken.

Zugleich ist der in diesem Falle zum Auffinden der Mittelkraft einzuschlagende Weg in Fig. 129 indirect schon angedeutet. Wie nämlich die beiden am gemeinschaftlichen Angriffspunkte O wirkenden Kräfte P, Q ersetzt werden konnten durch die resp. in den Punkten M, N wirkenden Kräfte P, Q: so können auch umgekehrt diese letzteren — falls sie die unmittelbar gegebenen sind — ersetzt werden durch die ersteren; und ergiebt sich hieraus für die Bestimmung der Mittelkraft zweier Kräfte die Regel:

Man verlege die Angriffspunkte der beiden gegebenen Kräfte an den Durchschnittspunkt ihrer Rich-

tungslinien und wende alsdann die für Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte geltenden Regeln an.

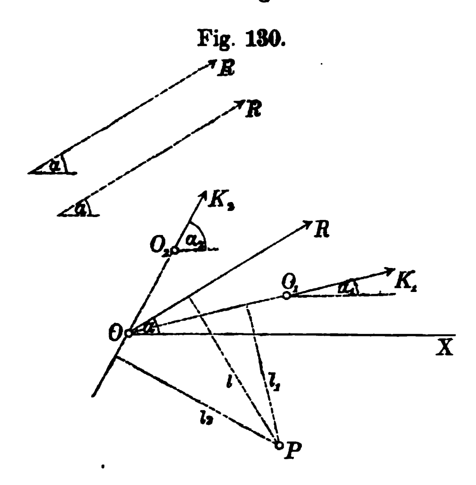
Für die beiden rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitenkräfte der Mittelkraft von zwei am gemeinschaftlichen Angriffspunkte O wirkenden Kräften K_1 und K_2 würden nach Fig. 130 die Gleichungen gelten:

$$112)\quad R \cos \alpha = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2,$$

$$113)\quad R \sin \alpha = K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_2.$$

Diese beiden Gleichungen geben vollständige Auskunft über Grösse und Richtung der Mittelkraft R und würden in der Mechanik des einfachen materiellen Punktes vollkommen ausreichen, um die Mittelkraft selbst zu bestimmen, insofern dort selbstverständlich der Ort des materiellen Punktes als Angriffspunkt sämmtlicher Kräfte, folglich auch der Mittelkraft anzusehen wäre. Wenn dagegen statt des gemeinschaftlichen Angriffspunktes O die beiden Punkte O_1 und O_2 als Angriffspunkte resp. der beiden Kräfte K_1 und K_2 gegeben sind, so zeigt es sich, dass jene beiden Gleichungen zur vollständigen Bestimmung der Mittelkraft noch nicht ausreichen. Es bedarf vielmehr in dem vorliegenden Falle noch einer dritten Gleichung, durch welche ausgedrückt wird, dass von allen den unendlich vielen Kräften, welche die von obigen beiden Gleichungen vorgeschriebene Grösse und Richtung besitzen, speciell diejenige gemeint ist, deren Richtungslinie durch den Durchschnittspunkt O der beiden gegebenen Kräfte hindurchgeht.

Fig. 130.



Zu diesem Zwecke kann das Gesetz der statischen Momente (§ 23, Gleichung 53) benutzt werden; denn von allen Kräften, welche den obigen beiden Gleichungen genügen, ist es nur eine einzige, deren Abstand von dem festen Punkte P der Kraft-Ebene zugleich die bestimmte Grösse l hat. Wenn also zu den beiden Gleichungen 112) und 113) noch die Gleichung:

$$114)\quad Rl = K_1 l_1 + K_2 l_2$$

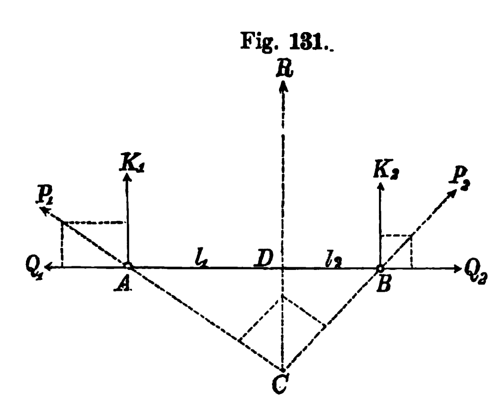
hinzugefügt wird, so sind durch diese drei Gleichungen nunmehr Grösse, Richtung und Lage der Mittelkraft R völlig bestimmt.

Die obige Beweisführung gründete sich auf die Voraussetzung, dass die Richtungslinien der beiden gegebenen Kräfte in einem bestimmten Punkte zusammentreffen. Wenn aber die beiden Kräfte parallel sind, so existirt ein solcher Durchschnittspunkt nicht. Es bleibt also noch übrig, zu untersuchen, ob jene drei Gleichungen auch für diesen Fall noch gültig sind.

Die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte kann in diesem Falle als rechtwinkelig zur Richtung der beiden Kräfte stehend angenommen werden; denn wäre dies nicht der Fall, so würde durch Verschiebung eines der Angriffspunkte längs der betreffenden Kraftrichtung dieser Fall sofort hergestellt werden können.

Wenn man an den Angriffspunkten A und B der beiden gegebenen Kräfte noch zwei in der Verbindungslinie AB nach entgegengesetzten Richtungen wirkende gleich grosse Kräfte Q_1 und Q_2 hinzufügt, so wird dadurch in der Wirkung der gegebenen Kräfte K_1 und K_2 Nichts geändert, denn die beiden Kräfte Q_1 und Q_2 werden durch die Widerstände der starren Verbindungslinie AB aufgehoben (Fig. 131). Die Wirkung der vier Kräfte K_1, K_2, Q_1, Q_2 ist also genau dieselbe wie die der zwei Kräfte K_1, K_2. Jene vier Kräfte können aber paarweise zu den Mittelkräften P_1 und P_2 vereinigt werden. Folglich haben diese letzteren beiden Kräfte ebenfalls genau dieselbe Wirkung wie die Kräfte K_1 und K_2; geben auch für jede beliebige Achsenrichtung dieselbe Seitenkraft-Summe und in Bezug auf jeden beliebigen festen Punkt der Ebene dieselbe Momenten-Summe wie jene Kräfte; denn jede von den beiden Kräften P vertritt in dieser Beziehung ihre beiden Seitenkräfte, und die Beiträge der Kräfte Q heben bei der Summation einander auf. Da nun die Gültigkeit

Fig. 131.



der drei Gleichungen in Bezug auf die Mittelkraft R von den beiden Kräften P_1, P_2 schon als bewiesen vorausgesetzt werden darf, insofern deren Richtungslinien in dem Punkte C einander schneiden, so folgt hieraus, dass jene drei Gleichungen auch zur Bestimmung der Mittelkraft von den beiden gegebenen Kräften K_1 und K_2 unmittelbar benutzt werden dürfen; denn jene Mittelkraft R ist zugleich die Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2.

Aus den Gleichungen 112) und 113) ergeben sich, wenn darin $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^0$ substituirt wird, die Werthe:

115) $R = K_1 + K_2$ und $\alpha = 90^0$, d. h.:

die Mittelkraft von zwei parallelen Kräften ist gleich deren Summe und hat dieselbe Richtung.

Die Gleichung 114) kann benutzt werden, um den Punkt D zu bestimmen, in welchem die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte von der Richtungslinie der Mittelkraft geschnitten wird. Wenn dieser Punkt als Drehpunkt für die statischen Momente gewählt wird, so nimmt jene Gleichung die Form an:

116) $0 = K_1 l_1 - K_2 l_2$, oder: $\frac{K_1}{K_2} = \frac{l_2}{l_1}$,

Die beiden Theile also, in welche die Länge AB durch die Richtungslinie der Mittelkraft zerlegt wird, verhalten sich umgekehrt wie die an den Endpunkten wirkenden Kräfte.

Wenn man durch eine Wiederholung des eben angewendeten Verfahrens die Mittelkraft zweier Parallelkräfte mit einer dritten zu einer Mittelkraft vereinigt, diese letztere wiederum mit einer vierten, und auf gleiche Weise sich das Verfahren weiter fortgesetzt denkt, so findet man, dass auch für beliebig viele in derselben Ebene wirkende Parallelkräfte die Sätze gelten:

Die Mittelkraft paralleler Kräfte ist gleich deren Summe und hat dieselbe Richtung.

Das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf irgend einen Punkt der Kraft-Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente aller einzelnen Kräfte in Bezug auf diesen Punkt.

Diese beiden Sätze lassen sich in abgekürzter Form auch durch die beiden Gleichungen ausdrücken:

117) $R = \Sigma(K)$,

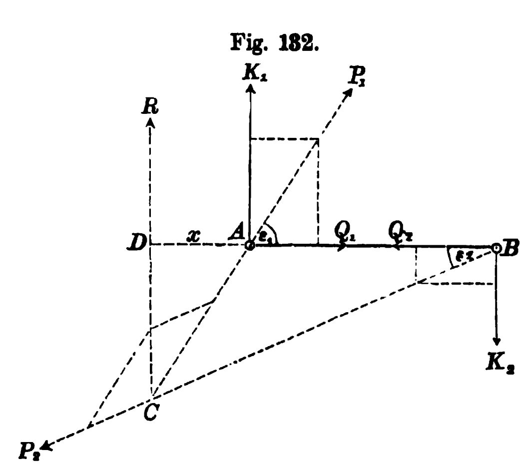
118) $Rl = \Sigma(Kl)$.

§ 41.

Kräftepaare oder Drehkräfte.

Auch zwei entgegengesetzt gerichtete Parallelkräfte von ungleicher Grösse können immer durch eine Mittelkraft ersetzt werden, für welche die drei Gleichungen 112), 113), 114) gültig sind. Um den Beweis dieses Satzes auf den vorigen zurückzuführen, ist es nur erforderlich, nachzuweisen, dass durch Hinzufügen der beiden gleich grossen entgegengesetzten Kräfte Q_1, Q_2 auch in diesem Falle zwei Mittelkräfte entstehen, deren Richtungslinien irgendwo zusammentreffen (Fig. 132). Für die beiden spitzen Winkel ε_1 und ε_2, welche die beiden Mittelkräfte P_1 und P_2 mit der Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte einschliessen, ergeben sich aus den betreffenden Kräfte-Parallelogrammen die Gleichungen:

Fig. 132.



$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{K_1}{Q_1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{K_2}{Q_2}.$$

Wenn $K_1 > K_2$, so ist auch $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, denn die beiden Nenner Q_1 und Q_2 sind einander gleich. Sobald also die beiden gegebenen Kräfte K_1 und K_2 verschiedene Grössen haben, sind auch die beiden Kräfte P_1 und P_2 verschieden gerichtet, treffen also in irgend einem Punkte C zusammen, wo ihre Mittelkraft R auf die gewöhnliche Weise nach dem Parallelogramm der Kräfte bestimmt werden kann. Da im Uebrigen das ganze Beweisverfahren des vorigen Paragraphen auch auf diesen Fall Anwendung findet, so können die Gleichungen 112), 113), 114) unmittelbar zur Bestimmung der Mittelkraft benutzt werden. Aus den ersten beiden Gleichungen ergeben sich, wenn $\alpha_1 = 90^0$ und $\alpha_2 = 270^0$ gesetzt wird, die Werthe:

$$119) \quad R = K_1 - K_2 \quad \text{und} \quad \alpha = 90^0, \text{ d. h.:}$$

Die Mittelkraft zweier Parallelkräfte von ungleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung ist gleich deren Differenz und hat die Richtung der grösseren.

Den Durchschnittspunkt D, in welchem die Verlängerung der Verbindungslinie AB von der Richtungslinie der Mittelkraft geschnitten wird, findet man aus der Gleichung der statischen Momente, welche, wenn eben dieser Punkt als Drehpunkt gewählt wird, die Form annimmt:

$$0 = -K_1 x + K_2 (x + \overline{AB}).$$

Hieraus ergiebt sich für den Abstand der Mittelkraft von der grösseren Kraft K_1 der Werth:

$$120)\quad x = \frac{K_2 \,.\, \overline{AB}}{K_1 - K_2}.$$

Setzt man $K_1 = K_2$, so erhält man für die Grössen R und x aus den Gleichungen 119) und 120) die Werthe:

$$R = 0 \quad \text{und} \quad x = \infty,$$

d. h. wenn die Wirkung von zwei gleich grossen, entgegengesetzten Parallelkräften durch eine einzige Kraft ersetzt werden sollte, so müsste diese Kraft die Grösse Null haben und zugleich in unendlicher Entfernung angebracht werden. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Von zwei gleich grossen entgegengesetzt gerichteten Parallelkräften giebt es keine Mittelkraft.

Ein solches Paar von gleich grossen entgegengesetzten Parallelkräften wird ein **Kräftepaar** oder auch — insofern die Wirkung desselben im Hervorbringen einer Drehbewegung bestehen würde — eine **Drehkraft** genannt.

Der Umstand, dass zwei solche Kräfte sich nicht durch eine einzige Kraft ersetzen lassen, bedingt hinsichtlich des Aufsuchens der Gleichgewichts-Bedingungen eine wesentliche Abweichung von dem bisher verfolgten Wege.

In der Mechanik des einfachen materiellen Punktes, d. h. in solchen Fällen, wo die Kräfte an gemeinschaftlichem Angriffspunkte wirkten, konnte die Wirkung beliebig vieler gegebener Kräfte stets durch eine einzige Mittelkraft ersetzt werden. Um die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen zu finden, war es daher nur nöthig, den allgemeinen mathematischen Ausdruck für die Mittelkraft abzuleiten und diesen Ausdruck alsdann gleich Null zu setzen.

In der Mechanik des Systems von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten kann dagegen ein solches Verfahren nicht zum Ziele führen. Denn, wie das vorliegende Beispiel zeigt, kann bei Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten — specielle Fälle ausgeschlossen — von einer Mittelkraft derselben im Allgemeinen gar nicht mehr die Rede sein. Es müssen daher ähnliche Vortheile, wie sie bisher durch Einführung der Mittelkraft erreicht wurden, hier auf anderem Wege erstrebt werden.

Bei Kräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte wurde mit dem Aufsuchen der Mittelkraft lediglich die thunlichste Vereinfachung des gegebenen Falles bezweckt, und als grösstmögliche Vereinfachung erwies sich die Reduction des ganzen gegebenen Kräfte-Systems auf eine einzige Mittelkraft. Da es sich nun herausgestellt hat, dass zwei gleich grosse entgegengesetzte Parallelkräfte für sich allein ein Kräfte-System bilden, dessen Form einer weiteren Vereinfachung nicht mehr fähig ist, so müssen solche Kräftepaare einstweilen als einfache Wirkungselemente aufgefasst werden, und ist deren Wirkungsweise deshalb als Gegenstand einer speciellen Untersuchung zu behandeln, in derselben Weise wie früher die Wirkungsweise einzelner Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte untersucht worden ist.

Als Resultat dieser Untersuchung wird sich herausstellen: dass die Wirkung beliebig vieler Kräftepaare auf einen Körper genau in derselben Weise auf geometrischem Wege bestimmt werden kann, wie die von Einzelkräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte, sobald man nur auf eine bestimmte gleich näher zu erklärende Weise jedes Kräftepaar durch eine einzige gerade Linie von bestimmter Richtung und Länge geometrisch darstellt (an willkürlich zu wählender Stelle), und diese Linien alsdann wie Repräsentanten von Einzelkräften behandelt, von denen die Mittelkraft gefunden werden soll.

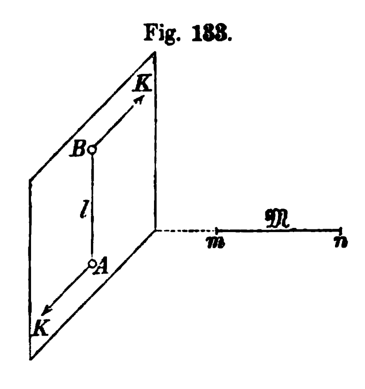
Die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte der Kräfte eines Kräftepaares kann stets als rechtwinkelig zur Kraftrichtung stehend angenommen werden; denn wäre dies nicht der Fall, so würde durch Verlegung des einen Angriffspunktes dieser Fall sofort hergestellt werden können. Der Abstand $AB = l$ zwischen den Richtungslinien der beiden Kräfte wird der H e b e l a r m des Kräftepaares genannt, und das Product

$$Kl = \text{Kraft mal Hebelarm} = \mathfrak{M}$$

wird das M o m e n t des Kräftepaares genannt (Fig. 133). Irgend

eine gerade Linie *mn*, welche rechtwinkelig zur Ebene des Kräftepaares gerichtet ist und so viele Längen-Einheiten enthält als die Momenten-Zahl $\mathfrak{M}$ angiebt, wird die Achse des Kräftepaares genannt.

Fig. 133.



Es lässt sich nachweisen, dass durch die Grösse und Richtung der Achse die Wirkung des Kräftepaares völlig bestimmt ist, und dass daher diese Achsen als geometrische Repräsentanten der Kräftepaare betrachtet werden dürfen, gerade so wie bisher schon immer durch gerade Linien von bestimmter Richtung und Länge die einfachen Kräfte geometrisch dargestellt wurden. Wenn man von willkürlich zu wählendem gemeinschaftlichen Angriffspunkte aus die Achsen sämmtlicher gegebenen Kräftepaare abträgt und mit diesen Achsen so verfährt, als wären sie Repräsentanten von einfachen Kräften, deren Mittelkraft gefunden werden soll, so erhält man als Resultirende die Achse desjenigen Kräftepaares, durch welches die sämmtlichen gegebenen Kräftepaare ersetzt werden können, d. h. die Achse des resultirenden Kräftepaares.

Um die Richtigkeit dieses Satzes allgemein zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass derselbe in Bezug auf zwei beliebig gegebene Kräftepaare richtig ist, dass also das Parallelogramm-Gesetz auch für Kräftepaare oder Drehkräfte gilt — vorausgesetzt, dass dieselben auf die eben angegebene Weise durch einfache Linien dargestellt werden.

§ 42.

Parallelogramm der Drehkräfte.

A. Kräftepaare in einer und derselben Ebene.

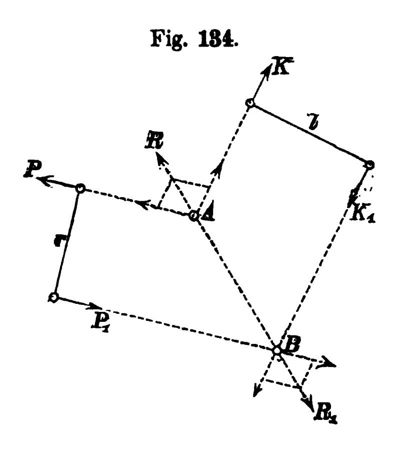
Zwei in derselben Ebene wirkende Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehungsrichtungen halten einander im Gleichgewicht.

Man beweist diesen Satz, indem man nach der in § 40 gefundenen Regel die vier gegebenen Kräfte K, P und K_1, P_1 paarweise durch ihre Mittelkräfte ersetzt und zeigt, dass diese beiden Mittelkräfte R und R_1 einander aufheben (Fig. 134). Das statische

Moment der Mittelkraft R in Bezug auf den Punkt B ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente ihrer Seitenkräfte:

$$Kl - Pr,$$

Fig. 134.



folglich gleich Null, weil nach der Voraussetzung $Kl = Pr$ sein sollte. Die Richtungslinie der Kraft R geht also durch den Punkte B hindurch, und aus gleichem Grunde muss die Richtungslinie der anderen Mittelkraft R_1 durch den Punkt A hindurchgehen. Die beiden Kräfte R und R_1 haben ausserdem gleiche Grösse und wirken nach entgegengesetzten Richtungen, denn die betreffenden Kräfte-Parallelogramme bei den Punkten A und B unterscheiden sich nur durch die entgegengesetzten Richtungen der gleichliegenden Seiten von einander. Es halten daher die beiden Mittelkräfte — und folglich auch ihre vier Seitenkräfte — einander im Gleichgewicht.

Wären die Richtungslinien sämmtlicher vier gegebenen Kräfte parallel gewesen, so würde man je zwei gleich gerichtete durch ihre Mittelkraft ersetzen und als Drehpunkt für das statische Moment der einen Mittelkraft irgend einen Punkt in der Richtungslinie der andern wählen können. Da nach § 40 auch für die Mittelkraft von zwei gleichgerichteten Kräften das Gesetz der statischen Momente gilt, so würde das im Uebrigen mit dem Vorigen übereinstimmende Beweisverfahren ergeben, dass auch in diesem Falle die beiden Mittelkräfte, folglich auch die beiden Kräftepaare einander im Gleichgewicht halten.

Aus dem vorigen Satze folgt, dass die Wirkungen von zwei in derselben Ebene liegenden Kräftepaaren übereinstimmen, wenn sie gleiche Momente und gleiche Drehungsrichtungen haben; dass also in solchem Falle das eine durch das andere ersetzt werden kann, ohne dass dadurch Etwas geändert würde. Denn durch das Hinzufügen der vier einander gleichen und paarweise einander aufhebenden Parallel-Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 wird in der Wirkung des gegebenen Kräftepaares K_1, K_2 Nichts geändert (Fig. 135). Wenn die Kräfte P so gewählt werden, dass die Producte:

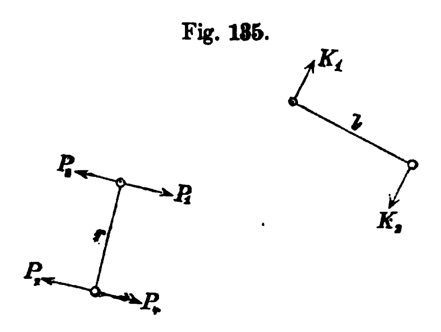
$$Pr \quad \text{und} \quad Kl$$

einander gleich sind, so heben nach dem vorigen Satze die beiden Kräftepaare:

$$P_3, P_4 \quad \text{und} \quad K_1, K_2$$

einander auf, können daher auch fortgelassen werden, und das noch übrig bleibende Kräftepaar P_1, P_2 hat demnach dieselbe Wirkung wie das ursprünglich gegebene Kräftepaar K_1, K_2.

Fig. 135.



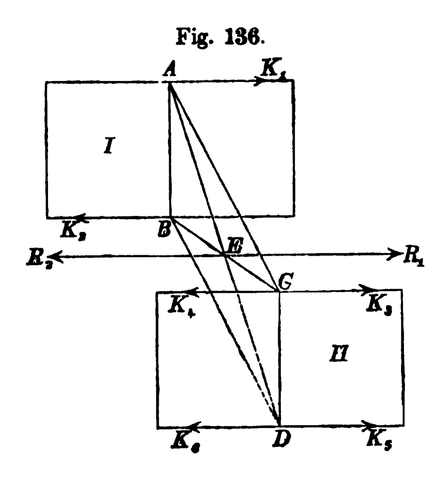
Hieraus folgt ferner, dass beliebig viele in einer und derselben Ebene wirkende Kräftepaare sämmtlich ersetzt werden können durch Kräftepaare, welche ebenso grosse Momente und eine und dieselbe gerade Linie als gemeinschaftlichen Hebelarm haben; und alle diese wiederum durch ein einziges Kräftepaar, dessen Kraft gleich der algebraischen Summe der an einem der Endpunkte des Hebelarms wirkenden Kräfte, dessen Moment folglich gleich der algebraischen Summe der Momente der ursprünglich gegebenen Kräftepaare sein muss.

B. Kräftepaare in parallelen Ebenen.

Um nachzuweisen, dass die vorigen Sätze auch für Kräftepaare in parallelen Ebenen gelten, genügt es zu zeigen, dass man, ohne die Wirkung eines Kräftepaares zu ändern, dasselbe aus seiner Ebene I in die ihr parallele Ebene II hinein versetzen kann (Fig. 136). Wenn zu den Kräften K_1, K_2 des gegebenen Kräftepaares noch die vier ihnen gleichen und parallelen, paarweise einander aufhebenden Kräfte K_3, K_4, K_5, K_6 an den Endpunkten der gegenüberliegenden Seite des Rechtecks $ABDC$ hinzugefügt werden, so wird dadurch keinerlei Aenderung hervorgebracht. Die beiden Kräfte K_1, K_3 können alsdann durch ihre Mittelkraft R_1, ebenso die beiden Kräfte K_2, K_4 durch ihre Mittelkraft R_2 ersetzt werden. Den gemeinschaftlichen Angriffspunkt dieser beiden Mittelkräfte bildet der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen des Rechtecks $ABDC$, weil nach Gleichung 116) die Verbindunglinie der Angriffspunkte von zwei gleich grossen gleichgerichteten Kräften durch die Richtungslinie ihrer Mittelkraft halbirt wird. Es halten daher die beiden Mittelkräfte R_1, R_2,

folglich auch die vier Kräfte K_1, K_5, K_2, K_4, welche durch sie ersetzt wurden, einander im Gleichgewicht, und können fortgelassen werden, ohne dass dadurch Etwas geändert würde. Die noch übrig bleibenden beiden Kräfte K_3, K_6 bilden nunmehr in der Ebene II ein Kräftepaar, welches genau dieselbe Wirkung hat, wie das ursprünglich gegebene Kräftepaar in der Ebene I.

Fig. 136.



Da innerhalb jeder von diesen beiden Ebenen ein Kräftepaar ersetzt werden kann durch irgend ein anderes Kräftepaar von gleichem Momente und gleicher Drehungsrichtung, so ist hiermit der Satz allgemein bewiesen: dass die Wirkungen zweier Kräftepaare übereinstimmen, wenn ihre Drehungsebenen parallel, ihre Momente und Drehungsrichtungen gleich sind. Aus der Verbindung dieses Satzes mit dem vorher schon bewiesenen ergiebt sich nunmehr der Satz:

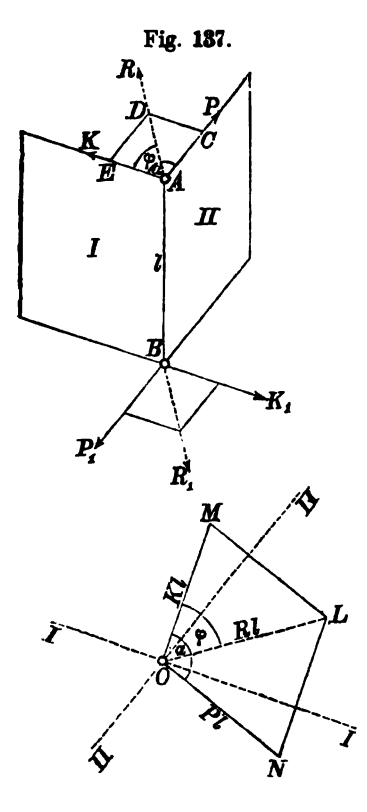
Kräftepaare mit parallelen Drehungs-Ebenen können ersetzt werden durch ein resultirendes Kräftepaar, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente sämmtlicher gegebener Kräftepaare zu setzen ist, und als dessen Drehungs-Ebene irgend eine den gegebenen parallele Ebene gewählt werden kann.

C. Kräftepaare in nicht parallelen Ebenen.

Zwei Kräftepaare, deren Drehungsebenen einander schneiden, können immer dargestellt werden als zwei Kräftepaare K, K_1 und P, P_1, welche an irgend einem willkürlich gewählten Stücke $AB=l$ der Durchschnittslinie als gemeinschaftlichem Hebelarme wirken; denn innerhalb einer Drehungsebene kann (nach früher bewiesenem Satze) jedes Kräftepaar beliebig verschoben werden und durch ein anderes Kräftepaar von gleichem Momente und gleicher Drehungsrichtung ersetzt werden (Fig. 137). Die an dem Endpunkte A wirkenden beiden Kräfte K, P können alsdann nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft R vereinigt werden; ebenso

die am anderen Endpunkte B wirkenden beiden Kräfte K_1, P_1 zur Mittelkraft R_1. Da die betreffenden beiden Kräfteparallelogramme sich nur durch die entgegengesetzten Richtungen der gleichliegenden Seiten von einander unterscheiden, so haben diese beiden Mittelkräfte R, R_1 gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung, bilden also ein Kräftepaar. Das Moment dieses resultirenden Kräftepaares ist $R \, . \, l$, und die Drehungsebene desselben bildet mit der Ebene I denselben Winkel φ, welchen die beiden Kräfte R und K mit einander einschliessen. Es soll nachgewiesen werden, dass die Diagonale OL des aus den Achsen OM und ON der beiden gegebenen Kräftepaare an willkürlich gewählter Stelle gebildeten Parallelogramms $OMLN$ diejenigen Eigenschaften besitzt, welche der Achse des resultirenden Kräftepaares zukommen.

Fig. 187.



Die Linie OM soll die Achse des Kräftepaares K, K_1 darstellen, steht also rechtwinkelig zur Ebene I und hat die Länge $K \, . \, l$; die Linie ON soll auf gleiche Weise*) die Achse des Kräftepaares P, P_1 darstellen, steht also rechtwinkelig zur Ebene II und hat die Länge $P \, . \, l$. Die beiden Parallelogramme $ACDE$ und $OMLN$ sind einander ähnlich; denn erstens ist der Winkel α zwischen den beiden Achsen OM und ON gleich dem Winkel zwischen den beiden Ebenen I und II, folglich auch gleich dem Winkel zwischen den beiden Kräften K und P; und zweitens sind die Seiten des Parallelogramms $OMLN$ sämmtlich l-mal so gross die gleich liegenden Seiten des anderen. Die Diagonale OL ist daher ebenfalls l-mal so gross, als die gleichliegende Diagonale R

*) Hinsichtlich der Richtungen, in welchen die Achsen abzutragen sind, folgt weiter unten eine ausführliche Erklärung.

des anderen, hat demnach die Grösse $R . l$, und die Winkel, welche die Diagonale OL mit den Seiten OM und ON bildet, sind gleich den Winkeln, welche die Diagonale R resp. mit den Seiten K und P, folglich gleich den Winkeln, welche die Ebene des resultirenden Kräftepaares resp. mit den Ebenen I und II einschliesst. Hieraus folgt, dass die Linie OL rechtwinkelig zur Ebene des resultirenden Paares steht, dass also die Diagonale des Achsen-Parallelogrammes nicht nur der Grösse, sondern auch der Richtung nach die Achse des resultirenden Paares darstellt. Irgend ein Kräftepaar, dessen Ebene rechtwinkelig zu dieser Achse steht, und dessen Momentenzahl mit der Längenzahl dieser Achse übereinstimmt, kann als das Resultirende der beiden gegebenen Kräftepaare betrachtet werden — vorausgesetzt, dass zwischen der Drehungsrichtung dieses Kräftepaares und dessen Achsenrichtung dieselben Beziehungen stattfinden, wie zwischen den Drehungsrichtungen der gegebenen Kräftepaare und deren Achsenrichtungen.

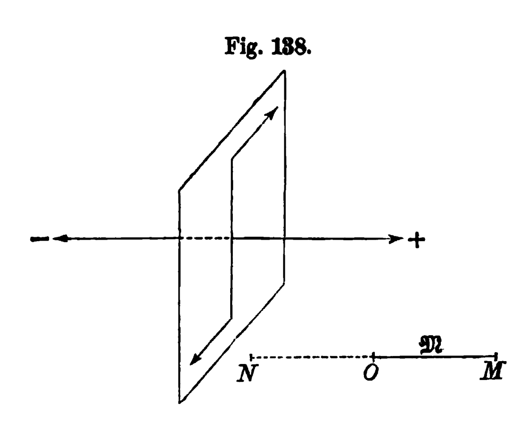
Es ist nämlich, wenn die Construction jenes Achsen-Parallelogrammes unter allen Umständen zu dem richtigen Resultate führen soll, erforderlich, bei dem Abtragen der Achsen consequent nach einer und derselben Methode zu verfahren, um dadurch gewisse Zweideutigkeiten zu vermeiden, welche sonst überall da sich einstellen, wo von der Richtung einer geraden Linie und von der Richtung einer Drehbewegung die Rede ist. In der Normalen einer Ebene giebt es — wie überhaupt in jeder geraden Linie — zwei entgegengesetzte Richtungen, und muss daher ein für alle Male festgestellt werden, nach welcher von beiden Seiten hin die Achse eines gegebenen Kräftepaares allemal abgetragen werden soll.

Die Drehungsebene jedes Kräftepaares theilt den unendlichen Raum in zwei Hälften, welche — zwar an sich unterschiedslos — doch insofern unterschieden werden können, als die Beziehungen der Drehungsrichtung des Kräftepaares zu diesen beiden Raumhälften verschieden sind. Diejenige Raumhälfte soll in Bezug auf das Kräftepaar als die „positive“ bezeichnet werden, von deren Punkten aus betrachtet die demselben entsprechende Drehbewegung als eine von links nach rechts gerichtete erscheinen würde, d. h. übereinstimmend mit der Drehungsrichtung der Zeiger einer gewöhnlichen Uhr, wie sie einem von der Vorderseite aus gegen das Zifferblatt sehenden Beobachter erscheint, die andere als die negative. Dem entsprechend soll als die positive Richtung der Normalen jener Drehungsebene diejenige bezeichnet

werden, welche aus der negativen in die positive Raumhälfte hineinführt.

Wenn von irgend einem Punkte O aus die Achse eines gegebenen Kräftepaares abgetragen werden soll, so ist es an sich gleichgültig, nach welcher von beiden Seiten hin — ob in der Richtung von O nach M oder von O nach N — die Länge $\mathfrak{M}$ (gleich dem Momente des Kräftepaares) abgetragen wird (Fig. 138). Da es indessen, wo mehrere Kräftepaare gleichzeitig vorkommen, erforderlich ist, alle diese Kräftepaare in übereinstimmender Weise zu behandeln, so empfiehlt es sich, von vornherein für eine dieser beiden Methoden sich zu entscheiden, und soll aus diesem Grunde hier festgesetzt werden, dass allemal die positiven Richtungen der betreffenden Normalen als Richtungen der Achse gewählt werden sollen. Für das in Fig. 138 dargestellte Kräftepaar würde demnach das Stück $OM = \mathfrak{M}$ als geometrische Darstellung der Achse zu wählen sein. Die Achse eines entgegengesetzt drehenden Kräftepaares derselben Ebene würde in der Richtung von O nach N hin abzutragen sein.

Fig. 138.



Nachdem hiermit in Bezug auf zwei beliebig gegebene Kräftepaare der allgemeine Beweis geführt worden ist: dass das resultirende Kräftepaar mittelst genau derselben geometrischen Methode bestimmt werden kann, welche bei zwei einfachen Kräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte zur Bestimmung der Mittelkraft benutzt wurde, so können nunmehr auch zur Bestimmung der Resultirenden von mehr als zwei beliebig gegebenen Kräftepaaren ohne Weiteres alle diejenigen Sätze und Regeln angewendet werden, welche in § 19 für die Bestimmung der Mittelkraft von mehr als zwei beliebig gegebenen einfachen Kräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte gefunden wurden. Die Aufgabe, von beliebig vielen beliebig gegebenen Kräftepaaren das Resultirende zu finden, ist damit zurückgeführt auf die Aufgabe: von mehreren

einfachen Kräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte die Mittelkraft zu finden.

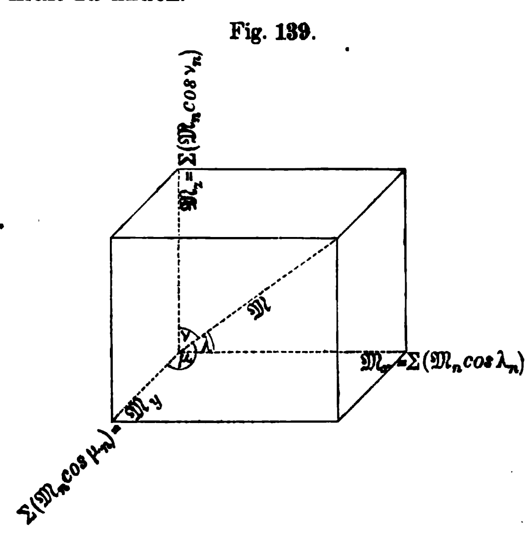


Fig. 139.

Wenn also mit $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_n$ die Momente der gegebenen Kräftepaare, mit $\lambda_1, \mu_1, \nu_1 \ldots \lambda_n, \mu_n, \nu_n$ die Winkel bezeichnet werden, welche deren Achsenrichtungen mit drei rechtwinkelig zu einander stehenden Coordinaten-Achsen einschliessen, und wiederum abkürzungsweise die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_1 \cos \lambda_1 + \mathfrak{M}_2 \cos \lambda_2 + \cdots \mathfrak{M}_n \cos \lambda_n,$$
$$\mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_1 \cos \mu_1 + \mathfrak{M}_2 \cos \mu_2 + \cdots \mathfrak{M}_n \cos \mu_n,$$
$$\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}_1 \cos \nu_1 + \mathfrak{M}_2 \cos \nu_2 + \cdots \mathfrak{M}_n \cos \nu_n,$$

so gelten mit Bezug auf Fig. 139 für das Moment $\mathfrak{M}$ und die Achsenrichtung des resultirenden Kräftepaares die den Gleichungen 42) ... 45) des § 19 analog gebildeten Gleichungen:

$$121) \quad \mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2},$$

$$122) \quad \cos \lambda = \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}}, \qquad 123) \quad \cos \mu = \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}}, \qquad 124) \quad \cos \nu = \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}}.$$

§ 43.

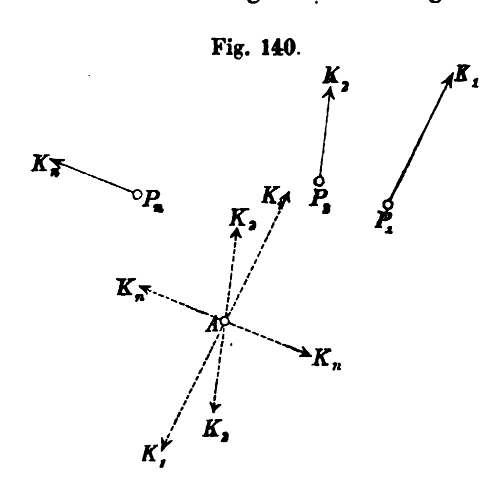
Allgemeine Gleichgewichts-Bedingungen eines Systems von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten.

Es sollen die Bedingungen festgestellt werden, welche erfüllt sein müssen, wenn die an den Angriffspunkten $P_1, P_2 \ldots P_n$ auf ein System unveränderlich verbundener materieller Punkte wirkenden Kräfte $K_1, K_2 \ldots K_n$ einander im Gleichgewicht halten sollen.

Ohne in der Wirkung der gegebenen Kräfte Etwas zu ändern, kann man an irgend einem beliebig gewählten Punkte A des Systems in einer Richtungslinie parallel der Kraft K_1 zwei ent-

gegengesetzte Kräfte hinzufügen, deren jede gleich K_1 ist. An derselben Stelle A kann man ferner, ohne Etwas zu ändern, in einer Richtungslinie parallel der Kraft K_2 zwei entgegengesetzte Kräfte hinzufügen, deren jede gleich K_2 ist. Auf gleiche Weise kann man in Bezug auf alle übrigen Kräfte verfahren (Fig. 140).

Fig. 140.



Statt jeder einzelnen von den n gegebenen Kräften erhält man alsdann drei Kräfte: die eine von diesen drei Kräften hat in dem Punkte A ihren Angriffspunkt und gleiche Richtung mit der unmittelbar gegebenen Kraft; die beiden anderen Kräfte bilden allemal ein Kräftepaar, bestehend aus der unmittelbar gegebenen Kraft und der gleich grossen parallel entgegengesetzten Kraft in dem Punkte A. Man erhält also im Ganzen n einfache Kräfte von bekannter Richtung und Grösse an dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte A, und ausserdem n Kräftepaare, deren Momente und Achsen-Richtungen aus der Lage des willkürlich gewählten Punktes A und aus den gegebenen Kräften zu bestimmen sind.

Die n einfachen Kräfte am gemeinschaftlichen Angriffspunkte A können durch ihre Mittelkraft R ersetzt werden, und jene n Kräftepaare können nach den im vorigen Paragraphen gefundenen Regeln zu einem resultirenden Kräftepaare vom Momente $\mathfrak{M}$ zusammengesetzt werden. Da nach § 41 ein Kräftepaar niemals durch eine einzelne Kraft aufgehoben werden kann, so ist Gleichgewicht nur dann vorhanden, wenn jene Mittelkraft für sich allein gleich Null ist, und zugleich das Moment jenes resultirenden Kräftepaares für sich allein gleich Null ist. Die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen lassen sich also durch die beiden Gleichungen ausdrücken:

$$125)\quad R = 0. \qquad 126)\quad \mathfrak{M} = 0.$$

Jede von diesen beiden Gleichungen enthält indessen drei andere Gleichungen. Denn der allgemeine Ausdruck für die Mittel-

kraft von n einfachen Kräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte ist nach Gleichung 42):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

und der allgemeine Ausdruck für das Moment des Resultirenden von n gegebenen Kräftepaaren ist nach Gleichung 121):

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}.$$

Die unter den Wurzelzeichen stehenden Glieder können als Quadratzahlen nie negativ sein; dass also die beiden Grössen R und $\mathfrak{M}$ gleich Null werden, ist nur dadurch möglich, dass jedes dieser Glieder für sich gleich Null wird. Die Gleichungen 125) und 126) enthalten daher folgende sechs Bedingungs-Gleichungen:

127) $R_x = 0$, 128) $R_y = 0$, 129) $R_z = 0$,

130) $\mathfrak{M}_x = 0$, 131) $\mathfrak{M}_y = 0$, 132) $\mathfrak{M}_z = 0$.

Die vollständige Lösung der vorliegenden Aufgabe erfordert nur noch, dass die in diesen sechs Gleichungen vorkommenden Grössen ausgedrückt werden durch die unmittelbar gegebenen Grössen. Als solche sind zu betrachten: erstens, die Grössen der einzelnen Kräfte $K_1 \ldots K_n$; zweitens, die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, welche die einzelnen Kräfte mit den drei Coordinaten-Achsen einschliessen; drittens, die Coordinaten ihrer Angriffspunkte $x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n$ (Fig. 141).

Fig. 141.

Die in den ersten drei Gleichungen vorkommenden Grössen R_x, R_y, R_z bedeuten nichts Anderes als die drei Seitenkräfte derjenigen Mittelkraft, welche die gegebenen Kräfte in dem Falle bilden würden, wenn sie alle an dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte A wirkten — eine jede parallel ihrer ursprünglich gegebenen Richtung. Die Grössen R_x, R_y, R_z haben daher für den vorliegenden Fall genau dieselbe

Bedeutung, welche bereits in der Mechanik des einfachen materiellen Punktes diesen Grössen beigelegt wurde, nämlich:

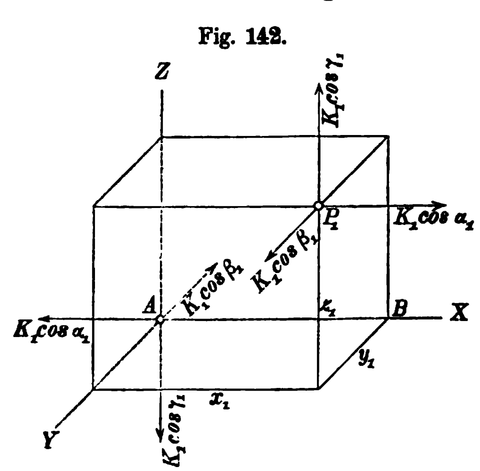
133) $R_x = \Sigma(K\cos\alpha)$, 134) $R_y = \Sigma(K\cos\beta)$, 135) $R_z = \Sigma(K\cos\gamma)$.

Die in den anderen drei Gleichungen vorkommenden drei Grössen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ bedeuten die Achsen oder Momente von drei Kräftepaaren, deren Achsenrichtungen resp. mit den drei Coordinaten-Achsen zusammenfallen, und durch deren Zusammensetzung das resultirende Kräftepaar entsteht. Man bestimmt diese drei Grössen, indem man die Achse jedes der n Kräftepaare nach den drei Coordinaten-Richtungen zerlegt wie eine einfache Kraft, und alsdann die für jede der drei Richtungen von den einzelnen Kräftepaaren gelieferten Beiträge zu einer algebraischen Summe zusammenfasst.

Es lässt sich beweisen, dass jede der drei Grössen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ nichts Anderes bedeutet, als die algebraische Summe der statischen Momente der ursprünglich gegebenen Kräfte in Bezug auf die betreffende Coordinaten-Achse genommen.

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass derselbe in Bezug auf eine der drei Grössen richtig ist, z. B. in Bezug auf die Grösse $\mathfrak{M}_x$; und hierzu wiederum wird es ausreichen, wenn gezeigt wird, dass der von einem der n Kräftepaare herrührende Beitrag zu der Summe $\mathfrak{M}_x$ das statische Moment der betreffenden Kraft in Bezug auf die X-Achse bildet. Es soll zu diesem Zwecke nachgewiesen werden, dass der bei Zerlegung der Achse des Kräftepaares K_1, K_1 in die Richtung AX fallende Beitrag zu der Grösse $\mathfrak{M}_x$ das statische Moment bildet von der in dem Punkte P_1 wirkenden Kraft K_1 in Bezug auf die Achse AX.

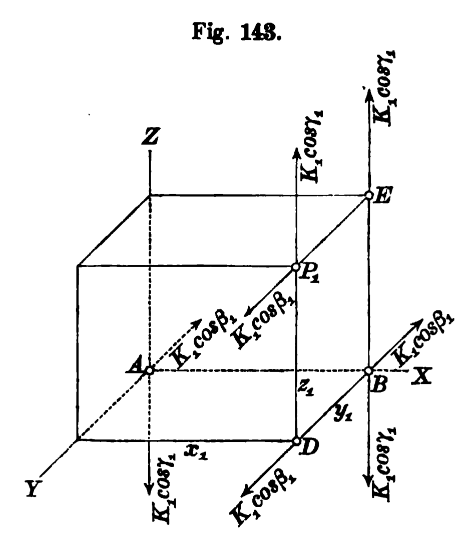
Fig. 142.



Wenn man an jedem der beiden Angriffspunkte A und P_1 die Kraft K_1 in ihre drei Seitenkräfte zerlegt, so erhält man statt des einen Kräftepaares K_1 K_1 drei andere Kräftepaare, bestehend resp. aus den Kräften

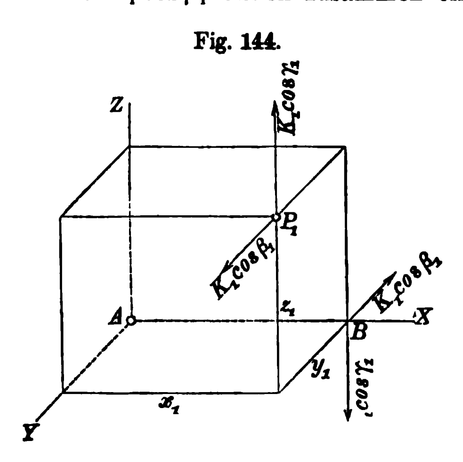
$K_1 \cos\alpha_1$, $K_1 \cos\beta_1$ und $K_1 \cos\gamma_1$ (Fig. 142). Die Achse des Kräftepaares $K_1 \cos\alpha_1$ steht rechtwinkelig zur Achse AX, weil die letztere in der Drehungsebene ABP_1 dieses Kräftepaares liegt; die Achse dieses Kräftepaares kann daher bei der Zerlegung keinen Beitrag zu der Summe $\mathfrak{M}_x$ liefern, und darf also bei der Bestimmung dieses Beitrages unberücksichtigt bleiben.

Fig. 143.



Ohne in der Wirkung der Kräfte Etwas zu ändern, kann man zu den noch übrig bleibenden Kräftepaaren die beiden an den Endpunkten der Linie BD einander aufhebenden Kräfte $K_1 \cos\beta_1$ und die beiden an den Endpunkten der Linie BE einander aufhebenden Kräfte $K_1 \cos\gamma_1$ hinzufügen, wodurch aus jenen zwei Kräftepaaren nunmehr vier Kräftepaare entstehen (Fig. 143). Die in den Punkten A und D wirkenden beiden Kräfte $K_1 \cos\beta_1$ bilden zusammen ein Kräftepaar, in dessen Drehungsebene die Achse AX liegt; ebenso auch die in den Punkten A und E wirkenden beiden Kräfte $K_1 \cos\gamma_1$. Die Achsen dieser letzteren beiden Kräftepaare sind demnach rechtwinkelig zu AX gerichtet und können bei der Zerlegung keinen Beitrag zu der Summe $\mathfrak{M}_x$ liefern.

Fig. 144.



Es bleiben daher nur noch die beiden in Fig. 144 allein angegebenen Kräftepaare übrig, deren Drehungsebenen beide rechtwinkelig zur Richtung AX stehen, deren Achsen also mit dieser Richtung zusammenfallen, deren Momente $K_1 \cos\gamma_1 \cdot y_1$

und $K_1 \cos \beta_1 . z_1$ daher unmittelbar die Beiträge darstellen, welche das Kräftepaar K_1 K_1 zu der Summe $\mathfrak{M}_x$ liefert. Nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen gegebenen Erklärung hat die Achse des ersteren die Richtung von A nach X, die des letzteren die Richtung von X nach A. Die erstere liefert daher einen positiven, die letztere einen negativen Beitrag zu der in der Richtung von A nach X hin abzutragenden Grösse $\mathfrak{M}_x$. Der ganze von dem Kräftepaare K_1 K_1 herrührende Beitrag zu der Summe $\mathfrak{M}_x$ hat demnach die Grösse:

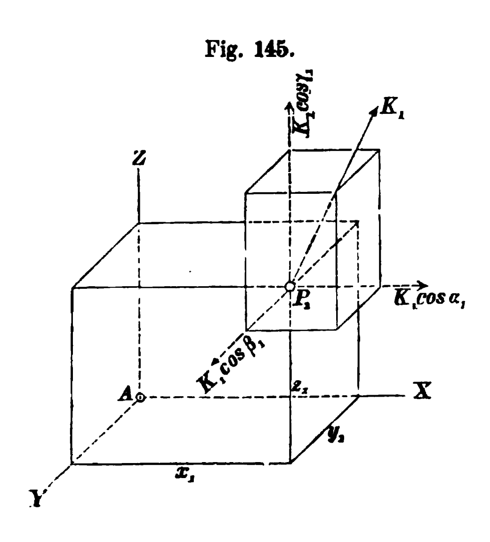
$$136)\quad \mathfrak{M}'_x = K_1 \cos \gamma_1\, y_1 - K_1 \cos \beta_1\, z_1.$$

Nach dem Gesetze der statischen Momente (§ 23) ist das statische Moment der Kraft K_1 gleich der algebraischen Summe der statischen Momente ihrer drei Seitenkräfte in Bezug auf irgend eine Achse. Die statischen Momente dieser drei Seitenkräfte in Bezug auf die Achse AX sind nach Fig. 145:

$$+ K_1 \cos \gamma_1 . y_1, \quad - K_1 \cos \beta_1 . z_1, \quad \text{und Null.}$$

Die algebraische Summe dieser drei Grössen ist identisch mit dem in Gleichung 136) gefundenen Werthe von $\mathfrak{M}'_x$, folglich ist der von dem Kräftepaare K_1 K_1 zu der Summe $\mathfrak{M}_x$ gelieferte Beitrag nichts Anderes als das statische Moment der an dem Angriffspunkte P_1 wirkenden ursprünglich gegebenen Kraft K_1 in Bezug auf die Achse AX. Die Grösse $\mathfrak{M}_x$ selbst bedeutet also die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher gegebenen Kräfte in Bezug auf diese Achse und kann in abgekürzter Form ausgedrückt werden durch die Gleichung:

Fig. 145.



$$137)\quad \mathfrak{M}_x = \Sigma (K \cos \gamma . y - K \cos \beta . z).$$

Die obige Beweisführung würde ihre Gültigkeit nicht verlieren, wenn mit AX diejenige Achse bezeichnet würde, welche hier AY genannt wurde, und die Grösse $\mathfrak{M}_x$ demzufolge diejenige Bedeutung erhielte, welche vorher die Grösse $\mathfrak{M}_y$ hatte. Dasselbe

gilt von derjenigen Veränderung in der Bezeichnungsweise, bei welcher die Grössen $\mathfrak{M}_z$ und $\mathfrak{M}_x$ ihre Bedeutungen mit einander vertauschen würden. Hieraus folgt, dass die drei Grössen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ resp. in Bezug auf die drei Coordinaten-Achsen die gleichen Bedeutungen haben. Jede dieser drei Grössen bedeutet die algebraische Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte auf die betreffende Coordinaten-Achse bezogen. Für $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ ergeben sich hiernach die Werthe:

$$138)\quad \mathfrak{M}_y = \Sigma\,(K\cos\alpha\,.\,z - K\cos\gamma\,.\,x),$$

$$139)\quad \mathfrak{M}_z = \Sigma\,(K\cos\beta\,.\,x - K\cos\alpha\,.\,y).$$

Wenn man die in den Gleichungen 133), 134), 135) und 137), 138), 139) gefundenen Werthe für die in den Gleichungen 127)... 132) vorkommenden Grössen substituirt, so erhalten die sechs allgemeinen Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts nunmehr die Form:

$$140)\quad \Sigma\,(K\cos\alpha) = 0,$$

$$141)\quad \Sigma\,(K\cos\beta) = 0,$$

$$142)\quad \Sigma\,(K\cos\gamma) = 0,$$

$$143)\quad \Sigma\,(K\cos\gamma\,.\,y - K\cos\beta\,.\,z) = 0,$$

$$144)\quad \Sigma\,(K\cos\alpha\,.\,z - K\cos\gamma\,.\,x) = 0,$$

$$145)\quad \Sigma\,(K\cos\beta\,.\,x - K\cos\alpha\,.\,y) = 0.$$

Die Bedeutung dieser sechs allgemeinen Bedingungs-Gleichungen lässt sich auf folgende Weise in Worten ausdrücken:

Wenn die auf ein System von unveränderlich mit einander verbundenen materiellen Punkten wirkenden Kräfte einander im Gleichgewicht halten, so ist für jede von drei rechtwinkelig zu einander stehenden Coordinaten-Achsen:

erstens, die algebraische Summe der bei rechtwinkeliger Zerlegung in diese Richtung fallenden Seitenkräfte gleich Null;

zweitens, die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte in Bezug auf diese Achse gleich Null.

Umgekehrt: wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so befindet sich dass System im Gleichgewichts-Zustande.

Da ferner die Lage jenes Coordinaten-Systems eine willkürlich zu bestimmende war, so ist der obige Satz auch für jede andere Achsenrichtung als gültig zu betrachten und kann daher auch in folgender Form ausgesprochen werden:

Bei einem im Gleichgewichts-Zustande befindlichen festen Körper ist die algebraische Summe der bei rechtwinkeliger Zerlegung in eine und dieselbe — übrigens beliebig zu wählende — Richtung hineinfallenden Seitenkräfte der auf ihn wirkenden Kräfte gleich Null, und zugleich die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher auf ihn wirkenden Kräfte in Bezug auf irgend eine beliebig gewählte Achse gleich Null.

ZEHNTES CAPITEL.

Wirkungen der Schwerkräfte.

§ 44.

Mittelkraft gleichgerichteter Parallel-Kräfte.

Dass nicht in allen Fällen mehrere auf einen festen Körper wirkende Kräfte durch eine einzige Kraft von gleicher Wirkung ersetzt werden können: das zeigte beispielsweise schon der eine in § 41 näher untersuchte Fall, bei welchem die Zahl der Kräfte zwei betrug, und die beiden Kräfte ein Kräftepaar bildeten.

Obschon also von einer Mittelkraft der gegebenen Kräfte im Allgemeinen gar nicht die Rede sein darf in der Mechanik des Systems materieller Punkte, so kann doch das Princip der Mittelkraft auch hier noch mit Vortheil benutzt werden, besonders in denjenigen Fällen, wo die Anzahl der Kräfte, deren Wirkung bestimmt werden soll, eine sehr grosse ist. Wenn man nämlich in solchem Falle das unmittelbar gegebene Kräfte-System in einzelne Gruppen zerlegt auf solche Art, dass jede dieser Gruppen durch eine einzelne Kraft ersetzt werden kann, so lässt sich durch Einführung dieser Mittelkräfte die Wirkung der gegebenen Kräfte immer — wenn auch nicht auf eine einzige, so doch — auf einzelne wenige Kräfte zurückführen, und auf diese Weise für die unmittelbar gegebene Aufgabe eine einfachere übersichtlichere Form gewinnen.

Beim Aufsuchen dieser Mittelkräfte können die im vorigen Paragraphen gefundenen allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen benutzt werden. Denn die Mittelkraft einer Gruppe von Kräften

ist immer so beschaffen, dass sie in entgegengesetzter Richtung genommen zu diesen Kräften hinzugefügt, mit ihnen zusammen ein Kräfte-System bildet, welches den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen entspricht. Es können daher die Bestimmungsstücke dieser unbekannten Kraft durch Einführung derselben in die allgemeinen Bedingungs-Gleichungen und nachherige Auflösung derselben allemal bestimmt werden, und kann auf diese Weise jede Aufgabe, welche das Auffinden einer Mittelkraft betrifft, in eine Aufgabe der Gleichgewichtslehre verwandelt werden.

Unter denjenigen Fällen, in welchen es überhaupt möglich ist, eine gegebene Kräftegruppe durch eine einzige Mittelkraft zu ersetzen, sind als die bemerkenswerthesten diejenigen beiden Fälle hervorzuheben, welche im Laufe der bisherigen Untersuchung schon als solche sich herausgestellt haben, nämlich erstens: der in der Mechanik des einfachen materiellen Punktes bereits erledigte Fall, wenn sämmtliche Kräfte an gemeinschaftlichem Angriffspunkte wirken; zweitens: der in § 40 nur erst oberflächlich behandelte Fall, wenn sämmtliche Kräfte gleiche Richtung haben. Dieser letztere Fall verdient schon aus dem Grunde eine ausführlichere Untersuchung, weil jedes beliebig gegebene Kräfte-System durch Zerlegung der einzelnen Kräfte nach den Achsenrichtungen eines Coordinaten-Systems — wie im vorigen Capitel bereits gezeigt wurde — in einzelne Gruppen von gleichgerichteten Parallel-Kräften sich zerlegen lässt. Die Bestimmung der Mittelkraft einer solchen Gruppe von Parallel-Kräften soll deshalb als eine vorbereitende Aufgabe den weiteren Anwendungen der allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen hier vorangestellt werden, und soll im Folgenden gezeigt werden, wie auch diese Aufgabe mit Hülfe jener allgemeinen Bedingungs-Gleichungen unmittelbar gelöst werden kann.

Wenn mit α, β, γ die Richtungswinkel bezeichnet werden, welche die gemeinschaftliche Richtung der gegebenen Kräfte $K_1 \dots K_n$ mit den drei Achsen eines rechtwinkeligen Coordinaten-Systems einschliesst, und mit α_0, β_0, γ_0 die Richtungswinkel derjenigen Kraft K_0, welche diesen Kräften das Gleichgewicht hält (Fig. 146), so nehmen von den sechs allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen (140 . . . 145) die drei ersten folgende Formen an:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha\,\Sigma(K) + K_0\cos\alpha_0 = 0\\ \cos\beta\,\Sigma(K) + K_0\cos\beta_0 = 0\\ \cos\gamma\,\Sigma(K) + K_0\cos\gamma_0 = 0\end{array}\right\},\ \text{oder:}\ \left\{\begin{array}{l}\cos\alpha\,\Sigma(K) = -K_0\cos\alpha_0\\ \cos\beta\,\Sigma(K) = -K_0\cos\beta_0\\ \cos\gamma\,\Sigma(K) = -K_0\cos\gamma_0\end{array}\right.$$

Wenn man die Quadrate dieser letzteren drei Gleichungen addirt, so erhält man die Gleichung:

$$(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2)\,[\Sigma(K)]^2 = K_0^2\,(\cos\alpha_0^2 + \cos\beta_0^2 + \cos\gamma_0^2),$$

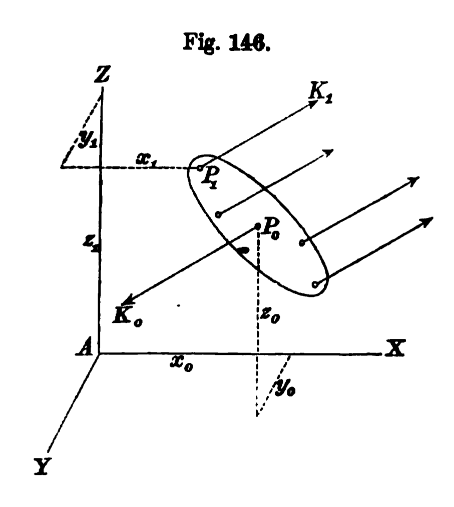
oder:

$$K_0 = \Sigma(K),$$

und wenn man diesen Werth für K_0 in den obigen drei Gleichungen substituirt, so ergeben sich für die Richtungswinkel der Kraft K_0 die Gleichungen:

$$\cos\alpha_0 = -\cos\alpha,$$
$$\cos\beta_0 = -\cos\beta,$$
$$\cos\gamma_0 = -\cos\gamma.$$

Fig. 146.



Hieraus folgt, dass die Kraft K_0 ihrer Grösse nach gleich der Summe der gegebenen Kräfte und ihrer Richtung nach ihnen entgegengesetzt ist. Die Mittelkraft selbst hat also gleiche Richtung mit den gegebenen Kräften und ist ebenfalls gleich ihrer Summe — dasselbe Resultat, welches bereits in § 40 auf anderem Wege gefunden wurde.

Um die Lage der Mittelkraft zu finden, genügt es nunmehr, irgend einen Punkt zu bestimmen, welcher in der Richtungslinie der Kraft K_0 liegt. Nach § 40 wird der Gleichgewichtszustand des Systems nicht gestört, wenn der Angriffspunkt der Kraft K_0 in der Richtungslinie derselben beliebig verschoben wird. Wenn man also die Grössen x_0, y_0, z_0 als Coordinaten desjenigen Punktes einführt, an welchem die Kraft K_0 angreifen muss, um den gegebenen Kräften das Gleichgewicht zu halten, so ist hierbei wohl zu beachten, dass diese drei Coordinaten keineswegs einen fest bestimmten Punkt bezeichnen, sondern nur irgend einen von den unendlich vielen in einer geraden Linie liegenden Punkten, welche sämmtlich die Eigenschaft besitzen, als Angriffspunkte der Kraft K_0 gewählt werden zu dürfen.

Zur Bestimmung der Grössen x_0, y_0, z_0 können die anderen drei Gleichgewichts-Bedingungen 143), 144), 145) in folgender Weise benutzt werden. Nach Einführung der Bestimmungsstücke

der Kraft K_0 erscheinen diese drei Gleichungen zunächst in folgender Form:

$$[\cos\gamma\,\Sigma(Ky) + \cos\gamma_0\,K_0\,y_0] - [\cos\beta\,\Sigma(Kz) + \cos\beta_0\,K_0\,z_0] = 0,$$
$$[\cos\alpha\,\Sigma(Kz) + \cos\alpha_0\,K_0\,z_0] - [\cos\gamma\,\Sigma(Kx) + \cos\gamma_0\,K_0\,x_0] = 0,$$
$$[\cos\beta\,\Sigma(Kx) + \cos\beta_0\,K_0\,x_0] - [\cos\alpha\,\Sigma(Ky) + \cos\alpha_0\,K_0\,y_0] = 0,$$

und wenn man hierin die bereits gefundenen Werthe $\cos\alpha_0 = -\cos\alpha$, $\cos\beta_0 = -\cos\beta$, $\cos\gamma_0 = -\cos\gamma$ substituirt, so erhält man die Gleichungen:

$$146)\quad \begin{cases} \cos\gamma\,[\Sigma(Ky) - K_0\,y_0] - \cos\beta\,[\Sigma(Kz) - K_0\,z_0] = 0, \\ \cos\alpha\,[\Sigma(Kz) - K_0\,z_0] - \cos\gamma\,[\Sigma(Kx) - K_0\,x_0] = 0, \\ \cos\beta\,[\Sigma(Kx) - K_0\,x_0] - \cos\alpha\,[\Sigma(Ky) - K_0\,y_0] = 0. \end{cases}$$

Für die drei Grössen x_0, y_0, z_0 sollen solche Werthe gewählt werden, welche diesen drei Bedingungs-Gleichungen entsprechen. Wären die eingeklammerten Glieder ein jedes für sich gleich Null, so würden offenbar unter allen Umständen die obigen Bedingungs-Gleichungen erfüllt sein. Jede der eingeklammerten Grössen kommt zweimal in den Gleichungen vor, die Zahl dieser Grössen beträgt also drei; mithin würde das Null-Setzen derselben zu eben so vielen Bedingungs-Gleichungen führen, als unbekannte Grössen vorhanden sind, und ist es daher möglich, für die Grössen x_0, y_0, z_0 solche Werthe zu finden, durch welche jedes der eingeklammerten Glieder für sich gleich Null wird. Da es sich nun hier nur darum handelt, irgend einen Punkt in der Richtungslinie der Kraft K_0 zu finden, oder für die Grössen x_0, y_0, z_0 irgend ein Werthen-System, welches den Gleichungen 146) entspricht, so können zur Bestimmung dieser Grössen die drei Gleichungen benutzt werden:

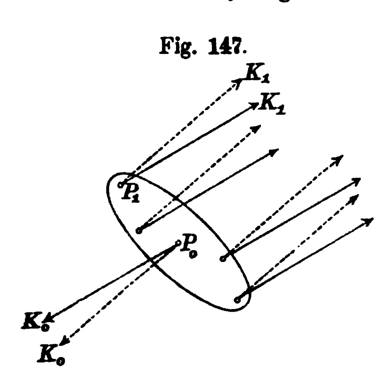
$$147)\quad \begin{cases} [\Sigma(Kx) - K_0\,x_0] = 0, \\ [\Sigma(Ky) - K_0\,y_0] = 0, \\ [\Sigma(Kz) - K_0\,z_0] = 0, \end{cases}$$

aus denen sich nach Substitution des bereits gefundenen Werthes $K_0 = \Sigma(K)$ folgende Werthe für die gesuchten Grössen ergeben:

$$148)\quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)}, \\ y_0 = \dfrac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)}, \\ z_0 = \dfrac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 146) werden, da die Coefficienten der Grössen cos α, cos β, cos γ ein jeder gleich Null gesetzt sind, auch dann noch erfüllt bleiben, wenn den Winkeln α, β, γ beliebige andere Grössen gegeben werden, d. h. wenn für das Kräfte-System eine beliebige andere Richtung gewählt wird. Der hier gefundene Punkt P_0 zeichnet sich daher vor allen übrigen in der Richtungslinie der Kraft K_0 liegenden Punkten durch die Eigenschaft aus, dass er auch dann noch fortfährt, der Richtungslinie der Mittelkraft anzugehören, wenn bei unveränderter bleibender Grösse der gegebenen Kräfte ihre gemeinschaftliche Richtung eine andere wird (Fig. 147). Es ist derjenige Punkt, welcher den Richtungslinien aller der alsdann sich ergebenden Mittelkräfte gemeinschaftlich angehört. Aus diesem Grunde wird der durch die Gleichungen 148) bestimmte Punkt schlechtweg der Angriffspunkt der Mittelkraft jener Parallel-Kräfte genannt, obwohl natürlich streng genommen die Zahl der Punkte, welche als solche gelten können, unendlich gross ist.

Fig. 147.



§ 45.

Allgemeine Gleichungen des Schwerpunktes eines Systems von materiellen Punkten.

Es ist denkbar — und der Fall kommt in der Natur häufig vor — dass eine Gruppe von gleichgerichteten Parallel-Kräften auf ein System von materiellen Punkten in solcher Weise wirkt: dass jeder einzelne materielle Punkt desselben unter Einwirkung einer Kraft sich befindet, welche der Masse desselben proportional ist, dass also der Quotient „Kraft dividirt durch zugehörige Masse" für jeden materiellen Punkt denselben Werth hat. In diesem Falle können, wenn der gemeinschaftliche Werth jener Quotienten mit p*) bezeichnet wird, die aus den Gleichungen:

$$\frac{K_1}{m_1} = \frac{K_2}{m_2} = \cdots = \frac{K_n}{m_n} = p$$

*) Die Grösse p bedeutet hier die Beschleunigung, welche jeder einzelne materielle Punkt durch die auf ihn wirkende Kraft erhalten würde, wenn derselbe vollkommen frei wäre.

für die einzelnen Kräfte sich ergebenden Werthe:

$$K_1 = m_1\, p, \quad K_2 = m_2\, p, \quad \ldots . \; K_n = m_n\, p$$

in den allgemeinen Gleichungen 148) des vorigen Paragraphen substituirt werden, und nehmen dieselben alsdann folgende Formen an:

$$x_0 = \frac{m_1\, p\, x_1 + m_2\, p\, x_2 + \cdots m_n\, p\, x_n}{m_1\, p + m_2\, p + \cdots m_n\, p},$$

$$y_0 = \frac{m_1\, p\, y_1 + m_2\, p\, y_2 + \cdots m_n\, p\, y_n}{m_1\, p + m_2\, p + \cdots m_n\, p},$$

$$z_0 = \frac{m_1\, p\, z_1 + m_2\, p\, z_2 + \cdots m_n\, p\, z_n}{m_1\, p + m_2\, p + \cdots m_n\, p}.$$

Da die Grösse p in Zähler und Nenner dieser Brüche gemeinschaftlicher Factor aller Glieder ist, so kann dieselbe fortgelassen werden, und man erhält nunmehr die folgenden Gleichungen:

$$149) \begin{cases} x_0 = \dfrac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + \cdots + m_n\, x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \\ y_0 = \dfrac{m_1\, y_1 + m_2\, y_2 + \cdots + m_n\, y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \\ z_0 = \dfrac{m_1\, z_1 + m_2\, z_2 + \cdots + m_n\, z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \end{cases}$$

Aus der Form dieser Gleichungen, in denen die Kräfte jetzt durch die Massen der materiellen Punkte ersetzt sind, erkennt man, dass in diesem Falle die Lage des Angriffspunktes der Mittelkraft vollkommen unabhängig ist von Grösse und Richtung der Kräfte, dass sie vielmehr nur abhängt von der Lage der einzelnen materiellen Punkte und von der Art und Weise, in welcher die Masse des ganzen Systems auf die einzelnen Punkte desselben vertheilt ist.

Als solche gleichgerichtete Parallel-Kräfte, welche den Massen der materiellen Punkte proportional sind, können unter Anderen die Gewichte der einzelnen materiellen Punkte betrachtet werden. Der gefundene Punkt bildet demnach unter Anderen den Angriffspunkt für die Mittelkraft der Schwerkräfte, oder für das Gewicht des ganzen Systems und wird aus diesem Grunde der Schwerpunkt desselben genannt. Die Gleichungen 149) sind daher die allgemeinen Gleichungen für die drei Coordinaten des Schwerpunktes eines Systems von materiellen Punkten, und ergeben für das Aufsuchen desselben folgende Regel:

Um den Abstand des Schwerpunktes von irgend einer Ebene zu finden, multiplicire man die Masse jedes einzelnen materiellen Punktes mit seinem Abstande von dieser Ebene und dividire die Summe aller dieser Producte durch die Massensumme des ganzen Systems.

Wenn man die Massensumme des ganzen Systems mit M bezeichnet und die Gleichungen 149) auf beiden Seiten mit dieser Grösse multiplicirt, so nehmen dieselben folgende Form an:

$$150)\quad \begin{cases} M x_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n, \\ M y_0 = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n, \\ M z_0 = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n, \end{cases}$$

und zeigen in dieser Form, dass eine Summe von Producten aus einzelnen Massentheilchen in ihre Abstände von einer bestimmten Ebene immer ersetzt werden kann durch das Product aus der ganzen Masse in ihren Schwerpunktsabstand.

Dieser Satz gilt nicht nur für das ganze System, sondern auch für jeden beliebigen Theil desselben, da jeder solche Theil für sich allein auch wiederum ein System von materiellen Punkten bildet. Man kann also das ganze System in einzelne Gruppen von materiellen Punkten zerlegen und statt der von einer jeden solchen Gruppe herrührenden Producten-Summe auch das Product aus der Massensumme dieser Gruppe in den Schwerpunktsabstand derselben einführen.

Die allgemeinen Schwerpunkts-Gleichungen 149) oder 150) gelten daher auch noch in dem Sinne, wenn man den Buchstaben $m_1, m_2 \ldots m_n$ die Bedeutung von Massensummen ganzer Gruppen von materiellen Punkten (statt von Massen einzelner materieller Punkte) beilegt, wobei dann unter den Buchstaben $x_1 \ldots y_1 \ldots z_1 \ldots$ die Schwerpunktsabstände der betreffenden Gruppen in Bezug auf die Coordinaten-Ebenen zu verstehen sind.

Fig. 148.

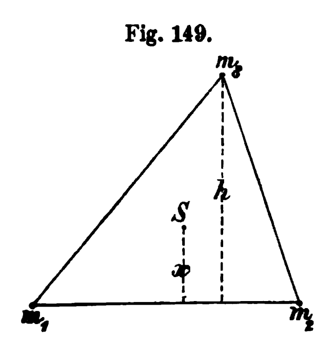
Die Lage des Schwerpunktes eines aus zwei materiellen Punkten bestehenden Systems kann nach Fig. 148 berechnet werden aus der Gleichung:

$$(m_1 + m_2)\, a = m_2\, l, \quad \text{oder:} \quad (m_1 + m_2)(l - a) = m_1\, l.$$

Diese Gleichung bleibt auch dann noch gültig, wenn m_1 und m_2

die Massen von zwei beliebigen Körpern sind, deren Schwerpunkte im Abstande l von einander liegen.

Fig. 149.



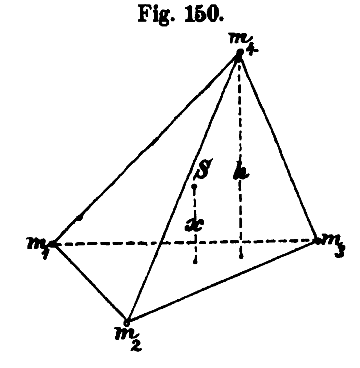
Die Masse der Erde ist ungefähr 80 mal so gross als die Masse des Mondes. Hiernach erhält man für den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes dieser beiden Körper vom Erdmittelpunkte, indem man $m_1 = 80\,m_2$ setzt, den Werth:

$$a = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{l}{81}.$$

Da der Erdhalbmesser ungefähr gleich $\frac{l}{60}$ $\left(\text{also grösser als } \frac{l}{81}\right)$ ist, so liegt dieser gemeinschaftliche Schwerpunkt im Inneren der Erdkugel.

Der Abstand des Schwerpunktes eines aus drei materiellen Punkten bestehenden Systems von einer Seite des durch die Punkte gebildeten Dreiecks kann nach Fig. 149 berechnet werden aus der Gleichung:

Fig. 150.



$$(m_1 + m_2 + m_3)\, x = m_3\, h,$$

und auf gleiche Weise können die Abstände des Schwerpunktes von den anderen beiden Dreieckseiten berechnet werden.

Der Abstand des Schwerpunktes eines aus vier materiellen Punkten bestehenden Systems von einer Seitenfläche des durch die Punkte gebildeten Tetraeders kann nach Fig. 150 berechnet werden aus der Gleichung:

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\, x = m_4\, h,$$

und auf gleiche Weise können die Abstände des Schwerpunktes von den anderen Seitenflächen berechnet werden.

§ 46.

Schwerpunkte geometrischer Körper, Flächen, Linien.

Je näher in einem System von materiellen Punkten die benachbarten Punkte an einander gerückt sind, je grösser die Anzahl der in einem bestimmten Raumtheile enthaltenen materiellen

Punkte ist, um so mehr darf man das System wie einen stetig mit Masse erfüllten Raum ansehen. Denkt man sich zugleich die ganze Masse vollkommen gleichförmig in diesem Raume vertheilt in der Weise, dass je zwei gleiche Raumtheile gleich viel Masse enthalten, so gelangt man zu dem Begriffe eines „homogenen Körpers" oder eines Körpers von „gleichförmiger Dichtigkeit". Die Massen-Quantität, welche in der Cubik-Einheit (etwa in einem Cubikmeter) eines solchen Körpers enthalten ist, wird die „Dichtigkeit" des Körpers genannt.

Wenn mit γ die Dichtigkeit eines homogenen Körpers bezeichnet wird, und mit J sein Rauminhalt (oder die Anzahl der in demselben enthaltenen Cubik-Einheiten), so ist die ganze Masse des Körpers:

$$151)\quad M = \gamma J.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die in irgend einem Raumtheile i_1 dieses Körpers enthaltene Masse m_1 den Werth:

$$m_1 = \gamma\, i_1.$$

Wenn man in den Gleichungen 149) des vorigen Paragraphen die übrigen Massentheile $m_2 \dots m_n$ auf gleiche Weise durch ihre Rauminhalte $i_2 \dots i_n$ ausdrückt, und den Grössen $x_1 \dots y_1 \dots z_1 \dots$ die Bedeutung der Schwerpunktsabstände der betreffenden Massentheile beilegt, so ergeben sich für die Schwerpunkts-Coordinaten des homogenen Körpers die Gleichungen:

$$x_0 = \frac{\gamma\, i_1 x_1 + \dots + \gamma\, i_n x_n}{\gamma\, i_1 + \dots + \gamma\, i_n}, \quad y_0 = \dots \text{ etc.},$$

welche, wenn die Grösse γ als allen Gliedern gemeinschaftlicher Factor in Zähler und Nenner dieser Brüche fortgelassen wird, die Form annehmen:

$$152)\ \begin{cases} x_0 = \dfrac{i_1 x_1 + i_2 x_2 + \dots + i_n x_n}{i_1 + i_2 + \dots + i_n} \\[2ex] y_0 = \dfrac{i_1 y_1 + i_2 y_2 + \dots + i_n y_n}{i_1 + i_2 + \dots + i_n}, \\[2ex] z_0 = \dfrac{i_1 z_1 + i_2 z_2 + \dots + i_n z_n}{i_1 + i_2 + \dots + i_n} \end{cases} \text{oder auch:} \begin{cases} J x_0 = \Sigma(ix) \\[2ex] J y_0 = \Sigma(iy) \\[2ex] J z_0 = \Sigma(iz) \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen, in denen nunmehr die Raumtheile an die Stelle der Massentheile getreten sind, ersieht man, dass bei einem homogenen Körper die Lage des Schwerpunktes ganz unabhängig ist von dem Massengehalte des Körpers, dass sie viel-

mehr nur abhängt von der Form und Lage des Raumes, welchen der Körper einnimmt, und auf rein geometrischem Wege sich bestimmen lässt. Es ist daher bei der Schwerpunkts-Bestimmung eines solchen Körpers gar nicht erforderlich, an einen mit Masse erfüllten Raum zu denken; vielmehr kann man denselben wie einen geometrischen Körper behandeln, und ist es daher zulässig, auch von den Schwerpunkten geometrischer Körper zu reden.

Die Benutzung der Gleichungen 152) setzt voraus, dass die Schwerpunkts-Coordinaten der einzelnen Raumtheile $i_1 \ldots i_n$ bereits anderweitig bekannt sind. Ist dies nicht der Fall, kann man den Körper nicht in solche Theile zerlegen, deren Schwerpunkte man schon kennt, so muss man die Raumtheile $i_1 \ldots i_n$ so klein annehmen, dass hinsichtlich der Lage des Schwerpunktes jedes einzelnen Theiles kein Zweifel mehr stattfinden kann, d. h. man muss sich den ganzen Rauminhalt in eine unendlich grosse Anzahl von unendlich kleinen Raumtheilen zerlegt denken, in welchem Falle wegen mangelnder Auswahl an Stellen innerhalb eines solchen Theiles jeder Zweifel über die Lage des Schwerpunktes in demselben verschwindet. Zähler und Nenner der Gleichungen 152) bilden alsdann Summen von unendlich vielen unendlich kleinen Gliedern, deren Summation nach den Regeln der Integralrechnung auszuführen ist.

Wie von dem Schwerpunkte eines geometrischen Körpers, so kann auch von dem Schwerpunkte einer geometrischen Fläche die Rede sein. Man kann dabei zunächst an ein System von materiellen Punkten denken, welche derartig und in so grosser Anzahl auf einer Fläche zerstreut liegen, dass dieselbe wie stetig und gleichförmig mit Masse überdeckt angesehen werden darf.*) Dieselbe Beweisführung, mitttelst welcher für einen geometrischen Körper die Gleichungen 152) aus den Gleichungen 149) und 148) abgeleitet werden, kann dann unmittelbar übertragen werden auf die Schwerpunkts-Bestimmung der Fläche, sobald man nur unter der Grösse γ — anstatt der in jeder Cubik-Einheit enthaltenen Masse — die auf jeder Flächeneinheit der gegebenen Fläche befindliche Massen-Quantität versteht. Wenn man also den Grössen $i_1 \ldots i_n$ die Bedeutung von Flächentheilen — anstatt von Raum-

*) Annähernd findet diese Vorstellung ihre Verwirklichung in einer sehr dünnen Platte, deren Masse gleichförmig auf den Flächeninhalt derselben vertheilt ist.

theilen — beilegt, so sind die Gleichungen 152) auch für die Schwerpunkts-Coordinaten einer Fläche als unmittelbar gültig anzusehen.*)

Endlich kann man sich ein System von materiellen Punkten auch derartig angeordnet denken, dass die ganze Masse desselben als über eine Linie stetig und gleichförmig vertheilt anzusehen ist**), und gelangt dann durch eine der vorigen ganz analoge Betrachtungsweise — indem man unter der Grösse γ die auf jeder Längen-Einheit dieser Linie befindliche Massen-Quantität versteht — zu der Vorstellung von dem Schwerpunkte einer geometrischen Linie. Um die allgemeinen Gleichungen 152) auch zur Bestimmung der Schwerpunkts-Coordinaten einer Linie benutzen zu können, ist es daher nur erforderlich, den Grössen $i_1 \ldots i_n$ die Bedeutung von Linien-Abschnitten beizulegen.

Anstatt die allgemeinen Gleichungen 152) direct anzuwenden zur Bestimmung der drei Schwerpunkts-Coordinaten eines räumlichen Gebildes, kann man in vielen Fällen durch indirecte Benutzung derselben leichter zum Ziele kommen, indem man für das — übrigens willkürlich anzunehmende — Coordinaten-System eine solche Lage aufsucht, bei welcher einzelne von diesen Schwerpunkts-Coordinaten Null werden. Gelingt es, für das Coordinaten-System eine solche Lage zu finden, bei welcher die Grössen x_0, y_0, z_0 alle drei gleich Null werden, so folgt daraus, dass in dem Ursprunge dieses Coordinaten-Systems der gesuchte Schwerpunkt bereits gefunden ist. Die Grössen x_0, y_0, z_0 sind Null, wenn in den Gleichungen 152) die Zähler auf der rechten Seite Null sind; es ergeben sich also für diesen besonderen Fall die Bedingungs-Gleichungen:

*) Anstatt dessen kann man auch unmittelbar von der Theorie der Parallelkräfte ausgehend jene Fläche mit den Angriffspunkten einer solchen Kräftegruppe derartig besäet sich denken, dass die Fläche stetig von denselben bedeckt ist, und auf je zwei gleich grosse Flächentheile gleich grosse Kraftsummen wirken. Bei dieser Auffassungsweise kann die Zuhülfenahme des Begriffs der gleichförmigen Massenvertheilung ganz umgangen werden, und ergeben sich die Gleichungen 152) direct aus den Gleichungen 148).

**) Annähernd findet diese Vorstellung ihre Verwirklichung in einem sehr dünnen Drahte, dessen Masse gleichförmig auf die Länge desselben vertheilt ist.

$$153)\ \begin{cases} 0 = i_1 x_1 + i_2 x_2 + \cdots + i_n x_n, \\ 0 = i_1 y_1 + i_2 y_2 + \cdots + i_n y_n, \\ 0 = i_1 z_1 + i_2 z_2 + \cdots + i_n z_n. \end{cases}$$

Wenn in einem anderen Falle für das Coordinaten-System eine solche Lage gefunden wurde, bei welcher zwei von den drei Schwerpunkts-Coordinaten, etwa die beiden Grössen y_0 und z_0 gleich Null sind, so folgt daraus, dass der gesuchte Schwerpunkt irgendwo in der X-Achse liegen muss. Die Bedingungs-Gleichungen für diesen Fall sind:

$$154)\ \begin{cases} 0 = i_1 y_1 + i_2 y_2 + \cdots + i_n y_n, \\ 0 = i_1 z_1 + i_2 z_2 + \cdots + i_n z_n. \end{cases}$$

Wenn endlich nur eine von den drei Schwerpunkts-Coordinaten, etwa die Grösse z_0 gleich Null ist, so muss der gesuchte Schwerpunkt irgendwo in der Ebene der beiden Achsen X und Y liegen. Dieser Fall tritt ein, wenn die Bedingungs-Gleichung erfüllt ist:

$$155)\ 0 = i_1 z_1 + i_2 z_2 + \cdots + i_n z_n.$$

Wenn man also für das Coordinaten-System zu verschiedenen Malen eine solche Lage zu finden weiss, bei welcher entweder eine der drei Coordinaten-Ebenen, oder eine der drei Coordinaten-Achsen den Schwerpunkt enthält, so braucht man, um den Schwerpunkt selbst zu finden, nur den Durchschnittspunkt zu bestimmen, entweder von drei solchen Ebenen, oder von zwei solchen geraden Linien, von denen man weiss, dass sie den Schwerpunkt enthalten.

Die Anwendung dieser indirecten Methode ist namentlich in solchen Fällen vorzuziehen, wenn der Körper eine gewisse regelmässige Gestalt besitzt, insofern bei dem ersten Anblick eines solchen Körpers meistens schon leicht zu erkennen ist, wie eine Ebene gelegt werden muss, damit die Bedingungs-Gleichung 155) in Bezug auf sie erfüllt sei. Wenn man nämlich die in dieser Gleichung vorkommenden Producte $i_1 z_1 \ldots i_n z_n$ abkürzungsweise die Momente der einzelnen Raumtheile nennt, so kann man die Bedeutung dieser Bedingungs-Gleichung auch durch die Worte ausdrücken: Die algebraische Summe der Momente der einzelnen Raumtheile in Bezug auf die Ebene XY muss Null sein.

In zwei Fällen lässt sich das Erfülltsein dieser Bedingung auch ohne Rechnung schon leicht erkennen und nachweisen, nämlich erstens in dem Falle, wenn jedes einzelne dieser Momente Null ist, d. h. wenn die Schwerpunkte der einzelnen Theile $i_1 \ldots i_n$ sämmtlich in der Ebene XY liegen; zweitens in dem Falle, wenn

die Ebene XY den Körper in zwei Hälften zerlegt, welche hinsichtlich ihrer Form und Lage gegen die Ebene entweder vollkommen übereinstimmen oder auch in solcher Weise einander gleichen, dass jede Hälfte als das Spiegelbild der anderen gelten kann. Da in diesem zweiten Falle die Abstände der einzelnen Theile — folglich auch ihre Momente — für die eine Hälfte lauter positive, für die andere lauter negative Grössen bilden, so ist leicht zu erkennen, dass die Momente der symmetrisch einander gegenüberliegenden Theile alsdann je paarweise einander aufheben, folglich die ganze Momenten-Summe den Werth Null hat.

Auf ähnliche Weise findet man, dass eine gerade Linie durch den Schwerpunkt einer ebenen Figur hindurchgeht, wenn die Schwerpunkte der einzelnen Flächentheile sämmtlich in dieser geraden Linie liegen, oder auch, wenn durch sie die Figur in zwei Hälften zerlegt wird, welche hinsichtlich ihrer Form und ihrer Lage gegen die Linie vollkommen mit einander übereinstimmen.

Es bedarf also nicht erst der allgemeinen Schwerpunkts-Gleichungen, um z. B. nachzuweisen, dass die Schwerpunkte der Kugeln, Kreise, Würfel, Quadrate etc. mit den Mittelpunkten derselben zusammenfallen, und können bei den nachfolgenden Schwerpunkts-Bestimmungen derartige regelmässige Körper- und Flächenformen füglich übergangen werden.

§ 47.

Schwerpunkte von Linien.

Der Schwerpunkt einer geraden Linie fällt mit dem Mittelpunkte derselben zusammen, weil in Bezug auf jede durch diesen Punkt gelegte Ebene die Gleichung 155) erfüllt ist.

Den Schwerpunkt einer aus geradlinigen Stücken zusammengesetzten (gebrochenen) Linie oder eines Polygon-Umfangs kann man hiernach direct aus den Gleichungen 152) bestimmen, indem man den Grössen $i_1 \ldots i_n$ die Bedeutung der Seitenlängen und den Grössen $x_1 \ldots y_1 \ldots z_1 \ldots$ die Bedeutung der Coordinaten von den Mittelpunkten dieser Seiten beilegt.

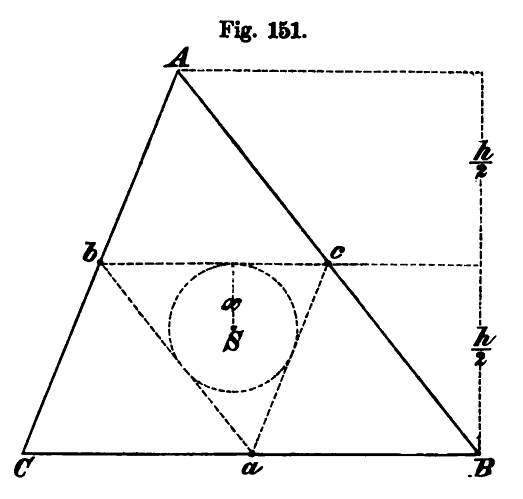
Der Schwerpunkt des aus den drei Seitenlängen a, b, c zusammengesetzten Umfanges des Dreiecks ABC kann auf dieselbe Weise bestimmt werden wie der Schwerpunkt eines Systems von drei in den Mittelpunkten dieser Seiten befindlichen materiellen

Punkten von den Massen a, b, c zu bestimmen sein würde. Nach Fig. 149 und Fig. 151 erhält man also die Gleichung:

$$(a + b + c)\, x = a \cdot \frac{h}{2}.$$

Wenn der Umfang des Dreiecks ABC mit U und der Flächeninhalt desselben mit F bezeichnet wird, so kann man der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

Fig. 151.

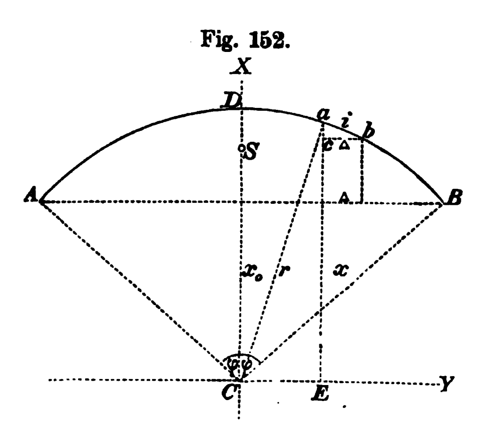


$$x = \frac{F}{U},$$

in welcher dieselbe zeigt, dass der Schwerpunktsabstand in Bezug auf jede Seite des Dreiecks $a\,b\,c$ einen und denselben Werth annimmt. Der Schwerpunkt fällt also mit dem Durchschnittspunkte zusammen, in welchem die Halbirungslinien der drei Winkel des Dreiecks $a\,b\,c$ einander schneiden, oder mit dem Mittelpunkte einer Kreislinie, welche die drei Seiten des Dreiecks $a\,b\,c$ berührt.

Auf analoge Weise findet man den Schwerpunkt einer beliebigen krummen Linie, indem man dieselbe als eine gebrochene Linie von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten ansieht und demgemäss die Linientheile $i_1 \ldots i_n$ unendlich klein annimmt.

Fig. 152.



Ist die krumme Linie ein Kreisbogen, so genügt es, den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises zu bestimmen, da nach § 46 als bekannt vorausgesetzt werden darf, dass der Schwerpunkt in dem halbiren-

den Radius CD liegt (Fig. 152). Zur Bestimmung der Coordinate $SC = x_0$ dient die erste der drei Gleichungen 152):

$$x_0 = \frac{i_1 x_1 + i_2 x_2 + \cdots + i_n x_n}{i_1 + i_2 + \cdots + i_n},$$

in welcher $i_1 \ldots i_n$ die unendlich kleinen Bogentheile und $x_1 \ldots x_n$ deren Abstände von der Achse CY bedeuten.

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke abc und CaE ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{cb}} = \frac{\overline{Ca}}{\overline{Ea}}, \quad \text{oder:} \quad \frac{i}{\Delta} = \frac{r}{x}, \quad \text{also:} \quad ix = r\Delta.$$

Wenn man für sämmtliche Momente $i_1 x_1 \ldots i_n x_n$ resp. die auf ähnliche Weise gebildeten Producte $r\Delta_1 \ldots r\Delta_n$ substituirt, so erhält man für x_0 die Gleichung:

$$x_0 = \frac{r\Delta_1 + r\Delta_2 + \cdots + r\Delta_n}{i_1 + i_2 + \cdots + i_n} = r \cdot \frac{\Sigma(\Delta)}{\Sigma(i)} = r \cdot \frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}},$$

oder, wenn Sehne und Bogen durch den halben Winkel ausgedrückt werden:

$$156) \quad x_0 = r \cdot \frac{2r \sin\varphi}{2r\varphi} = r \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Setzt man hierin $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man für den Schwerpunktsabstand des Halbkreisbogens den Werth:

$$157) \quad x_0 = \frac{2r}{\pi}.$$

§ 48.

Schwerpunkte von Flächen.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks ABC liegt in der geraden Linie DC, welche die Mitte der Seite AB mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte C verbindet, weil die Schwerpunkte der unendlich schmalen Streifen MN, $PQ \ldots$, in welche durch parallel zur Seite AB gezogene Linien das ganze Dreieck zerlegt werden kann, sämmtlich in der Linie DC liegen (Fig. 153). Aus gleichem Grunde enthält auch die von der Mitte der Seite BC nach dem gegenüberliegenden Eckpunkte A gezogene Linie EA den Schwerpunkt des Dreiecks, und fällt derselbe also mit dem Durchschnittspunkte S der beiden Linien DC und EA zusammen. Dieser Punkt liegt, von jeder Seite als Grundlinie aus gerechnet, im ersten

Drittel der Höhe des Dreiecks (denn es ist $\Delta ASC \sim \Delta ESD$ und $DE = \frac{1}{2} AC$, folglich: $DS = \frac{1}{2} CS = \frac{1}{3} CD$).

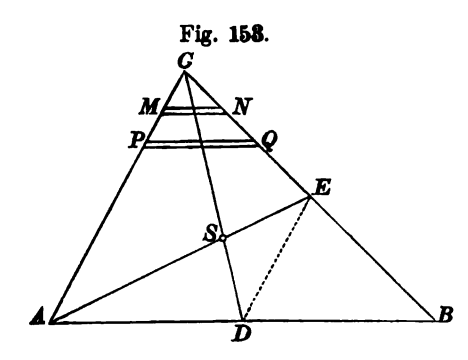
Hiernach erhält man für den Abstand des Schwerpunktes der Dreieckfläche von einer bestimmten geraden Linie (oder Ebene) aus Fig. 154 die Gleichung:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{3}\left\{x_3 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right\}, \text{ oder:}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Der Schwerpunkts-Abstand ist also gleich dem arithmetischen Mittel von den Abständen der drei Eckpunkte des Dreiecks.

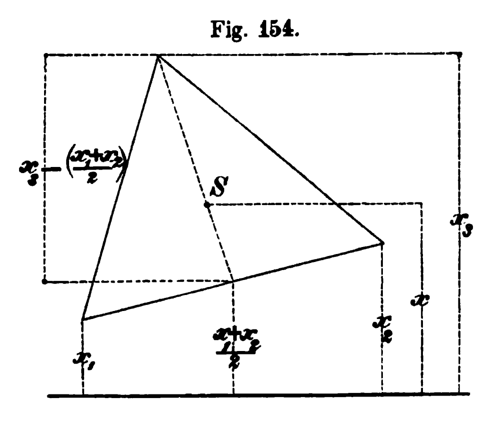
Fig. 153.



Den Schwerpunkt einer Viereckfläche kann man dadurch bestimmen, dass man dieselbe zweimal auf verschiedene Weise mittelst der Diagonale in zwei Dreieckflächen zerlegt und jedes Mal die Schwerpunkte derselben durch eine gerade Linie verbindet. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Verbindungslinien ist der gesuchte Schwerpunkt der Viereckfläche.

Anstatt dessen kann man auch die in Fig. 155 dargestellte Construction anwenden, indem man die Länge CF von A nach E abträgt, und den Schwerpunkt der schraffirten Dreieckfläche EBD aufsucht. Dieser Punkt ist zugleich der Schwerpunkt der ganzen Viereckfläche. Denn die beiden schraffirten Dreieckflächen EBF und EDF haben sowohl dieselben Schwerpunkte S_1 und S_2, als auch dasselbe Flächenverhältniss wie die denselben correspondirenden Dreieckflächen resp. ABC und ADC.

Fig. 154.

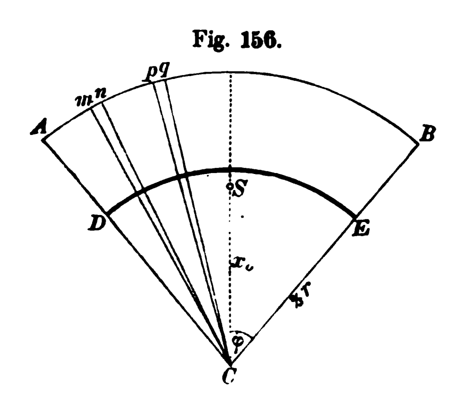


Die Schwerpunkts-Coordinaten einer beliebigen Polygonfläche kann man direct aus den allgemeinen Schwerpunkts-Gleichungen (§ 46) berechnen, indem man den Grössen $i_1 \ldots i_n$ die Bedeutung der Flächeninhalte der einzelnen Dreieckflächen beilegt, in welche die Polygonfläche zerlegt werden kann, und den Grössen $x_1 \ldots y_1 \ldots z_1 \ldots$ die Bedeutung der Schwerpunkts-Coordinaten dieser Dreieckflächen.

Fig. 155.

Der Schwerpunkt eines Kreis-Sectors vom Halbmesser r fällt zusammen mit dem Schwerpunkte eines mit dem Halbmesser $\frac{2}{3}r$ in diesem Sector beschriebenen Kreisbogens DE, weil die Schwerpunkte der einzelnen Dreiecke Cmn, $Cpq \ldots$, in welche durch Theilung des Winkels 2φ in seine unendlich kleinen Theile der Sector zerlegt werden kann, sämmtlich in dem Bogen DE liegen und die Flächeninhalte dieser Dreiecke den zugehörigen Abschnitten des Bogens DE proportional sind (Fig. 156). Nach Gleichung 156) ist also der Abstand des Schwerpunktes vom Kreismittelpunkte:

Fig. 156.



$$158)\quad x_0 = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin \varphi}{\varphi},$$

und wenn man hierin $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt, so erhält man für den Schwerpunktsabstand der Halbkreisfläche den Werth:

$$159)\quad x_0 = \frac{4r}{3\pi}.$$

Wenn man die Sector-Fläche $CADB = F$ durch die Sehne AB in die Segment-Fläche $ADB = F_1$ und die Dreieck-Fläche $CAB = F_2$ zerlegt (Fig. 157), so lässt sich mittelst des Satzes: „das Moment des Ganzen ist gleich der Summe der Momente seiner Theile“, oder aus der Gleichung:

$$F x_0 = F_1\, x_1 + F_2\, x_2$$

nunmehr auch der Schwerpunktsabstand für das Segment bestimmen, indem man die Gleichung für x_1 auflöst:

$$x_1 = \frac{F x_0 - F_2 x_2}{F_1}$$

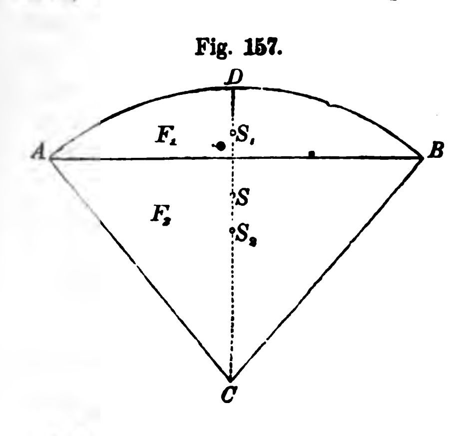


Fig. 157.

und darin für die Grössen x_0 und x_2 die bereits gefundenen Werthe substituirt.

Auf dieselbe Weise kann man auch den Schwerpunktsabstand für einen Ring-Sector $ABDE$ (Fig. 158) bestimmen, indem man die Fläche desselben als Differenz zweier Sector-Flächen von den Halbmessern R und r behandelt und dem entsprechend in der obigen Gleichung die Werthe substituirt: $F = R^2\varphi$, $x_0 = SC = \frac{2}{3}\frac{R\sin\varphi}{\varphi}$, $F_2 = r^2\varphi$, $x_2 = S_2C = \frac{2}{3}\frac{r\sin\varphi}{\varphi}$ und $F_1 = R^2\varphi - r^2\varphi$. Man erhält dann für den gesuchten Schwerpunktsabstand $S_1C = x_1$ die Gleichung:

$$160)\quad x_1 = \frac{R^2\varphi\cdot\frac{2}{3}\frac{R\sin\varphi}{\varphi} - r^2\varphi\cdot\frac{2}{3}\frac{r\sin\varphi}{\varphi}}{R^2\varphi - r^2\varphi} = \frac{2}{3}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right)\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

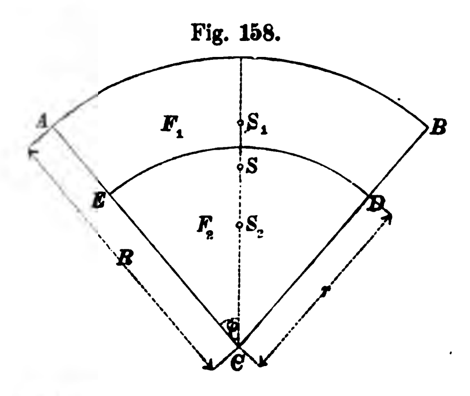


Fig. 158.

Der Schwerpunkt der Mantelfläche eines Cylinders liegt in dem Mittelpunkte seiner Achse.

Legt man durch eine Kugeloberfläche und den sie einhüllenden Cylinder-Mantel rechtwinkelig zur Achse des letzteren zwei unendlich nahe bei einander befindliche Ebenen E und E_1 (Fig. 159), so haben die beiden aus Kugel- und Cylinder-Fläche dadurch herausgeschnittenen unendlich schmalen Zonen gemeinschaftlichen Schwerpunkt und gleichen Flächeninhalt (denn die Fläche der Kugelzone ist:

$f = 2 \, . \, r \, . \cos\varphi \, . \, \pi \, . \, \overline{mn}$, oder da $\overline{mn} \, . \cos\varphi = \overline{pq}$ ist: $f = 2r\pi \, . \, \overline{pq}$, folglich gleich dem Flächeninhalte der Cylinderzone). Wenn man also zur Bestimmung der Schwerpunkts - Coordinaten einer Kugel - Zone (oder -Schale) von beliebig gegebener Höhe die allgemeinen Gleichungen 152) benutzt, so können darin für die Grössen $i_1 \ldots i_n$ anstatt der Flächeninhalte der unendlich schmalen Kugel-Zonen, in welche die gegebene Fläche zu zerlegen ist, auch die Flächeninhalte der correspondirenden Cylinder-Zonen gesetzt werden, und folgt daraus, dass der gesuchte Schwerpunkt zusammenfällt mit dem Schwerpunkte des correspondirenden Theiles der Cylinder - Fläche. Der Schwerpunkt einer Kugel - Zone (Fig. 160) liegt also in dem Mittelpunkte ihrer Achse MN (eben so auch der einer Kugel-Schale), und der Abstand des Schwerpunktes einer Halbkugelfläche vom Mittelpunkte ist gleich der Hälfte des Halbmessers.

Fig. 159.

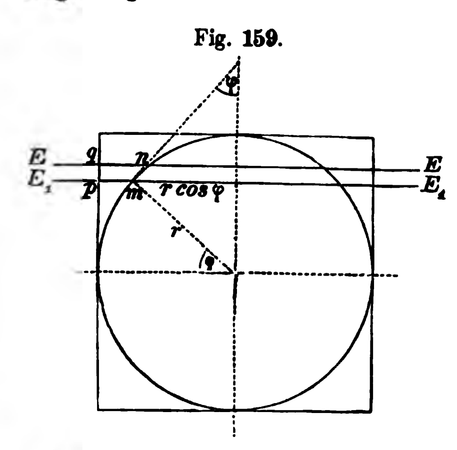
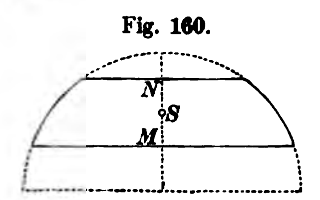


Fig. 160.



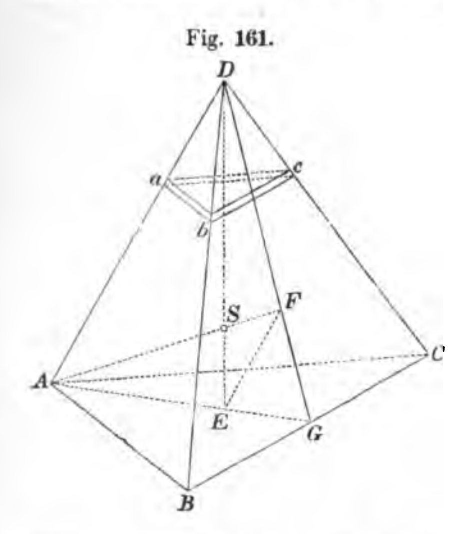
§ 49.

Schwerpunkte geometrischer Körper.

Der Schwerpunkt eines Tetraeders oder einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$ liegt in der geraden Linie ED, welche den Schwerpunkt der Grundfläche ABC mit der Spitze verbindet, weil die Schwerpunkte der unendlich dünnen Schichten $abc \ldots$, in welche durch parallel zur Grundfläche gelegte Ebenen die ganze Pyramide sich zerlegen lässt, sämmtlich in der Linie ED liegen (Fig. 161). Aus gleichem Grunde muss der Schwerpunkt der Pyramide auch in der Linie FA liegen, welche den Schwerpunkt der Fläche BCD mit der gegenüberliegenden Spitze A verbindet, und fällt derselbe daher mit dem Durchschnittspunkte S der beiden Linien ED und FA zusammen. Dieser Punkt liegt über jeder

Seitenfläche (als Grundfläche genommen) im ersten Viertel der Höhe der Pyramide. (Denn es ist $GF = \frac{1}{3} GD$ und $GE = \frac{1}{3} GA$, also: $\Delta SFE \sim \Delta SAD$ und $FE = \frac{1}{3} AD$, folglich: $ES = \frac{1}{3} SD = \frac{1}{4} ED$).

Fig. 161.



Mit Benutzung des aus Fig. 154 abgeleiteten Satzes erhält man hiernach aus Fig. 162 für den Abstand des Schwerpunktes eines Tetraëders von einer bestimmten Ebene die Gleichung:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{1}{4}\left\{x_4 - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)\right\},$$

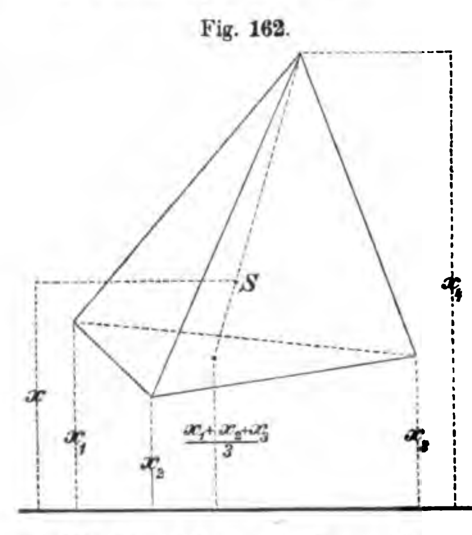
oder:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

Der Schwerpunktsabstand ist also gleich dem arithmetischen Mittel von den Abständen der vier Eckpunkte des Tetraëders.

Der Schwerpunkt einer mehrseitigen Pyramide liegt in der Linie OM, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet (Fig. 163) und zwar im ersten Viertel der Höhe; letzteres aus dem Grunde, weil die Schwerpunkte der dreiseitigen Pyramiden, in welche die gegebene Pyramide sich zerlegen lässt, sämmtlich in einer Ebene sich befinden, welche parallel zur Grundebene im ersten Viertel der Höhe über derselben liegt.

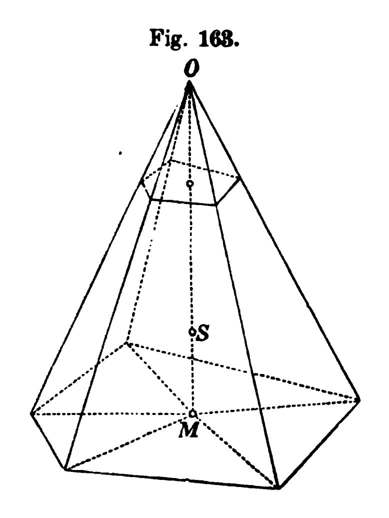
Fig. 162.



Ein Kegel kann als Pyramide von unendlich vielen Seiten-

Flächen betrachtet werden, folglich liegt auch der Schwerpunkt des Kegels im ersten Viertel der Höhe und zwar in derjenigen Linie, welche den Mittelpunkt des Grundkreises mit der Spitze des Kegels verbindet.

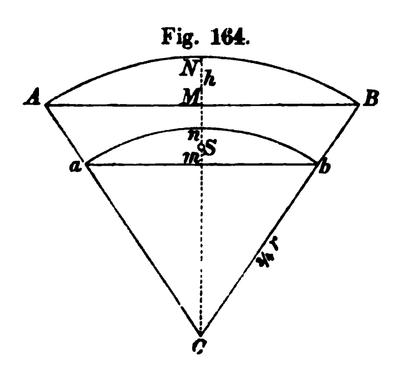
Fig. 163.



Die Schwerpunkts-Coordinaten eines Polyeders kann man direct aus den Gleichungen 152) bestimmen, indem man für die Grössen $i_1 \dots i_n$ die Inhalte der Pyramiden setzt, in welche dasselbe zerlegt werden kann, und für die Grössen $x_1 \dots y_1 \dots z_1 \dots$ die Schwerpunkts-Coordinaten dieser Pyramiden.

Ein Kugel-Sector kann als ein Aggregat von Pyramiden betrachtet werden, deren Spitzen im Mittelpunkte und deren unendlich kleine Grundflächen in der Oberfläche der Kugel liegen. Der Schwerpunkt des Sectors $CANB$ vom Halbmesser r fällt daher zusammen mit dem Schwerpunkte der Kugel-Schale $anbm$ vom Halbmesser $\frac{3}{4} r$, weil die Schwerpunkte jener Pyramiden sämmtlich in dieser Kugel-Schale liegen, und die Inhalte derselben den zugehörigen Flächentheilen dieser Kugel-Schale proportional sind. Der Schwerpunkt der Kugel-Schale $anbm$ liegt in der Mitte der Linie mn, und da $mn = \frac{3}{4} MN = \frac{3}{4} h$ ist, so ergiebt sich für den Abstand $SC = x_0$ des Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Kugel die Gleichung:

Fig. 164.



$$161)\quad x_0 = \frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h.$$

Setzt man hierin $h = r$, so erhält man für den Schwerpunktsabstand der Halbkugel vom Mittelpunkte den Werth:

162)' $x_0 = \frac{3}{8} r.$

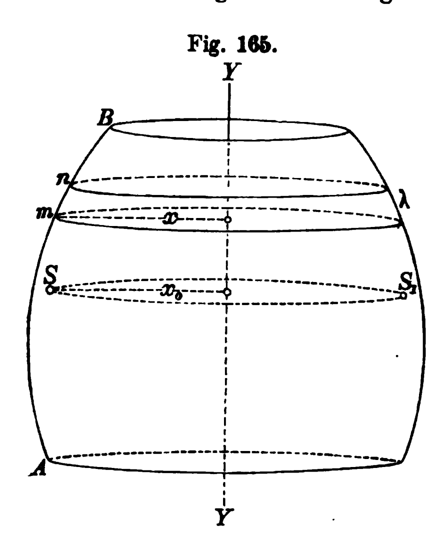
Den Schwerpunktsabstand eines Kugel-Segments bestimmt man mittelst derselben Methode, welche bei der Schwerpunktsbestimmung des Kreis-Segments bereits erklärt wurde, indem man den Kugel-Sector zerlegt in Kugel-Segment und Kegel und das Moment des Ganzen alsdann gleich der Summe der Momente der beiden Theile setzt.

§ 50.

Anwendungen auf Inhaltsbestimmungen von Rotationsflächen und Rotationskörpern.

Wenn eine Ebene um eine in derselben liegende Drehachse sich dreht, so legt ein in der Entfernung x von der Drehachse befindlicher Punkt dieser Ebene während einer Umdrehung derselben einen Weg von der Länge $2x\pi$ zurück, und eben so gross ist auch die Länge des Flächenstreifens, welcher von dem daselbst befindlichen unendlich kleinen Abschnitte $mn = \lambda'$ einer in jener Ebene liegenden Linie AB beschrieben wird (Fig. 165). Die Breite desselben ist λ, folglich ist der Inhalt dieses Flächenstreifens gleich $2x\pi\lambda$. Die von der ganzen Linie $AB = l$ beschriebene Fläche F ist der Inbegriff der von ihren einzelnen Theilen beschriebenen Flächenstreifen, also:

Fig. 165.



$$F = \Sigma(2x\pi\lambda) = 2\pi\Sigma(\lambda x).$$

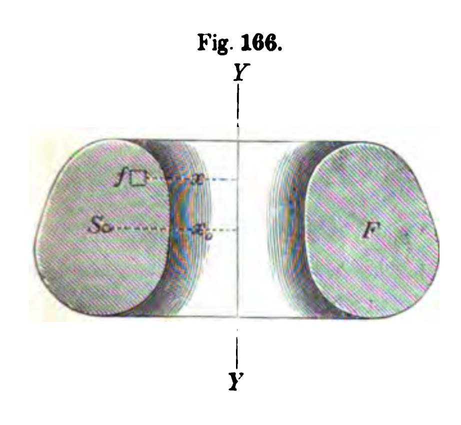
Nach der Lehre vom Schwerpunkte kann statt der Momentensumme der einzelnen Theile auch das Moment der ganzen Linie, oder $\Sigma(\lambda x) = lx_0$ gesetzt werden, mithin ist:

163) $F = 2x_0\pi l.$

Man erhält also den Inhalt der beschriebenen Fläche, indem man die Länge der erzeugenden Linie multiplicirt mit der von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Wegeslänge.

Auf ähnliche Weise bestimmt man den Inhalt des Raumes, welcher von irgend einem Flächentheile der Ebene beschrieben wird (Fig. 166). Das in der Entfernung x von der Drehachse befindliche unendlich kleine Theilchen f dieser Fläche beschreibt während einer Umdrehung den Raum $2x\pi f$, und der von der ganzen Fläche F beschriebene Raum ist:

Fig. 166.



$$J = \Sigma(2x\pi f) = 2\pi\Sigma(fx),$$

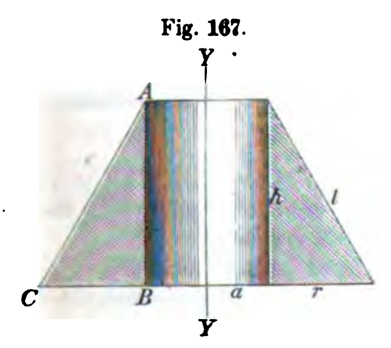
oder, wenn statt $\Sigma(fx)$ das Moment der ganzen Fläche Fx_0 gesetzt wird:

$$164) \quad J = 2x_0\pi F.$$

Man erhält also den Inhalt des von der Fläche beschriebenen Raumes, indem man den Inhalt der erzeugenden Fläche multiplicirt mit der von ihrem Schwerpunkte zurückgelegten Wegeslänge.

Beide hier gefundene Sätze gelten nicht nur für die ganze Umdrehung, sondern auch für einen beliebigen Theil derselben, und ist für diesen Fall in den obigen Gleichungen nur statt der vollen Umdrehung 2π der beschriebene Winkel φ zu substituiren.

Fig. 167.



Den Inhalt des von der Fläche des rechtwinkeligen Dreiecks ABC bei einer Umdrehung desselben um die Achse Y beschriebenen Raumes (Fig. 167) findet man aus Gleichung 164), indem man darin $F = \frac{rh}{2}$ und $x_0 = a + \frac{r}{3}$ setzt:

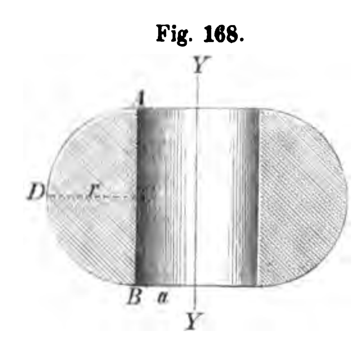
$$J = \left(a + \frac{r}{3}\right)\pi r h.$$

Die Seite $AC = l$ beschreibt dabei die Mantelfläche eines abgekürzten Kegels, deren Inhalt aus Gleichung 163) sich ergiebt, wenn man darin $x_0 = a + \frac{r}{2}$ setzt:

$$F = 2\left(a + \frac{r}{2}\right)\pi l.$$

Wenn man in diesen beiden Gleichungen $a = 0$ setzt, so erhält man resp. für Inhalt und Mantelfläche eines Kegels von der Höhe h, dem Grundkreishalbmesser r und der Seitenlinie l die Werthe:

Fig. 168.



$$J = \frac{r^2 \pi h}{3} \quad \text{und} \quad F = r \pi l.$$

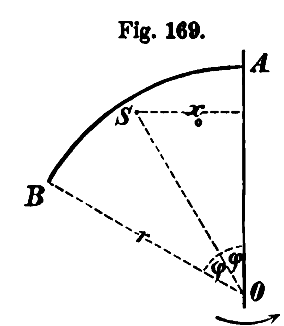
Den Inhalt des von der Halbkreisfläche $ADBC$ bei einer Umdrehung derselben um die Achse Y beschriebenen Raumes (Fig. 168) erhält man aus Gleichung 164), indem man darin $F = \frac{r^2 \pi}{2}$ und $x_0 = a + \frac{4r}{3\pi}$ setzt:

$$J = \left(a + \frac{4r}{3\pi}\right) r^2 \pi^2,$$

und die von der Halbkreislinie ADB beschriebene Fläche aus Gleichung 163), indem man darin $l = r\pi$ und $x_0 = a + \frac{2r}{\pi}$ setzt:

$$F = 2\left(a + \frac{2r}{\pi}\right) r \pi^2.$$

Fig. 169.



Wenn man in diesen letzteren beiden Gleichungen $a = 0$ setzt, so ergeben sich resp. für Inhalt und Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser r die Werthe:

$$J = \frac{4}{3} r^3 \pi \quad \text{und} \quad F = 4 r^2 \pi.$$

Die von dem Kreisbogen AB bei Umdrehung um die Achse AO beschriebene Fläche hat nach Fig. 169 den Inhalt:

$$F = 2 r \varphi \, . \, 2 x_0 \pi.$$

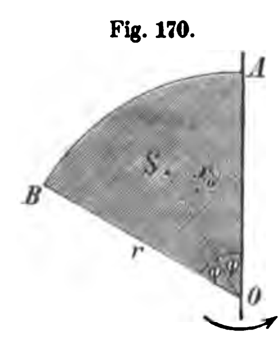
Der Abstand des Kreisbogen-Schwerpunktes von der Drehachse hat nach § 47 die Grösse:

$$x_0 = \overline{OS} \, . \, \sin\varphi = r \frac{\sin\varphi^2}{\varphi},$$

und nach Substitution dieses Ausdruckes erhält man für den Flächeninhalt der Kugel-Schale den Werth:

$$F = 4 r^2 \pi \sin\varphi^2.$$

Fig. 170.



Der von dem Kreis-Sector ABO bei der Umdrehung um die Achse AO beschriebene Raum hat nach Fig. 170 den Inhalt:

$$J = r^2 \varphi \, . \, 2 x_0 \pi.$$

Der Abstand des Sector-Schwerpunktes von der Umdrehungs-Achse hat nach § 48 die Grösse:

$$x_0 = \overline{OS} \, . \, \sin\varphi = \frac{2}{3} r \frac{\sin\varphi^2}{\varphi},$$

und nach Substitution dieses Ausdruckes erhält man für den Raum-Inhalt des beschriebenen Kugel-Sectors den Werth:

$$J = \frac{4}{3} r^3 \pi \sin\varphi^2.$$

Indem man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\sin\varphi = 1$ setzt, erhält man resp. für die Oberfläche und den Rauminhalt der ganzen Kugel wiederum die oben gefundenen Werthe.

ELFTES CAPITEL.

Widerstände fester Unterstützungspunkte.

§ 51.

Stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht des an einem Punkte unterstützten Körpers.

Das Gewicht eines Körpers, oder die Mittelkraft von allen denjenigen Kräften, durch welche die unendlich kleinen Theile des Körpers von der Schwere nach unten gezogen werden, ist wegen übereinstimmender Richtung derselben gleich der Summe dieser Kräfte und kann unter allen Umständen als eine im Schwerpunkte des Körpers angreifende vertical abwärts wirkende Kraft betrachtet werden — welche Lage auch immer der Körper haben möge.

Wenn das Gewicht des Körpers durch irgend eine andere Kraft aufgehoben werden soll, so muss diese letztere Kraft erstens: vertical aufwärts wirken; zweitens: eben so gross sein als das Gewicht des Körpers; drittens muss der Angriffspunkt derselben in der durch den Schwerpunkt gelegten Verticalen sich befinden. Diesen drei Bedingungen genügt der durch das Gewicht G hervorgerufene Widerstand W irgend eines in den Verticalen des Schwerpunktes liegenden festen Punktes O; denn nach § 30 ist der Widerstand eines festen Punktes eine Kraft, die allemal gerade so gross ist und in solcher Richtung wirkt, wie es erforderlich ist, um jede Bewegung dieses Punktes zu verhindern. Wenn also irgend einer von den unendlich vielen in der Schwerpunkts-Verticalen liegenden Punkten des Körpers ein fester Punkt ist, so befindet sich der Körper im Gleichgewichtszustande (vorausgesetzt, dass keine sonstigen Kräfte thätig sind).

Umgekehrt: wenn der in dem Punkte O befestigte Körper im Ruhezustande sich befindet, so kann man daraus schliessen, dass die beiden Kräfte G und W einander im Gleichgewicht halten, dass also der Schwerpunkt irgendwo in der durch den

Befestigungspunkt gelegten Verticalen AB sich befinden muss (Fig. 171). Hieraus ergiebt sich ein Mittel, die Lage des Schwerpunktes — anstatt durch Rechnung — auf experimentellem Wege zu bestimmen. Hängt man nämlich zu verschiedenen Malen den Körper an verschiedenen Punkten O und O_1 auf und bestimmt jedes Mal die Durchschnittspunkte A, B und A_1, B_1, in welchen die Oberfläche des Körpers von der Verticalen des Aufhängepunktes geschnitten wird, so ist der Durchschnittspunkt S der Verbindungslinien AB und $A_1 B_1$ der gesuchte Schwerpunkt.

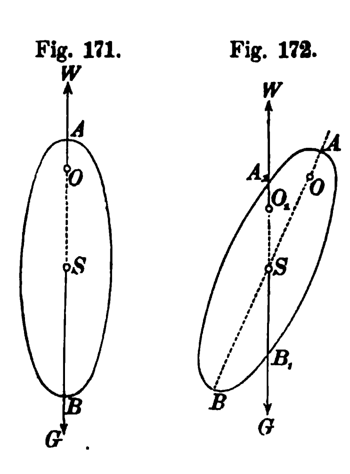


Fig. 171. Fig. 172.

Wenn der im Punkte O befestigte Körper aus seiner Gleichgewichtslage ein wenig verschoben und dann losgelassen wird, so tritt im Allgemeinen Bewegung ein, und zwar eine Drehung um den Befestigungspunkt herum. Je nachdem die beginnende Drehbewegung entweder so beschaffen ist, dass sie den Körper seiner früheren Gleichgewichtslage wieder zuführt, oder der Art, dass sie ihn noch weiter von derselben entfernt, wird der anfängliche Gleichgewichtszustand entweder ein stabiler oder ein labiler Gleichgewichtszustand genannt. Indifferent nennt man den anfänglichen Gleichgewichtszustand, wenn nach jener Verschiebung gar keine Bewegung eintritt, d. h. wenn jede benachbarte Lage eben-

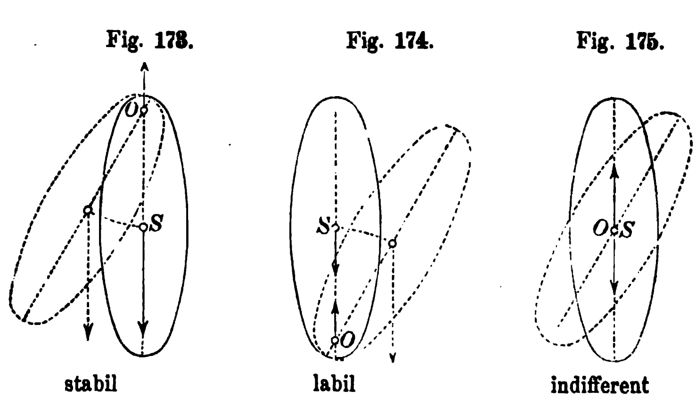
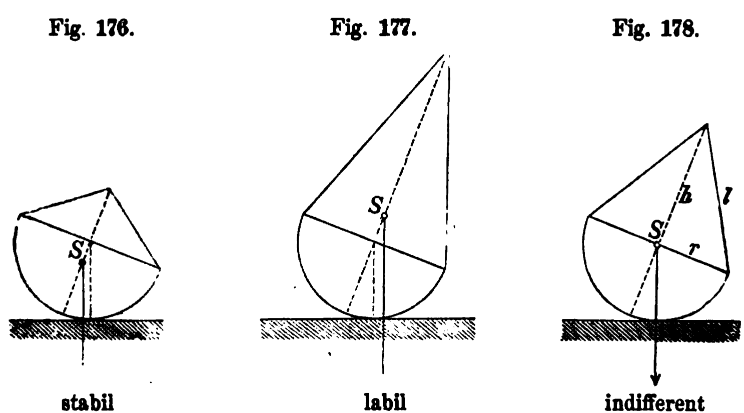


Fig. 173. stabil — Fig. 174. labil — Fig. 175. indifferent

falls eine Gleichgewichtslage ist. Dieser letztere Fall tritt ein, wenn der Schwerpunkt mit dem Befestigungspunkte zusammenfällt (Fig. 175). Stabil ist der Gleichgewichtszustand, wenn der Schwerpunkt vertical unter dem Befestigungspunkte liegt, d. h. an der tiefstmöglichen Stelle (Fig. 173); labil dagegen, wenn der Schwerpunkt vertical über dem Befestigungspunkte, also an der höchstmöglichen Stelle sich befindet (Fig. 174).

In ähnlicher Weise können auch bei einem von fester horizontaler Unterlage an einem Punkte unterstützten Körper drei verschiedene Arten des Gleichgewichtszustandes unterschieden werden, je nachdem der Körper gegen eine Störung seiner Gleichgewichtslage in der einen oder anderen Weise reagirt oder ganz indifferent sich verhält. Ein aus Halbkugel und Kegel zusammengesetzter homogener Körper wird je nach der Höhe des Kegels in stabilem, labilem oder indifferentem Gleichgewichtszustande

Fig. 176. Fig. 177. Fig. 178.



stabil labil indifferent

sich befinden, wenn derselbe aufrecht hingestellt wird auf eine horizontale Ebene. Indifferent ist der Gleichgewichtszustand eines solchen Körpers, wenn der Schwerpunkt des Ganzen mit dem Krümmungs-Mittelpunkte der Halbkugelfläche zusammenfällt, also — nach der Lehre vom Schwerpunkte — wenn das Moment des Kegel-Inhalts gleich ist dem Momente der Halbkugel in Bezug auf die gemeinschaftliche Grundkreis-Ebene beider Körper. Nach Fig. 178 erhält man für diesen Fall die Bedingungsgleichung:

$$\frac{r^2\pi h}{3}\cdot\frac{h}{4}=\frac{2}{3}r^3\pi\cdot\frac{3}{8}r, \text{ oder: } h=r\sqrt{3} \text{ und } l=\sqrt{r^2+h^2}=2r.$$

Stabil ist der Gleichgewichtszustand des aufrecht gestellten Körpers, wenn $l<2r$ (Fig. 176), labil, wenn $l>2r$ ist (Fig. 177).

Wenn es statt des Kegels ein Cylinder ist, der mit einer Halbkugel zu einem Körper zusammengesetzt ist, so erhält man auf gleiche Weise die Bedingungsgleichung:

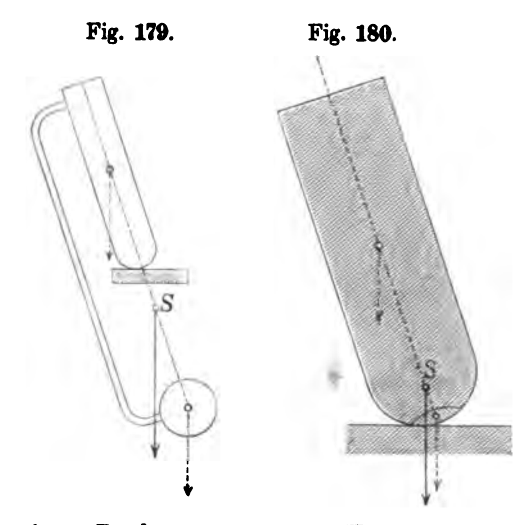
$$r^2 \pi h \cdot \frac{h}{2} = \frac{2}{3} r^3 \pi \cdot \frac{3}{8} r, \quad \text{oder:} \quad h = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Für einen Cylindermantel, der mit einer Halbkugelschale auf gleiche Art verbunden ist, erhält man die Gleichung:

$$2 r \pi h \cdot \frac{h}{2} = 2 r^2 \pi \cdot \frac{r}{2}, \quad \text{oder:} \quad h = r.$$

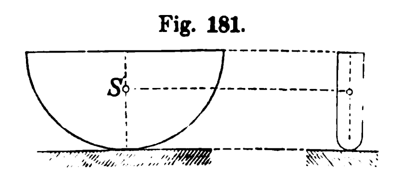
Der labile Gleichgewichtszustand eines Körpers kann in einen stabilen Gleichgewichtszustand verwandelt werden dadurch, dass man an geeigneter Stelle — ausserhalb oder innerhalb des Körpers — fremde Massen mit demselben verbindet, welche den Schwerpunkt des Ganzen so weit nach unten verschieben, dass nunmehr die Bedingungen des stabilen Gleichgewichtes erfüllt sind (s. Fig. 179 und Fig. 180).

Fig. 179. Fig. 180.



Im Allgemeinen ist bei solchen von horizontaler Unterlage in einem Punkte unterstützten Körpern — streng genommen — auch die Lage der Drehungsebene zu berücksichtigen, in Bezug auf welche die Art des Gleichgewichtszustandes festgestellt werden soll; denn es kann vorkommen, dass der Gleichgewichtszustand eines und desselben Körpers in Bezug auf die eine Drehungsebene labil ist, in Bezug auf eine andere dagegen stabil. So z. B. ist der Gleichgewichtszustand der in Fig. 181 dargestellten halbkreisförmigen (am Rande abgerundeten) dünnen Scheibe in Bezug auf eine Drehung in der eigenen Ebene derselben **stabil**, in Bezug auf ein Umkippen seitwärts hinüber

Fig. 181.



dagegen labil. Wenn also der Körper nicht eine nach allen Seiten hin vollkommen symmetrische Form hat in Bezug auf die Verticale des Schwerpunktes, so ist es allemal erforderlich, die Lage der betreffenden Drehungsebene zu bezeichnen, sobald von Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage oder von der Stabilität der letzteren die Rede ist.

Andererseits können — sobald es sich nur um eine bestimmte Drehungsebene handelt — die vorigen Untersuchungen auch auf solche Körper übertragen werden, welche von der horizontalen Unterlage längs einer graden Linie — anstatt nur in einem Punkte — unterstützt sind, z. B. auf Körper mit cylindrisch — statt kugelförmig — abgerundetem Fusse. Dasselbe gilt von Körpern, die an einem festen Punkte aufgehängt sind. Die Gesetze der Stabilität können auch auf solche Körper angewendet werden, welche an einer horizontalen Drehachse — anstatt nur in einem Punkte — befestigt sind, und darf daher in den betreffenden Figuren der Punkt O auch als Projection einer rechtwinkelig zur Bildfläche stehenden festen Drehachse gedeutet werden, sobald die Untersuchungen auf solche Verschiebungen sich beschränken, bei welchen die Punkte des Körpers parallel zur Bildfläche sich bewegen.

Fig. 182.

Ein beweglicher horizontaler Cylinder, welcher von einem festen horizontalen Cylinder unterstützt ist, dessen Achse rechtwinkelig zu der des ersten gerichtet ist, befindet sich im indifferenten Gleichgewichtszustande, wenn nach Ausfüh-

rung der in Fig. 182 angedeuteten (unendlich klein zu denkenden) Lagenveränderung, bei welcher die Berührungsstelle den Weg $\widehat{A_1 A} = A_1 B = R\varphi$ zurücklegt, der Schwerpunkt an eine Stelle S_1 gelangen würde, welche in der Verticalen des neuen Unterstützungspunktes A liegt. Die Bedingung des indifferenten Gleichgewichtes kann daher nach Fig. 182 ausgedrückt werden durch die Gleichung:

$$r \operatorname{tg} \varphi = R\varphi, \quad \text{oder:} \quad \frac{r}{R} = \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi},$$

wenn darin der Winkel φ gleich Null gesetzt wird. Da das Verhältniss der Winkelzahl zur Tangentenzahl dem Grenzwerthe „Eins" sich nähert, wenn die Winkelgrösse dem Grenzwerthe „Null" sich nähert, so entspricht der Fall des indifferenten Gleichgewichtes der Bedingungsgleichung:

$$\frac{r}{R} = 1.$$

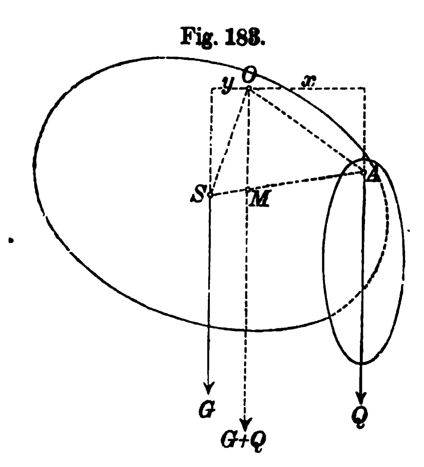
Der Gleichgewichtszustand ist labil, wenn $r > R$ und stabil, wenn $r < R$ ist.

§ 52.

Anwendungen auf Gewichtsmessungen.

Der Gegendruck des Aufhängepunktes eines im Gleichgewicht hängenden Körpers ist immer gleich dem Gewichte des letzteren, und eben so gross ist auch — nach dem Gesetze der Wechselwirkung — der in entgegengesetzter Richtung wirkende Druck, welchen seinerseits der Aufhängepunkt erleidet. Dieser Druck ist stets gerade so gross, wie wenn der Aufhängepunkt selbst den Angriffspunkt für das Gewicht des Körpers bildete.

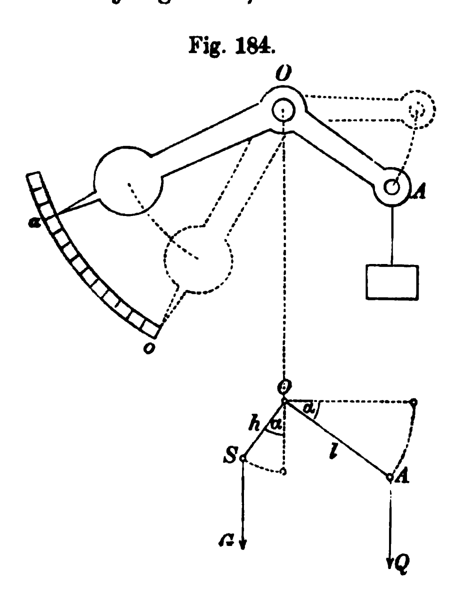
Fig. 183.



Wenn also an einem in dem Punkte O aufgehängten Körper irgend ein anderer Punkt A als Aufhängepunkt für einen zweiten Körper gewählt wird, so ist die Wirkung des letzteren bei jeder Stellung des ersteren genau dieselbe, wie wenn seine Masse in dem Punkte A concentrirt wäre

(Fig. 183). Die neue Gleichgewichtslage des ersten Körpers wird also diejenige sein, bei welcher der Schwerpunkt M der beiden resp. in den Punkten S und A concentrirt gedachten Massen der Körper in der Verticalen des Punktes O liegt. Bei dieser Stellung geht die Richtungslinie der Mittelkraft von den beiden Gewichten G und Q durch den Punkt O hindurch, ist also das statische Moment dieser Mittelkraft in Bezug auf den Punkt O gleich Null, folglich auch die algebraische Summe der statischen Momente der beiden Seitenkräfte:

Fig. 184.



$$Qx - Gy = 0.$$

Diese Gleichung kann zum Auffinden der neuen Gleichgewichtslage benutzt werden, wenn das Gewicht Q bekannt ist; umgekehrt aber auch zur Bestimmung des Gewichtes Q, wenn die neue Gleichgewichtslage durch directe Beobachtung bekannt ist.

So nimmt z. B. für den in Fig. 184 dargestellten Fall — bei welchem der Punkt A vor dem Anhängen des Gewichtes Q in gleicher Höhe mit dem Punkte O befindlich angenommen ist — obige Gleichung die Form an:

$$Ql \cos \alpha - Gh \sin \alpha = 0$$

oder für Q aufgelöst:

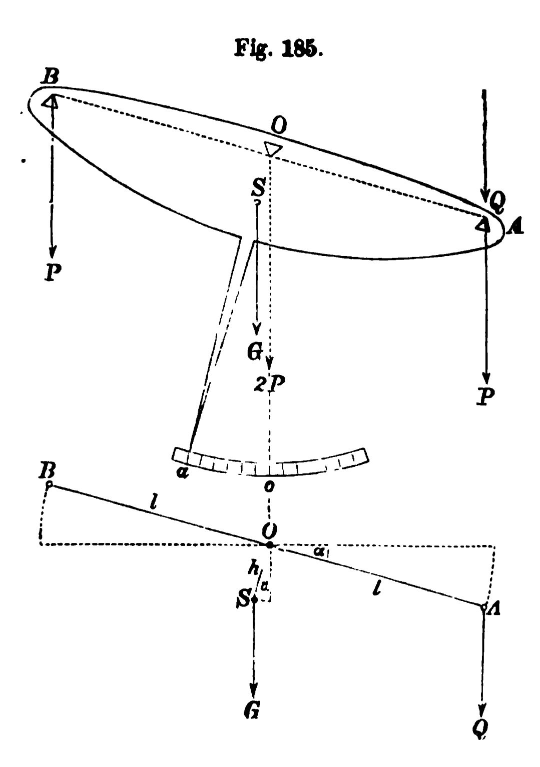
$$165) \quad Q = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} \alpha,$$

und zeigt, wie das Gewicht Q aus dem beobachteten Ausschlagwinkel α sich berechnen lässt, wie auf diese Weise jeder an festem Punkte oder fester horizontaler Drehachse aufgehängte Körper zu Gewichtsmessungen benutzt werden kann, wie also die Operation des Wägens auf die des Winkelmessens sich zurückführen lässt.

Auf ähnliche Weise kann mittelst des in Fig. 185 dargestellten Wagebalkens die Differenz zweier Gewichte aus der Grösse des Ausschlagwinkels bestimmt werden. Wenn die beiden Aufhänge-

punkte A, B in gleichen Abständen von dem Drehpunkte O und in einer geraden Linie mit demselben liegen, so können zwei gleich grosse an diesen beiden Punkten aufgehängte Gewichte P keinen Einfluss auf die Gleichgewichtsstellung des Balkens haben, insofern alsdann bei jeder Stellung desselben die Mittelkraft $2P$ dieser beiden Gewichte durch den Drehpunkt des Balkens hindurchgeht. Das einseitige Anhängen eines Gewichtes Q an dem Punkte A bringt dagegen einen Ausschlagwinkel α hervor, welcher genau auf dieselbe Weise wie bei dem vorigen Falle berechnet werden kann, auch dann noch, wenn gleichzeitig die beiden Gewichte P angehängt sind. Wenn also mit Q der Ueberschuss des an der einen Seite hängenden Gewichtes bezeichnet wird, und mit G das Gewicht des unbelasteten Wagebalkens, so ergiebt sich zur Bestimmung von Q wiederum die Gleichung 165):

Fig. 185.



$$Q = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} \alpha.$$

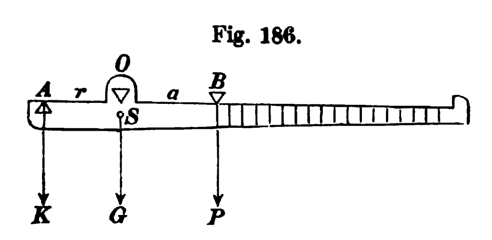
Läge dagegen der Drehpunkt des Wagebalkens oberhalb der Verbindungslinie AB, so würde ein und dasselbe Uebergewicht Q einen um so kleineren Ausschlagwinkel hervorbringen, je grösser die Belastungen der beiden Aufhängepunkte wären.

Die horizontale Gleichgewichtslage des in Fig. 186 dargestellten Wagebalkens wird durch das Anhängen von zwei beliebigen (ungleichen) Gewichten K und P nicht gestört, wenn die Aufhängepunkte A, B derselben so gewählt sind, dass die Mittelkraft

dieser beiden Gewichte durch den Drehpunkt O hindurchgeht, d. h. sobald die Bedingungsgleichung erfüllt ist:

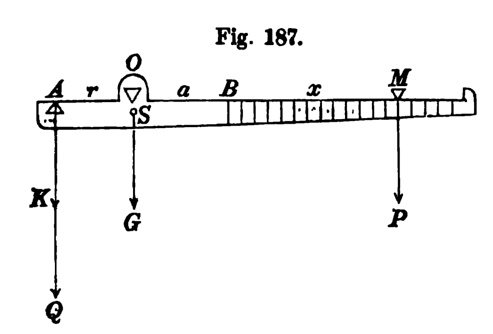
$$Pa - Kr = 0.$$

Fig. 186.



Wenn an der einen Seite zu dem Gewichte K (der zur Aufnahme der Last bestimmten Schale) noch das Gewicht Q hinzugelegt wird (Fig. 187), so kann das Gleichgewicht wieder hergestellt werden dadurch, dass auf der anderen Seite der Hebelarm des Gewichtes P um eine entsprechende Grösse x vergrössert wird, und man erhält als nunmehrige Gleichgewichtsbedingung die Gleichung:

Fig. 187.



$$P(a+x) - (K+Q)r = 0.$$

Durch Subtraction der vorhergehenden Gleichung von dieser letzteren erhält man:

$$Px - Qr = 0, \text{ oder:}$$

$$Q = \frac{Px}{r}.$$

Diese Gleichung zeigt, wie das unbekannte Gewicht Q aus der gemessenen Länge x berechnet werden kann, wie also eine Gewichtsmessung auch auf eine Längenmessung sich zurückführen lässt.

Ob der Gleichgewichtszustand dieses Wagebalkens ein stabiler oder labiler ist: das hängt bei der hier dargestellten Anordnung — wenn die drei Punkte A, O, M in einer geraden Linie liegen — allein von der Höhenlage seines eigenen Schwerpunktes ab.

§ 53.

Gleichgewicht eines an zwei Stellen unterstützten Körpers.

Wenn ausser dem Punkte A noch irgend ein zweiter ebenfalls in der Verticalen des Schwerpunktes liegender Punkt B des Körpers ein fester Punkt ist, so findet hinsichtlich der Vertheilung des Druckes auf die beiden Befestigungspunkte eine Unbestimmtheit statt, welche nur dann verschwindet, wenn zugleich die Art

der Befestigung genau bekannt ist. Denn die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen schreiben für diesen Fall nur vor: dass die algebraische Summe der beiden aufwärts wirkenden Gegendrücke gleich dem abwärts wirkenden Gewichte des Körpers sein muss, lassen also die Art der Druck-Vertheilung unentschieden. Durch die verschiedene Art der Aufhängung kann man erreichen, dass entweder (wie in Fig. 188) der Punkt A für sich allein, oder (wie in Fig. 189) der Punkt B für sich allein das ganze Gewicht des Körpers trägt, oder endlich, dass nach irgend einem beliebigen Verhältniss der Druck auf beide Punkte sich vertheilt.

Fig. 188.

Fig. 189.

Wenn z. B. an dem anfänglich nur in dem Punkte A befestigten Körper mittelst eines Fadens noch ein Gewicht Q unten angehängt wird, so leistet der Punkt A einen Gegendruck gleich der Summe der beiden Gewichte G und Q (Fig. 190). Dieser Gegendruck ändert sich nicht, wenn hiernach der Punkt B festgelegt wird, ebensowenig, wenn nachher der Faden, an welchem das Gewicht Q hing, abgeschnitten wird (Fig. 191).

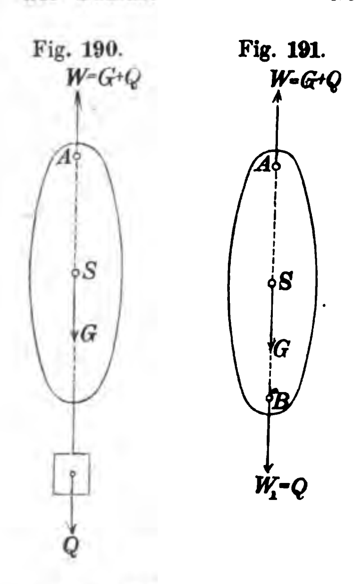


Fig. 190.

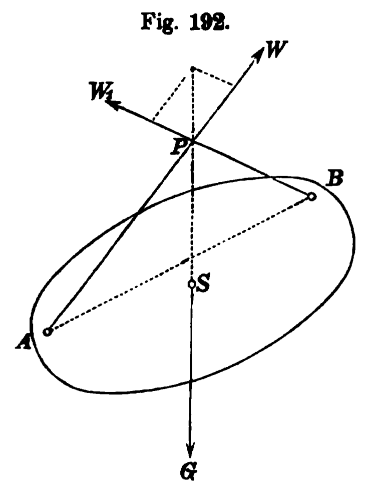
Fig. 191.

Durch die hier beschriebene Art der Befestigung wird also erreicht, dass der Punkt A einen aufwärts gerichteten Gegendruck $W = G + Q$, und der Punkt B den abwärts gerichteten Gegendruck $W_1 = Q$ leistet.

Eine ähnliche Unbestimmtheit hinsichtlich der Druck-Vertheilung findet auch dann statt, wenn zwei beliebige andere ausserhalb der Verticallinie des Schwerpunktes (aber in einer Verticalebene mit demselben) liegende Punkte die Befestigungspunkte bilden (Fig. 192). Damit die beiden Gegendrücke W und W_1 dem Gewichte G das Gleichgewicht halten, dazu ist nur erforderlich, dass ihre Mittelkraft mit dem Gewichte G gleiche

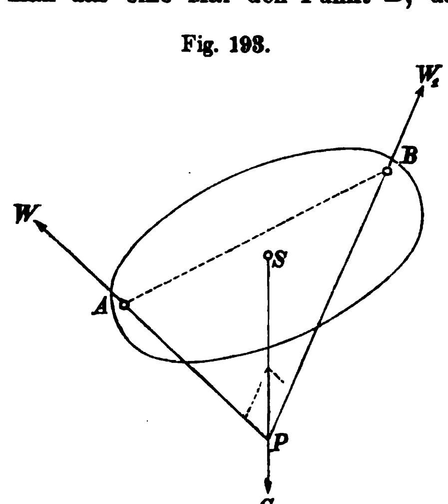
Grösse und entgegengesetzte Richtung habe, und dass ihr Durchschnittspunkt P in die Richtungslinie der Kraft G falle. Diese Bedingung aber kann, wie Fig. 192 und Fig. 193 als Beispiele zeigen, auf unendlich viele verschiedene Arten erfüllt werden.

Fig. 192.



Diese Unbestimmtheit betrifft jedoch nur die (bei rechtwinkeliger Zerlegung) in die Richtung AB fallenden Seitenkräfte X, X_1 der Gegendrücke, während die rechtwinkelig zu AB gerichteten Seitenkräfte Y, Y_1 stets bestimmte Werthe haben und unabhängig von der Befestigungsweise berechnet werden können (Fig. 194). Denn nach den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen muss in Bezug auf jede beliebige Achse (in diesem speciellen Falle auch in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der verticalen Kräfte-Ebene) die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte gleich Null sein. Wählt man das eine Mal den Punkt B, das andere Mal den Punkt A als Drehpunkt, so erhält man nach Fig. 194 die Gleichungen:

Fig. 193.



$0 = Yl - Gb$, oder:

$$Y = G\frac{b}{l},$$

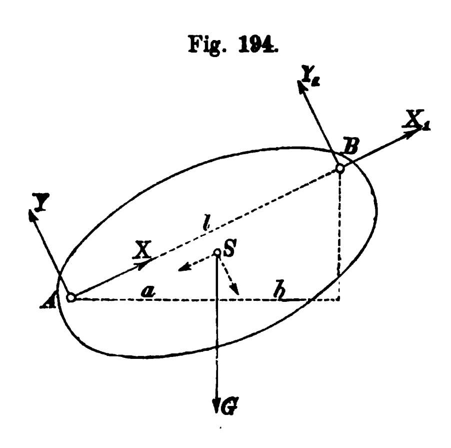
$0 = Ga - Y_1 l$, oder:

$$Y_1 = G\frac{a}{l}.$$

Zur Bestimmung der Seitenkräfte X, X_1 dagegen liefern die Gleichgewichts-Bedingungen nur eine einzige Gleichung. In Bezug auf jede beliebige Richtung, also z. B. auch in Bezug auf die Richtung AB, muss die algebraische Summe sämmtlicher Seitenkräfte gleich Null sein; folglich ist die Summe

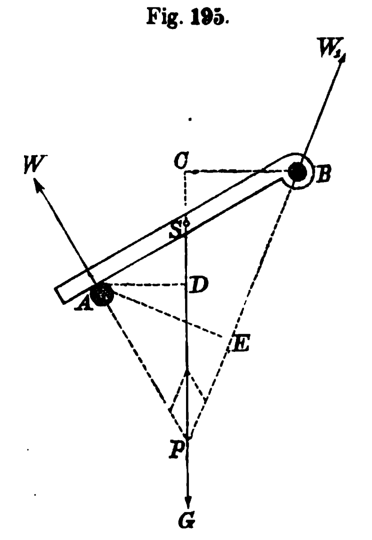
$X + X_1$ der parallel zu BA gerichteten Seitenkraft des Gewichtes G gleich zu setzen und hat unter allen Umständen einen bestimmten Werth. Das **Verhältniss** dieser beiden Kräfte aber hängt von der Art der Befestigung ab.

Fig. 194.



Die Unbestimmtheit verschwindet, sobald bei einem der beiden Stützpunkte an der Art der Unterstützung zu erkennen ist, in welcher Richtung der Gegendruck desselben thätig ist. Denn in diesem Falle ist die Lage des Durchschnittspunktes P der drei Kräfte, und damit zugleich die Richtung des von dem anderen Stützpunkte ausgeübten Gegendruckes festgelegt. Durch die Seitenlängen des bei dem Punkte P zu construirenden Kräfte-Parallelogramms, dessen Diagonale der gegebenen Kraft G gleich und entgegengesetzt zu nehmen ist, sind die beiden Gegendrücke alsdann auch ihrer Grösse nach bestimmt.

Fig. 195.



So z. B. ergeben sich für den in Fig. 195 dargestellten Fall, bei welchem die Unterstützung an der Stelle A so beschaffen ist, dass daselbst nur rechtwinkelig zur Richtung AB ein Druck auf den Körper übertragen werden kann, zur Bestimmung der Gegendrücke die Gleichungen:

$$0 = W \,.\, \overline{AB} - G \,.\, \overline{BC},$$

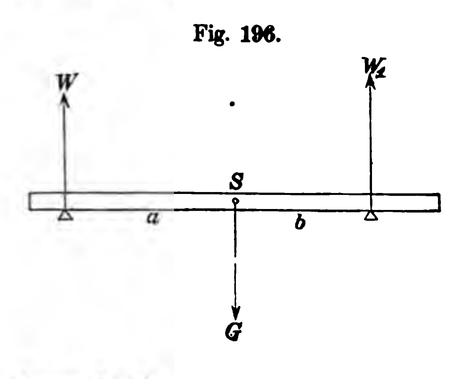
$$\text{oder: } W = G \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}},$$

$$0 = G \,.\, \overline{AD} - W_1 \,.\, \overline{AE}, \quad \text{oder: } W_1 = G \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}.$$

(Nach der in Fig. 194 gewählten Bezeichnungsweise würde hier die Seitenkraft X gleich Null und die Seitenkraft X_1 für sich

allein gleich der parallel zu BA gerichteten Seitenkraft des Gewichtes G zu setzen sein.)

Fig. 196.

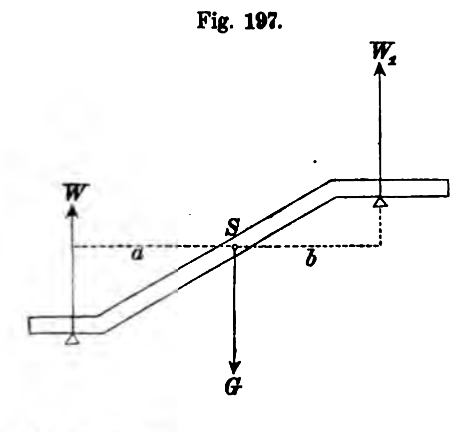


Wenn an jeder von beiden Unterstützungsstellen die Berührungsebene zwischen dem Körper und seinen Stützen eine Horizontalebene ist, so können nur verticale Gegendrücke von den Stützen auf den Körper übertragen werden. Man erhält also z. B. für die in Fig. **196** und Fig. **197** dargestellten Fälle zur Bestimmung der Gegendrücke die Gleichungen:

$$0 = W(a + b) - Gb, \qquad W = G\frac{b}{a + b},$$

$$0 = Ga - W_1(a + b), \qquad W_1 = G\frac{a}{a + b}.$$

Fig. 197.



Die gleiche Methode kann auch in dem Falle noch zur Bestimmung der Gegendrücke benutzt werden, wenn der auf solche Art an zwei Punkten unterstützte Körper ausserdem noch mit anderen Gewichten belastet ist. So erhält man z. B. für den in Fig. **198** dargestellten Fall, indem man das eine Mal in Bezug auf den Stützpunkt B, das andere Mal in Bezug auf den Stützpunkt A die Gleichung der statischen Momente aufstellt, zwei Gleichungen:

$$0 = W.\overline{AB} - P.\overline{CB} - G.\overline{DB} - Q.\overline{EB},$$

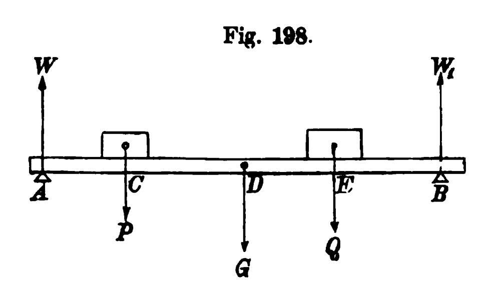
$$0 = P.\overline{AC} + G.\overline{AD} + Q.\overline{AE} - W_1.\overline{AB},$$

deren jede zur Bestimmung des darin vorkommenden Gegendrucks für sich allein schon ausreicht. Wenn man den resp. für W und W_1 aufgelösten Gleichungen die Formen giebt:

$$166) \quad W = P \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} + G \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} + Q \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}},$$

$$167) \quad W_1 = P \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} + G \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} + Q \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}},$$

Fig. 198.



so erkennt man zugleich, in welcher Weise die einzelnen Gewichte P, G, Q an dem Hervorbringen der Gegendrücke sich betheiligen. Es zeigt sich, dass der zu einem der Gegendrücke von jedem einzelnen Gewichte gelieferte Beitrag genau auf dieselbe Weise bestimmt werden kann, wie wenn das betreffende Gewicht die einzige Belastung bildete.

§ 54.

Gleichgewicht eines an drei Punkten unterstützten Körpers.

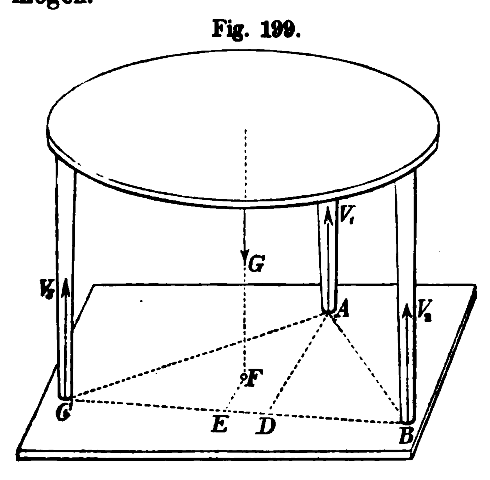
Um die Gegendrücke der drei Stützpunkte zu bestimmen, ist es erforderlich, eine bestimmte Art der Unterstützung vorauszusetzen; andernfalls würde die in der Aufgabe liegende Unbestimmtheit hier in noch höherem Maasse als beim vorigen Falle hervortreten.

Sobald an der Art der Unterstützung zu erkennen ist, welche Richtung der Gegendruck des einen der drei Stützpunkte hat, kann auch die Grösse dieses Gegendrucks allemal bestimmt werden. Denn wenn man die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher vier Kräfte gleich Null setzt und dabei als Drehachse die Verbindungslinie der beiden anderen Stützpunkte wählt, so erhält man eine Gleichung, in welcher der gesuchte Gegendruck als einzige unbekannte Grösse vorkommt, weil die Richtungslinien der beiden anderen Gegendrücke durch die Drehachse selbst hindurch gehen, ihre statischen Momente also Null sind.

Auch die rechtwinkelig zur Ebene der drei Stützpunkte gerichtete Seitenkraft eines Gegendrucks hat unter allen Umständen einen bestimmten Werth, welcher mittelst derselben Methode gefunden werden kann, da die andere (in die Ebene selbst hineinfallende) Seitenkraft in Bezug auf jede in der Ebene liegende

Achse das statische Moment Null hat, folglich in der Gleichung der statischen Momente nicht vorkommen kann. Wenn also die drei Stützpunkte in einer horizontalen Ebene liegen, so haben die verticalen Seitenkräfte der Gegendrücke stets bestimmte Werthe — wie auch immer die horizontalen Seitenkräfte beschaffen sein mögen.

Fig. 199.



Die horizontalen Seitenkräfte sind Null, und die Gegendrücke vertical aufwärts gerichtet, wenn die Unterstützung des Körpers in einer vollkommen glatten horizontalen Unterlage besteht (Fig. 199). Um den vom Stützpunkte A geleisteten Gegendruck V_1 zu bestimmen, stellt man die Gleichung der statischen Momente auf und wählt die Verbindungslinie BC als Drehachse, man erhält dann die Gleichung:

$$168)\quad 0 = G\,.\,\overline{FE} - V_1\,\overline{AD}, \quad \text{oder:}\quad V_1 = G\cdot\frac{\overline{FE}}{\overline{AD}}.$$

Auf gleiche Weise kann jeder der beiden anderen Gegendrücke einzeln bestimmt werden; V_2, indem man AC, und V_3, indem man AB als Drehachse wählt.

Denkt man sich die drei Punkte A, B, C durch gespannte Fäden unter einander verbunden und an jedem Stützpunkte alsdann die horizontalen Zugkräfte mit dem verticalen Gegendruck zu einer Mittelkraft vereinigt, so gelangt man leicht zur Vorstellung von einer Befestigungsweise, bei welcher die Gegendrücke von der verticalen Richtung abweichen, und erkennt zugleich, dass ihre verticalen Seitenkräfte stets dieselben Werthe behalten müssen, dass z. B. die Gleichung 168) auch dann noch gültig bleiben würde für die verticale Seitenkraft des in dem Punkte A wirkenden Gegendrucks.

Wenn der Hebelarm FE gleich Null wäre, d. h. wenn der Fusspunkt der Schwerpunkts-Verticalen in die Seite BC des Dreiecks ABC hineinfiele, so würde nach Gleichung 168) auch V_1 gleich Null sein, und wenn FE negativ wäre, d. h. wenn der Fusspunkt ganz ausserhalb des Dreiecks läge, so würde V_1 negativ werden. Im letzteren Falle würde es in dem Punkte A

eines abwärts wirkenden Gegendrucks bedürfen, um den Körper im Gleichgewichtszustande zu erhalten, und wenn ein solcher fehlte, so würde der Körper umfallen.

Bedingung des Gleichgewichts bei der in Fig. 199 dargestellten Art der Unterstützung ist also: dass der Fusspunkt der Schwerpunkts-Verticalen nicht ausserhalb des aus den Stützpunkten gebildeten Dreiecks liegt. Fällt derselbe in den Umfang des Dreiecks, so ist das Gleichgewicht ein labiles; das geringste Uebergewicht an dieser Seite wird alsdann hinreichen, den Körper ganz umzuwerfen. Wenn dagegen der Fusspunkt im Inneren des Dreiecks liegt, so würde es, um den Körper umzukippen, d. h. um eine der Dreieck-Seiten zu drehen, einer Kraft bedürfen, deren statisches Moment in Bezug auf diese Drehachse im Beginn der Drehung mindestens eben so gross sein müsste als das statische Moment des Gewichtes G in Bezug auf diese Achse. Im letzteren Falle war also der Gleichgewichtszustand des Körpers ein stabiler, und als Maass für diese Stabilität kann das statische Moment des Gewichtes gelten in Bezug auf diejenige Dreieck-Seite, welche beim Umkippen die Drehachse bilden würde. Dieses Moment wird deshalb das Stabilitätsmoment des Körpers in Bezug auf die betreffende Seite genannt. Bei dem in Fig. 199 dargestellten Falle würde z. B., wenn ein Umkippen des Körpers nach der Seite BC hinüber in Frage käme, das Product $G \,.\, \overline{FE}$ als das Stabilitätsmoment des Körpers zu betrachten sein.

§ 55.

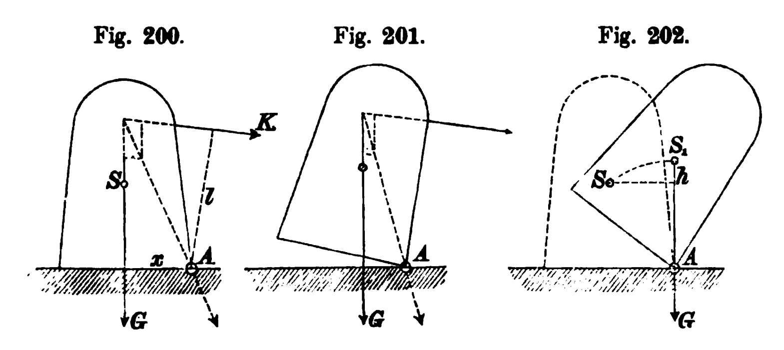
Stabilitätsmoment und dynamische Stabilität eines auf horizontale Grundfläche gestellten Körpers.

Bei einem an mehr als drei Stellen von horizontaler Unterlage unterstützten Körper ist die Vertheilung des Drucks auf die Stützpunkte wiederum eine unbestimmte, und es ist daher nur die Frage der Stabilität, welche hier in Betracht kommt.

Jede durch einen Stützpunkt gelegte gerade Linie, welche die horizontale Unterstützungsebene in zwei Theile zerlegt, deren einer keine Stützpunkte enthält, kann beim Umkippen des Körpers möglicher Weise eine Drehachse bilden und soll hier abkürzungsweise eine Drehkante genannt werden. Liegt der Fusspunkt der Schwerpunkts-Verticalen innerhalb des von sämmtlichen Drehkanten eingehüllten Theiles der Grundebene, so ist die Stabilität

des Körpers gesichert, und zwar um so mehr, je grösser der kleinste Abstand jenes Punktes von den Drehkanten ist. Das statische Moment des Gewichtes in Bezug auf eine Drehkante wird das **Stabilitätsmoment** des Körpers in Bezug auf diese Kante genannt. Ein Körper, welcher, unten von ebener Grundfläche begrenzt, in allen Punkten derselben die horizontale Stützebene berührt, ist anzusehen als ein Körper mit unendlich vielen Stützpunkten, für den somit die gleichen Bestimmungen gelten.

Wenn der in Fig. 200 dargestellte Körper um die (festgehaltene) Drehkante A gedreht werden soll von einer Kraft K, welche in der Drehungsebene des Schwerpunktes am Hebelarm l wirkt, so muss das statische Moment Kl mindestens so gross wie das Stabilitätsmoment Gx sein, in welchem Falle die Mittelkraft von G und K durch die Drehkante selbst hindurchgeht, der kleinste



Kraftüberschuss also schon ausreicht, um Bewegung hervorzubringen. Nach dem Beginn der Drehbewegung wird das statische Moment des Gewichtes G allmälig kleiner, es wird Null in dem Augenblicke, wo der Schwerpunkt vertical über der Drehkante die höchste Stelle S_1 seiner Bahn erreicht (Fig. 202). Ohne dass die begonnene Bewegung ins Stocken geriethe, kann also das statische Moment der umkippenden Kraft nachher allmählich kleiner werden, und zwar in solcher Weise, dass dasselbe stets noch dem statischen Momente von G gleich bleibt. Wenn dies der Fall ist, so wird auch während der Bewegung stets die Mittelkraft beider Kräfte durch den Drehpunkt hindurchgehen (Fig. 201), also während jedes einzelnen Zeittheils die mechanische Arbeit Null verrichten. Hieraus folgt, dass auch die von den beiden Kräften zusammen im Ganzen verrichtete Arbeit alsdann den Werth Null hat. Nach Fig. 202 ist $-Gh$ die vom Gewichte G allein ver-

richtete Arbeit; für die von der umkippenden Kraft verrichtete mechanische Arbeit $\mathfrak{A}$ ergiebt sich also die Gleichung:

$$169)\quad 0 = \mathfrak{A} - Gh, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A} = Gh.$$

Sobald der Körper die Stellung Fig. 202 erreicht hat, bedarf es keiner weiteren mechanischen Arbeit mehr, um denselben vollends umzustürzen, insofern das eigene Gewicht alsdann zur weiteren Förderung der Bewegung schon ausreicht.

Die zum Umkippen eines Körpers erforderliche mechanische Arbeit wird die dynamische Stabilität des Körpers genannt. Nach Gleichung 169) ist die dynamische Stabilität gleich dem Producte aus dem Gewichte G des Körpers in diejenige Höhe h, um welche der Schwerpunkt ansteigt, während der Körper in die nächste labile Gleichgewichtslage übergeführt wird.

Wenn von dem Stabilitätsmomente und der dynamischen Stabilität eines Körpers schlechtweg die Rede ist (ohne dass die Drehkante dabei bezeichnet wird), so sind damit in der Regel die kleinsten von allen Werthen gemeint, welche diese Grössen in Bezug auf die verschiedenen Drehkanten annehmen können.

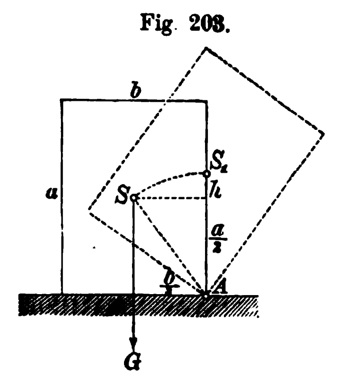
Wenn mit a, b, c resp. Höhe, Breite, Länge eines Parallelepipedons bezeichnet werden, und jeder Cubikmeter desselben γ Kilogramm wiegt, so ist das Gewicht desselben in Kilogrammen:

$$G = \gamma abc,$$

und das Stabilitätsmoment in Bezug auf die Drehkante A (Fig. 203) ist:

$$M = \gamma abc \cdot \frac{b}{2}.$$

Fig. 203.



Die Höhe, um welche beim Umkippen der Schwerpunkt ansteigen muss, beträgt:

$$h = AS_1 - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2},$$

folglich ist die dynamische Stabilität in Bezug auf Drehkante A:

$$\mathfrak{A} = \gamma abc\left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right].$$

Bestände der Körper z. B. aus Granit, von welchem jeder Cubikmeter 2750 Kil. wiegt, und wäre $a = 0^m,8$, $b = 0^m,6$, $c = 2^m$, so ergäbe sich:

$$\mathfrak{A} = 2750 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 2\left[\sqrt{0{,}4^2 + 0{,}3^2} - 0{,}4\right] = 264 \text{ Meterkilogramm.}$$

Da hier als Längeneinheit der Meter und als Krafteinheit das Gewicht eines Kilogramms gewählt wurde, so ist als Einheit für die Zahl $\mathfrak{A}$ das Meterkilogramm anzusehen, oder diejenige mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um 1 Kil. Gewicht 1 Meter hoch zu heben. Zum Umkippen dieses

Granitblocks würde also eben so viel mechanische Arbeit erforderlich sein, als zum Heben von 1 Kil. Gewicht auf 264^m Höhe oder von 264 Kil. Gewicht auf 1^m Höhe.

ZWÖLFTES CAPITEL.

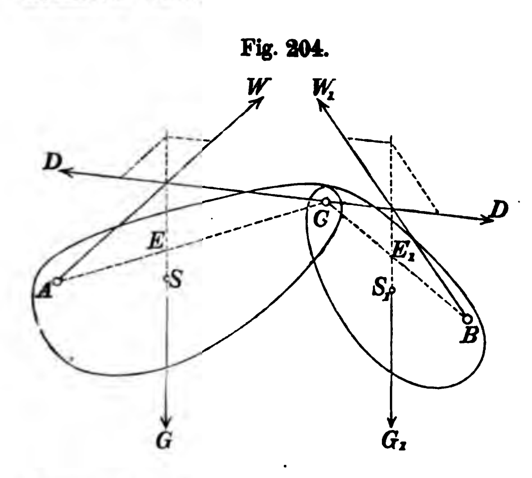
Gleichgewicht einer an zwei Stellen unterstützten Verbindung von mehreren einander gegenseitig stützenden festen Körpern.

§ 56.

Bestimmung der von zwei einander gegenseitig stützenden Körpern hervorgerufenen Gegendrücke.

Die Bestimmung der Gegendrücke, welche ein an zwei Stellen unterstützter Körper in seinen Stützpunkten hervorruft, ist — wie in § 53 gezeigt — eine unbestimmte Aufgabe, so lange nicht wenigstens bei einem von beiden Punkten die Art der Unterstützung bekannt ist. Letztere Bedingung ist erfüllt, die Aufgabe demnach immer lösbar: wenn an einem von den beiden Stützpunkten des Körpers die Stütze durch einen zweiten Körper gebildet wird, welcher seinerseits auf dieselbe Art wie der erste unterstützt ist — auf die Art nämlich: dass an jener Stelle die beiden Körper einander gegenseitig als Stützen dienen (Fig. 204). Denn in diesem Falle ist es ein und derselbe Druck D, welcher den einen Körper an einer Drehung um seinen Stützpunkt A verhindert, und welcher zugleich als Gegendruck (in entgegengesetzter Richtung genommen) den anderen Körper in Bezug auf eine Drehung um seinen Stützpunkt B im Gleichgewicht hält. Es ergeben sich hieraus für den Druck D zwei von einander unabhängige

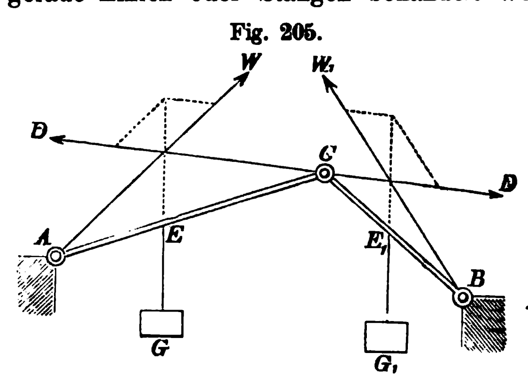
Fig. 204.



Bedingungs-Gleichungen, welche ausreichen, um sowohl die Grösse als auch die Richtung derselben zu bestimmen. Sobald aber der Druck D bekannt ist, können alsdann mittelst des im § 53 erklärten und in Fig. 204 angedeuteten Constructions-Verfahrens, indem man dasselbe auf jeden der beiden Körper einzeln genommen anwendet, auch die von den anderen beiden Stützpunkten A und B geleisteten Gegendrücke W und W_1 bestimmt werden.

Die Gleichgewichts-Bedingungen erfordern, dass sowohl in Bezug auf den einen als auch in Bezug auf den anderen Körper die Richtungslinie des Drucks D in der verticalen Kräfte-Ebene liege. Hieraus folgt, dass die Schwerpunkte S, S_1 und die drei Stützpunkte A, B, C sämmtlich in einer und derselben Vertical-Ebene liegen müssen, wenn das Ganze im Gleichgewicht sich befinden soll. Die Richtungslinie des Gewichtes G schneidet daher die Verbindungslinie AC, und der Durchschnittspunkt E darf als Angriffspunkt dieses Gewichtes angenommen werden; denn die Wirkung einer Kraft ändert sich nicht, wenn der Angriffspunkt in der Richtungslinie derselben verschoben wird. Aus gleichem Grunde darf der Punkt E_1 als Angriffspunkt des Gewichtes G_1 gelten. Da die Formen der Körper nur soweit in Betracht kommen, als die Lage der Schwerpunkte durch sie bedingt wird, so können dieselben nunmehr ganz unberücksichtigt gelassen werden, und dürfen deshalb die Körper wie starre gerade Linien oder Stangen behandelt werden, welche in den Punkten E, E_1 resp. durch die Gewichte G, G_1 belastet, an den Stellen A, B durch feste Punkte unterstützt sind und in dem Punkte C an einander gegenseitig sich anlehnen.

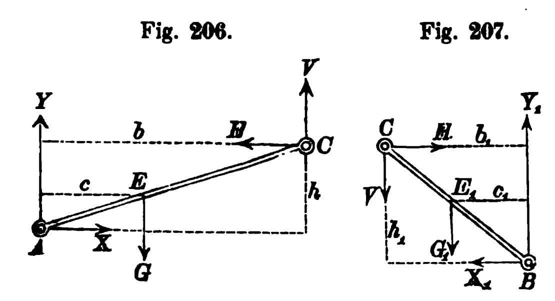
Fig. 205.



Da ferner nur die Gleichgewichts-Bedingungen in Bezug auf Verschiebungen in der verticalen Bild-Ebene hier in Betracht kommen, so können statt der drei stützenden Punkte auch horizontale (parallele) Drehachsen substituirt werden, und die

vorliegende Aufgabe gewinnt nunmehr die einfachere in Fig. 205 veranschaulichte Form. Die beiden Stangen AC und BC sind bei C durch einen Gelenkbolzen derartig verbunden, dass jede Stange in der verticalen Bild-Ebene sich drehen lässt, während die andere unbeweglich bleibt. Am anderen Endpunkte ist jede Stange durch einen festliegenden Gelenkbolzen von gleicher Achsenrichtung unterstützt.

Um den Druck D seiner Grösse und Richtung nach zu bestimmen, genügt es, die horizontale und verticale Seitenkraft desselben — jede ihrer Grösse nach — zu bestimmen. Man findet diese beiden Seitenkräfte H und V, indem man für jede der beiden Stangen einzeln genommen die Gleichung der statischen Momente aufstellt und dabei jedesmal den festen Unterstützungspunkt der Stange als Drehpunkt wählt. Nach Fig. 206 und Fig. 207 erhält man alsdann die Gleichungen:



$$0 = -Vb - Hh + Gc \quad \text{und:} \quad 0 = -Vb_1 + Hh_1 - G_1c_1,$$

oder wenn man abkürzungsweise die als gegebene Grössen zu betrachtenden statischen Momente Gc und G_1c_1 resp. mit den Buchstaben $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ bezeichnet:

$$170) \quad \begin{cases} 0 = -Vb - Hh + \mathfrak{M} \\ 0 = -Vb_1 + Hh_1 - \mathfrak{M}_1 \end{cases}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich für die gesuchten Seitenkräfte die Werthe:

$$171) \quad H = \frac{\mathfrak{M}b_1 + \mathfrak{M}_1 b}{bh_1 + b_1 h}.$$

$$172) \quad V = \frac{\mathfrak{M}h_1 - \mathfrak{M}_1 h}{bh_1 + b_1 h}.$$

Die Richtung des Drucks D findet man, indem man Gleichung 172) durch Gleichung 171) dividirt; der Quotient $\frac{V}{H}$ bildet die Tangente des Neigungswinkels, welchen die Richtungslinie desselben mit der Horizontalen einschliesst. Der Druck zwischen den beiden Stangen ist also horizontal gerichtet, wenn

$\mathfrak{M} h_1 - \mathfrak{M}_1 h = 0$, oder: $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1} = \frac{h}{h_1}$ ist. Die Grösse des Drucks würde man aus der Gleichung $D = \sqrt{H^2 + V^2}$ bestimmen können.

Nachdem die Seitenkräfte des Drucks D gefunden sind, können nunmehr auch die Seitenkräfte X und Y des von dem festen Punkte A geleisteten Gegendrucks W bestimmt werden, indem man in Bezug auf Fig. 206 das eine Mal die algebraische Summe der Horizontalkräfte, das andere Mal die algebraische Summe der Verticalkräfte gleich Null setzt. Man erhält dann die Gleichungen:

173) $0 = X - H$, oder: $X = H$,

174) $0 = Y + V - G$, oder: $Y = G - V$.

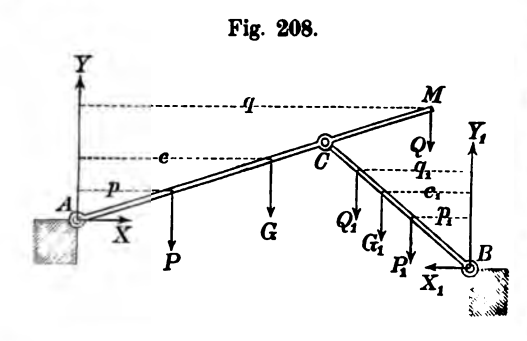
Auf gleiche Weise ergeben sich aus Fig. 207 für die Seitenkräfte des von dem Punkte B geleisteten Gegendrucks W_1 die Werthe:

$$X_1 = H \quad \text{und:} \quad Y_1 = G_1 + V.$$

Die horizontalen Seitenkräfte dieser Gegendrücke sind demnach gleich dem Horizontaldruck im Scheitelpunkte C, und die verticalen Seitenkräfte zusammengenommen so gross wie die Summe der Gewichte der beiden Stangen.

In den Gleichungen 170) bedeuteten die Buchstaben $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ die statischen Momente der Stangengewichte, bezogen auf die festen Drehpunkte der Stangen. Wenn man diesen Buchstaben anstatt dessen die Bedeutung der Momenten-Summen sämmtlicher Belastungen der betreffenden Stangen beilegt, so gelten jene Gleichungen unmittelbar auch für den in Fig. 208 dargestellten Fall, bei welchem ausser den eigenen Gewichten noch die angehängten Belastungen P, Q und P_1, Q_1 von den Stangen getragen werden. Die beiden Seitenkräfte des Scheiteldrucks D können daher auch in diesem Falle unmittelbar aus den Gleichungen 171) und 172):

Fig. 208.



$$H = \frac{\mathfrak{M} b_1 + \mathfrak{M}_1 b}{b h_1 + b_1 h}, \qquad V = \frac{\mathfrak{M} h_1 - \mathfrak{M}_1 h}{b h_1 + b_1 h}$$

bestimmt werden, sobald man darin für die Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ die aus Fig. 208 sich ergebenden Werthe substituirt:

$$\mathfrak{M} = Gc + Pp + Qq \quad \text{und:} \quad \mathfrak{M}_1 = G_1 c_1 + P_1 p_1 + Q_1 q_1.$$

Die Bestimmung der Seitenkräfte der von den festen Punkten A und B geleisteten Gegendrücke geschieht alsdann auf dieselbe Weise wie mit Bezug auf Fig. 206 mittelst der Gleichungen 173) und 174); nur mit dem Unterschiede, dass statt des eigenen Gewichts einer Stange hier die ganze Belastungs-Summe derselben zu substituiren ist. Man erhält demnach für die übrigen Seitenkräfte die Gleichungen:

$$X = H = X_1,$$

$$Y = G + P + Q - V \quad \text{und:} \quad Y_1 = G_1 + P_1 + Q_1 + V.$$

Wie in Fig. 208 beispielsweise durch das in dem Punkte M angehängte Gewicht Q angedeutet, macht es hinsichtlich des hier anzuwendenden Verfahrens durchaus keinen Unterschied, wenn einzelne Gewichte an den jenseits über den Gelenkpunkt C hinaus verlängerten Stangen angehängt sind.

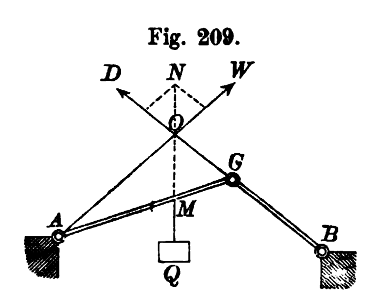
§ 57.

Einfluss der Belastung eines einzelnen Punktes einer Verbindung von zwei gewichtlosen Stangen.

Jede der beiden Seitenkräfte irgend eines von den drei Gegendrücken kann aufgefasst werden als Summe der einzelnen Beiträge, welche die verschiedenen Belastungen einzeln genommen dazu liefern. Setzt man in den auf Fig. 205 bezüglichen Gleichungen das eine Mal $G_1 = 0$, das andere Mal $G = 0$, so erfährt man, welche Druckkraft von jedem dieser beiden Gewichte einzeln genommen hervorgebracht werden würde, und es zeigt sich, dass die Summe der beiden Werthe, welche man auf diese Weise für irgend eine jener Seitenkräfte erhält, den wirklichen Werth dieser Seitenkraft darstellt. Auf gleiche Weise kann man sich davon überzeugen, dass z. B. bei dem in Fig. 208 dargestellten Falle irgend eine jener Seitenkräfte nichts Anderes ist als die Summe der sechs Beiträge, welche die sechs Belastungen G, P, Q, G_1, P_1, Q_1 einzeln genommen zu derselben liefern. Es ergiebt sich hieraus ein Mittel, die im vorigen Paragraphen behandelte Aufgabe dadurch zu vereinfachen, dass man dieselbe in eben so viele einzelne Aufgaben (als Gewichte vorhanden sind) zerlegt, deren jede für sich allein dann eine viel einfachere Lösung zulässt.

Da das eigene Gewicht einer Stange genau eben so wirkt wie eine in dem Schwerpunkte der gewichtlos gedachten Stange angehängte fremde Last von gleicher Grösse, so ist bei Anwendung dieser Methode zwischen eigenen und fremden Lasten keinerlei Unterschied zu machen. Wenn es sich nicht um die Bestimmung der wirklichen Gegendrücke, sondern vielmehr nur um die Bestimmung des von einem einzelnen Gewichte ausgeübten Einflusses handelt, so müssen also die Stangen selbst als vollkommen gewichtlose starre Linien behandelt werden.

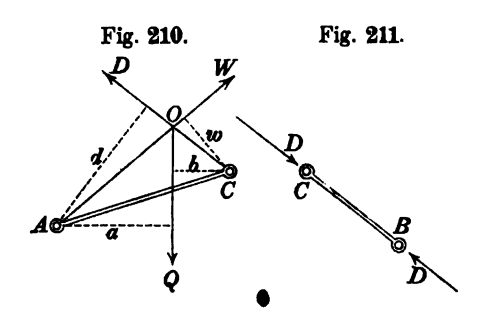
Fig. 209.



Die Richtungslinie des von irgend einem einzelnen Gewichte hervorgebrachten Druckes in dem Verbindungspunkte der beiden Stangen fällt immer mit der Richtung der unbelasteten Stange zusammen (Fig. 209).

Denn für die unbelastete Stange BC (Fig. 211) bildet (nach der oben vorausgeschickten Erklärung) dieser Druck D die einzige Kraft, welche ausserhalb des festliegenden Drehpunktes derselben ihren Angriffspunkt hat. Aus dem Gleichgewichtszustande dieser Stange kann man also schliessen, dass die Richtungslinie jener Kraft durch den Drehpunkt B hindurchgeht, weil andernfalls die Stange um diesen Punkt gedreht werden würde, sowie ferner: dass der von dem Punkte B geleistete Gegendruck mit dem Drucke D gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung hat.

Fig. 210. Fig. 211.



Die Lage des Durchschnittspunktes O, in welchem die Richtungslinien der beiden Kräfte Q und D einander schneiden (Fig. 210), ist demnach als bekannt anzusehen, und da die drei auf die Stange AC wirkenden Kräfte W, D, Q nur dann einander im Gleichgewicht halten können, wenn ihre Richtungslinien in einem ge-

meinschaftlichen Durchschnittspunkte zusammentreffen, so ist in der Verbindungslinie AO nunmehr auch die Richtung der Kraft W gefunden, und ergiebt sich hieraus die fernere Regel:

Man findet die Richtung des vom Unterstützungspunkte der belasteten Stange geleisteten Gegendrucks, indem man von diesem Punkte aus eine gerade Linie zieht nach dem Durchschnittspunkte, in welchem die Richtungslinie des Gewichtes von der Richtung der unbelasteten Stange getroffen wird.

Um die beiden Kräfte D und W ihrer **Grösse** nach zu bestimmen, kann man alsdann — anstatt nach der Methode des vorigen Paragraphen dieselben in ihre Seitenkräfte zu zerlegen und diese letzteren aus den für jede einzelne Stange geltenden Gleichgewichts-Bedingungen zu bestimmen — in diesem Falle einfacher auf dem Wege der Construction zum Ziele kommen, entweder: indem man (wie in Fig. 209 schon angedeutet) bei O das Kräfte-Parallelogramm construirt, dessen Diagonale ON als gegeben anzusehen ist, oder: indem man die Hebelarme der Kräfte in Bezug auf die Punkte A und C construirt und dann für die Stange AC zweimal die Gleichungen der statischen Momente aufstellt; das eine Mal den Punkt A, das andere Mal den Punkt C als Drehpunkt wählend, woraus sich nach Fig. 210 folgende Gleichungen ergeben:

Fig. 212.

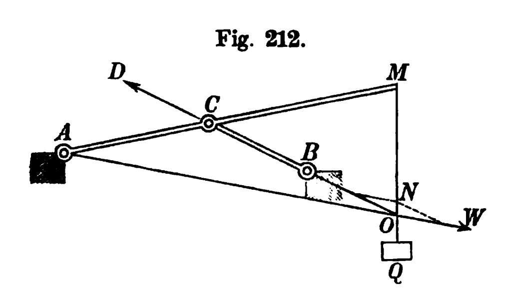
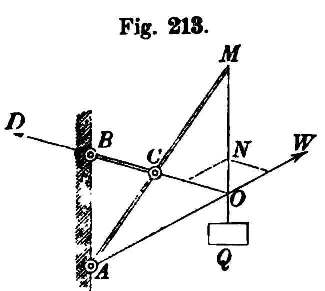


Fig. 213.



$$0 = -Dd + Qa, \text{ oder: } D = Q\frac{a}{d},$$

$$0 = Ww - Qb, \text{ oder: } W = Q\frac{b}{w}.$$

In den Figuren 212, 213 ist jedes Mal durch die bekannte Parallelogramm-Construction der Weg angedeutet, auf welchem die gleiche Methode zur Bestimmung der Gegendrücke D, W auch in solchen Fällen führt, wo entweder der Aufhängepunkt M oder die beiden festen Punkte A, B eine von der in Fig. 209 angenommenen abweichende Lage haben. Ebenso zeigt Fig. 214, dass dieselbe Methode auch

da angewendet werden kann, wo es statt des vertical abwärts wirkenden Gewichtes Q eine beliebig anders gerichtete Kraft K ist, welche die Gegendrücke hervorruft. Fig. 215 endlich ist hinzugefügt, um anzudeuten, dass es keinen Unterschied macht, ob die Stangen geradlinig oder krummlinig sind.

Fig. 214.

Da überhaupt abweichende Formen der beiden Körper, welche bisher durch geradlinige Stangen repräsentirt wurden, die Anwendbarkeit dieser Methode in keiner Weise beeinträchtigen können, so lässt sich dieselbe auch mit Vortheil benutzen, um z. B. bei einer Bogenbrücke (Fig. 216), deren zwei Hälften unter einander und mit den Widerlagern durch Gelenkbolzen (Scharniere) verbunden sind, den Einfluss einer einzelnen Belastung zu ermitteln, die Beiträge, welche dieselbe zu den Gegendrücken liefert, und damit zugleich die Art und Weise zu bestimmen, in welcher diese Belastung zu der Spannung in irgend einem Theile der ganzen Construction ihren Beitrag liefert, welcher letztere Punkt den Gegenstand später folgender ausführlicher Untersuchungen bilden wird.

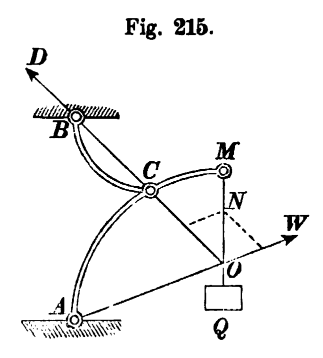


Fig. 215.

Wenn man die mittelst der angedeuteten Parallelogramm-Constructionen gefundenen, von dem einen Gewichte Q hervorgebrachten Gegendrücke wiederum durch Parallelogramm-Constructionen in ihre horizontalen und verticalen Seitenkräfte zerlegt, und dasselbe Verfahren in Bezug auf die übrigen etwa vorhandenen Belastungen wiederholt, so kann man durch — gleichfalls auf geometrischem Wege auszuführende Summation der zusammengehörigen (als horizontale oder verticale Linien-Abschnitte sich darstellenden) Grössen nach und nach die von allen Belastungen zusammengenommen hervorgebrachten Totaldrücke bestimmen und auf diese Weise — wenn man es nicht vorzieht, die im vorigen Paragraphen erklärte Methode der Berechnung anzuwenden — die ganze Aufgabe auf rein geometrischem Wege lösen.

Fig. 216.

Selbstverständlich können die in den Figuren 209, 212 . . . 215 durch Construction dargestellten Kräfte ohne Weiteres als die wirklichen Gegendrücke betrachtet werden in allen solchen Fällen, wo die eigenen Gewichte der Stangen im Verhältniss zu der Belastung Q (oder der Kraft K) klein genug sind, um vernachlässigt werden zu dürfen.

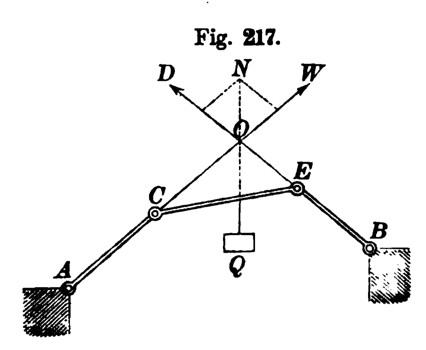
§ 58.

Gleichgewichtslage einer Verbindung von drei Stangen.

Jeder von den beiden festen Unterstützungspunkten einer Verbindung von zwei Stangen kann ersetzt werden durch den beweglichen Endpunkt einer neu hinzugefügten Stange, welche ihrerseits am anderen Ende durch einen festen Drehpunkt unterstützt ist — vorausgesetzt, dass dieser hinzugefügten Stange eine solche Richtung gegeben wird, bei welcher der auf sie übertragene Druck die Stange im Gleichgewicht hält in Bezug auf eine Drehung um ihren festen Unterstützungspunkt. Dieser letztere kann alsdann wiederum auf gleiche Weise mit dem beweglichen Endpunkte einer folgenden Stange vertauscht werden, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens lässt sich allmählich eine beliebige Anzahl von Stangen in solcher Weise auf einander stellen, dass das ganze Gebäude, obwohl nur von zwei festen Punkten gestützt und aus lauter beweglichen an einander gelehnten Stücken zusammengestellt, dennoch im Gleichgewichtszustande sich erhält.

Die in den vorigen Paragraphen gefundenen Methoden zur Bestimmung der von zwei einander gegenseitig stützenden Stangen hervorgebrachten Druckkräfte können auch auf eine Verbindung von mehr als zwei Stangen angewendet und beim Aufsuchen der Bedingungen ihrer Gleichgewichtslage benutzt werden. Denn, wenn eine solche Verbindung im Gleichgewichtszustande sich befindet, so wird dieser Zustand dadurch nicht gestört, dass irgend einer von den Verbindungspunkten in einen festen Punkt verwandelt wird. Jedes Paar von benachbarten Stangen befindet sich also in derselben Situation, wie wenn dasselbe durch zwei feste Punkte unterstützt wäre, und die auf diese beiden Punkte übertragenen Druckkräfte können auf dieselbe Weise wie im vorigen Falle bestimmt werden.

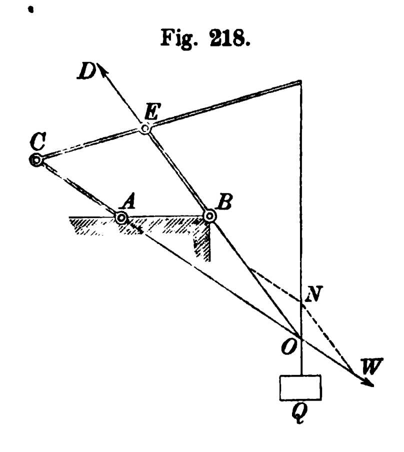
Fig. 217.



Wenn z. B. $ACEB$ die Gleichgewichtslage einer Verbindung von drei Stangen ist (Fig. 217), so sind die von den beiden Stangen AC und EC in den beiden Punkten A und E hervorgerufenen Gegendrücke W und D

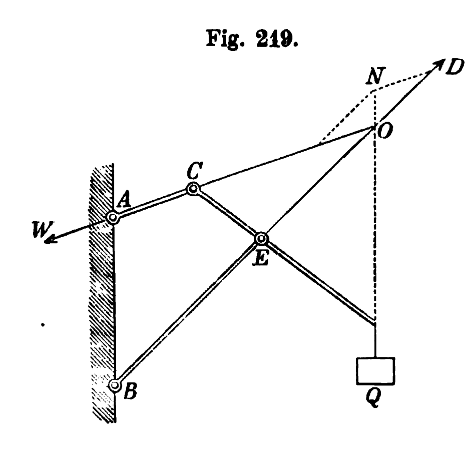
auf dieselbe Weise zu bestimmen, wie wenn der Punkt E ein fester Punkt wäre; ebenso die von den beiden Stangen BE und CE hervorgebrachten Drücke, wie wenn der Punkt C ein fester Punkt wäre. Wenn die Stange CE die allein belastete ist, so müssen die Richtungen der beiden anderen unbelasteten (und als gewichtlos betrachteten) Stangen mit den Richtungslinien der auf sie übertragenen Druckkräfte oder der von ihnen zu leistenden Gegendrücke zusammenfallen. Bedingung der Gleichgewichtslage ist also, dass die Richtungslinien der beiden unbelasteten Stangen mit der Richtungslinie der Belastung in einem und demselben Punkte O zusammentreffen.

Fig. 218.



Auf demselben Principe beruhen die Gleichgewichtslagen der in den Figuren **218, 219, 220** dargestellten Stangenverbindungen, welche nur durch abweichende Lage des Belastungspunktes und der festen Unterstützungspunkte von der vorigen Anordnung sich unterscheiden. In allen diesen Fällen findet man die Richtungen, welche den unbelasteten Stangen zu geben sind, indem man auf die belastete mittlere Stange den bekannten Satz von den drei Kräften anwendet: „Drei auf einen festen Körper wirkende Kräfte können einander nur dann im Gleichgewicht halten, wenn ihre drei Richtungslinien in einem und demselben Punkte zusammentreffen."

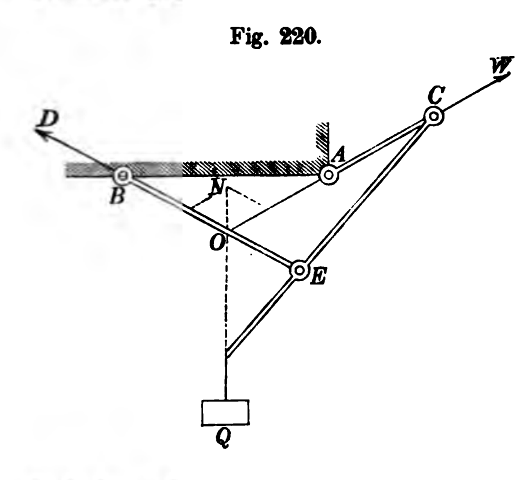
Fig. 219.



Wenn im Gegenfalle: die mittlere Stange die allein unbelastete ist, so muss ihre Richtung zusammenfallen mit der Richtung desjenigen Drucks, welchen die beiden belasteten Seiten-

stangen auf einander ausüben würden, falls sie unmittelbar einander gegenseitig stützten — und zwar mit unverändert beibehaltenen Richtungen.

Fig. 220.



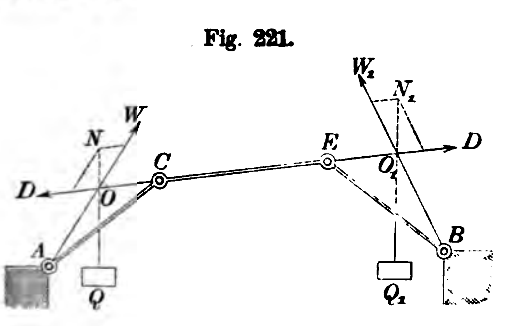
Auf dieselbe Weise also, wie mit Bezug auf Fig. 205 die Richtung des Druckes D bestimmt wurde, kann auch die Richtung gefunden werden, welche der Stange CE gegeben werden muss, wenn dieselbe mit den in ihren Richtungen gegebenen belasteten Seitenstangen AC und BE zusammen in der Gleichgewichtslage sich befinden soll (Fig. 221).

Statt dessen kann man diesen letzteren Fall auch auf den vorigen zurückführen. Die Kraft Q kann betrachtet werden als die Mittelkraft von zwei resp. in den Punkten A und C angreifenden Kräften:

$$p = Q \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{AC}} \quad \text{und} \quad q = Q \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \text{ (Fig. 222)},$$

ebenso die Kraft Q_1 als Mittelkraft der beiden resp. in den Punkten B und E angreifenden Kräfte:

Fig. 221.



$$p_1 = Q_1 \frac{\overline{JE}}{\overline{BE}}$$

und

$$q_1 = Q_1 \frac{\overline{BJ}}{\overline{BE}}.$$

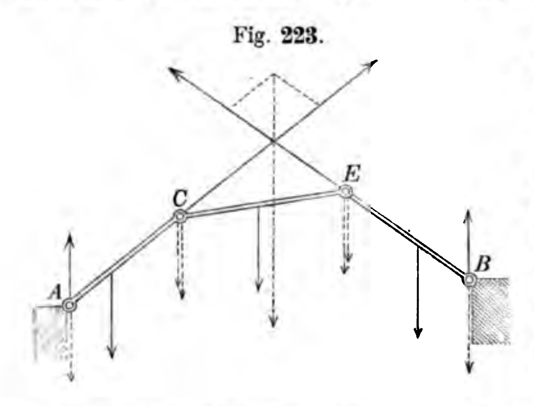
Die beiden Kräfte p und p_1 werden direct von den festen Punkten A und B aufgehoben, erzeugen daselbst eben so grosse vertical aufwärts gerichtete Gegendrücke und haben übrigens keinen Einfluss auf die Gleichgewichtslage der drei Stangen. Die Kräfte q und q_1, deren Angriffspunkte zugleich Punkte der mittleren Stange

CE sind, können durch ihre Mittelkraft $R = q + q_1$ ersetzt werden, deren Angriffspunkt L die Linie CE in zwei Abschnitte zerlegt, welche aus der Gleichung: $\frac{\overline{CL}}{\overline{EL}} = \frac{q_1}{q}$ bestimmt werden können. Die Gleichgewichtslage der drei Stangen ist daher genau dieselbe, wie wenn ausschliesslich die mittlere Stange in dem Punkte L mit dem Gewichte R belastet wäre. Die Richtungen der beiden Stangen AC und BE müssen in der Richtungslinie der Kraft R in einem und demselben Punkte O zusammentreffen. Der feste Punkt A leistet ausser dem vertical aufwärts gerichteten Gegendruck v $(= p)$ noch den in die Richtung AC fallenden Gegendruck K, und die Mittelkraft dieser beiden Kräfte ist die in Fig. 221 mit W bezeichnete Kraft, eben so ist W_1 die Mittelkraft von v_1 $(= p_1)$ und K_1.

Fig. 222.

Wenn endlich alle drei Stangen belastet sind, so kann die directe Belastung der mittleren Stange (wie in Fig. 223 angedeutet) ebenfalls durch zwei in den Punkten C und E angehängte Gewichte ersetzt, und damit dieser Fall zurückgeführt werden auf den eben untersuchten Fall, wo die Kräfte, welche die Gleichgewichtsform bedingten, als ausschliesslich aus den Belastungen der beiden Gelenkpunkte C und E bestehend angesehen werden konnten.

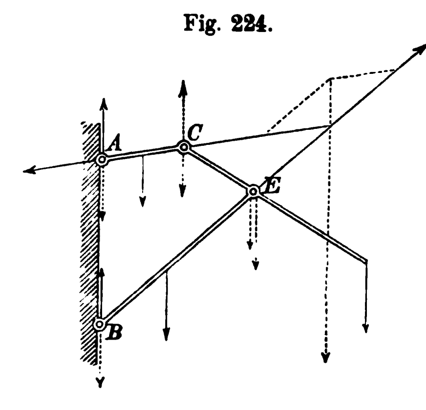
Fig. 223.



Dass dieselbe Methode der Zerlegung der Gewichte auch dann angewendet werden kann, wenn eine der Stangen in ihrem über

den Gelenkpunkt hinaus verlängerten Theile ihre Belastung trägt — in welchem Falle die beiden Seitenkräfte dieses Gewichtes entgegengesetzte Richtungen erhalten — ist beispielsweise in Fig. 224 angedeutet. Eine Vergleichung dieser Figur mit Fig. 219 lässt zugleich den Weg erkennen, auf welchem die allgemeine Lösung derjenigen Aufgabe gefunden werden kann, welche in den Figuren 218, 219, 220 nur für den speciellen Fall gelöst wurden, wenn ausschliesslich die mittlere Stange als belastet anzusehen war.

Fig. 224.



Wenn die Lage der Stangenverbindung $ACEB$ (Fig. 225) gegeben ist, und das Verhältniss bestimmt werden soll, in welchem die beiden an den Punkten C und E hängenden Gewichte Q und Q_1 zu einander stehen müssen, damit jene gegebene Lage eine Gleichgewichtslage sei: so kann man diese Aufgabe auch auf dem Wege der Rechnung lösen, indem man den Satz von den drei Kräften (Gleichung 72) einmal auf die an dem Punkte C einander im Gleichgewicht haltenden drei Kräfte Q, D, W (Fig. 226), ein anderes Mal auf die an dem Punkte E einander im Gleichgewicht haltenden drei Kräfte Q_1, D, W_1 (Fig. 227) anwendet. Man erhält dann die beiden Gleichungen:

Fig. 225.

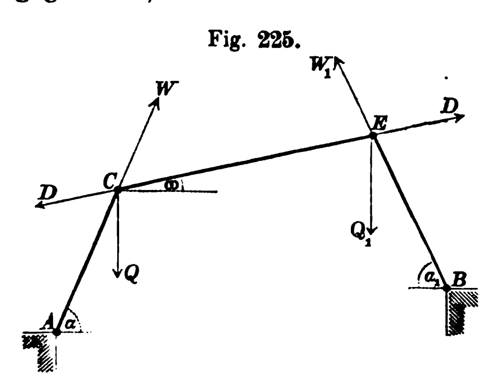
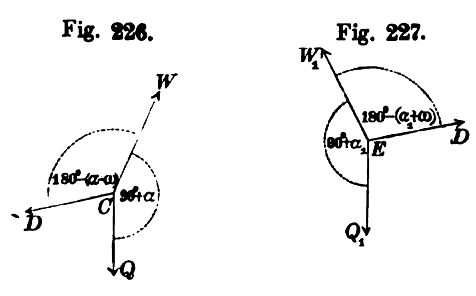


Fig. 226. Fig. 227.

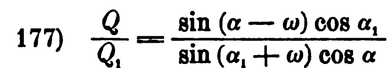


$$175)\quad \frac{Q}{D} = \frac{\sin[180^\circ - (\alpha - \omega)]}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\cos\alpha},$$

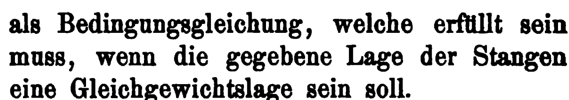
$$176)\quad \frac{Q_1}{D} = \frac{\sin[180^\circ - (\alpha_1 + \omega)]}{\sin(90^\circ + \alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1 + \omega)}{\cos\alpha_1},$$

Fig. 228.

und wenn man die erstere durch die letztere dividirt, so erhält man die Gleichung:



$$177)\quad \frac{Q}{Q_1} = \frac{\sin(\alpha - \omega)\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \omega)\cos\alpha}$$



als Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein muss, wenn die gegebene Lage der Stangen eine Gleichgewichtslage sein soll.

Anstatt dessen würde man zur Lösung der obigen Aufgabe auch die in Fig. 228 angedeutete Construction benutzen können, indem man von irgend einem Punkte J aus parallel zu den Stangen drei gerade Linien zieht, durch welche auf einer beliebigen Verticalen KL zwei Abschnitte gebildet werden. Diese beiden verticalen Strecken repräsentiren die beiden Gewichte Q und Q_1, während die drei anderen Linien der Grösse und Richtung nach die Spannungen in den drei Stangen darstellen.

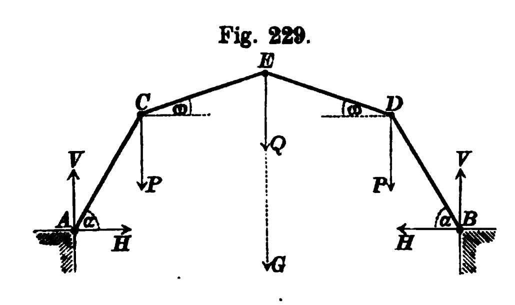
§ 59.

Symmetrische Verbindung von vier Stangen.

Der Gleichgewichtszustand der in Fig. 229 dargestellten Stangenverbindung $ACEDB$ würde keine Störung erleiden, wenn die vier Stangen — anstatt eine in den Gelenkpunkten biegsame Kette zu bilden — zu einem starren Systeme verbunden würden (wie z. B. wenn die Stangen in den Gelenkpunkten zusammengeschweisst wären). Man kann also auf das Ganze die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen anwenden, und wenn man die Gleichung der statischen Momente aufstellt, indem man das eine Mal den Punkt B, das andere Mal den Punkt A als Drehpunkt wählt, so findet man, dass die verticale Seitenkraft des von jedem der beiden festen Stützpunkte geleisteten Gegendrucks die Grösse $V = \frac{1}{2} G$ hat, insofern die Mittelkraft G der drei Gewichte P, Q, P wegen vorausgesetzter Symmetrie in die verticale Mittellinie der Figur

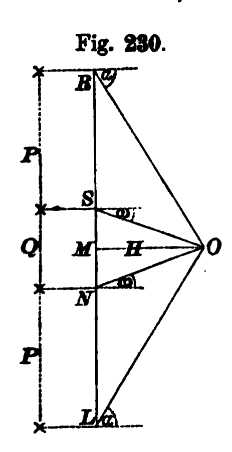
hineinfällt. Die horizontale Seitenkraft H muss so beschaffen sein, dass die Mittelkraft aus V und H an dem Punkte A die Richtung AC und an dem Punkte B die Richtung BD erhält. Man kann dieselbe bestimmen, indem man ein Rechteck construirt, dessen verticale Seite gleich V ist, und dessen Diagonale entweder zu AC oder zu BD parallel ist; die horizontale Seite dieses Rechtecks wird dann die Horizontalkraft H darstellen.

Fig. 229.



Wäre also die Lage der Stangenverbindung, sowie das Totalgewicht G gegeben, und die Aufgabe gestellt: es solle diejenige Art der Gewichtsvertheilung ermittelt werden, für welche jene gegebene Lage die Gleichgewichtslage bildet: so würde man diese Aufgabe auf die in Fig. 230 angedeutete Art durch Construction lösen können, indem man die verticale Linie $LM = V = \frac{1}{2} G$ macht, durch M eine Horizontale und durch L eine Parallele zu AC legt, wodurch der Schnittpunkt O und die Horizontale $MO = H$ gefunden ist. Die von O aus parallel zu CE gezogene Linie ON stellt dann den von der Stange CE auf den Punkt E übertragenen Druck dar, dessen verticale Seitenkraft um die Grösse P kleiner sein muss als V. Es stellt folglich der Abschnitt LN das links von der Mitte hängende Gewicht P dar, sowie der Abschnitt RS in der auf gleiche Weise zu construirenden anderen Hälfte der Figur das rechts von der Mitte hängende Gewicht P darstellt, und die von O aus nach den vier Punkten L, N, S, R gezogenen Linien repräsentiren die in den vier Stangen wirkenden Druckkräfte.

Fig. 230.



Um die Gewichtsvertheilung auf dem Wege der Rechnung zu bestimmen, hat man die aus Fig. 230 sich ergebenden Gleichungen:

$$178)\quad \frac{\frac{1}{2} Q}{H} = \operatorname{tg} \omega, \qquad 179)\quad \frac{\frac{1}{2} G}{H} = \operatorname{tg} \alpha$$

durch einander zu dividiren und erhält dann die Bedingungs-Gleichung:

$$180)\quad \frac{Q}{G} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Wäre umgekehrt die Gewichtsvertheilung gegeben und die zugehörige Gleichgewichtslage einer Stangenverbindung gesucht, so würde man ebenfalls das in Fig. **230** angedeutete Verfahren anwenden können, indem man auf der Verticalnn LR die drei Gewichte abträgt und durch die Mitte M eine Horizontale legt, worauf man von einem in dieser Horizontalen beliebig zu wählenden Punkte O aus nach den vier Punkten L, N, S, R gerade Linien zieht, in welchen dann die gesuchten Richtungen der vier Stangen gefunden sind.

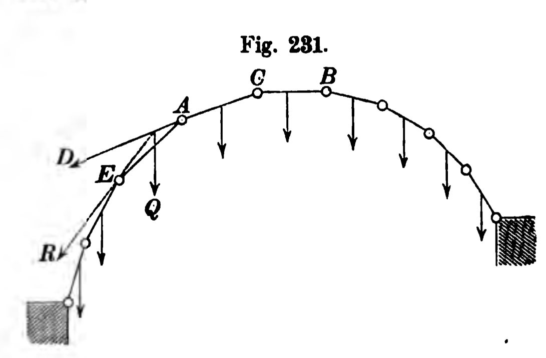
Das gleiche Verfahren lässt sich auch auf eine aus mehr als vier Stangen zusammengesetzte symmetrische Stangenverbindung anwenden.

§ 60.

Verbindung von beliebig vielen Stangen.

Dieselben Stangen auf dieselbe Weise belastet und in derselben Reihenfolge an einander gefügt, können auf unendlich viele verschiedene Arten zu einer Gleichgewichtsform zusammengestellt werden. Sobald jedoch für ein beliebiges Paar von benachbarten Stangen, z. B. AC und BC in Fig. **231**, die Lage vorgeschrieben ist, giebt es nur noch eine einzige Gleichgewichtsform für die ganze Stangenverbindung. Denn mit der Lage dieser beiden Stangen ist zugleich die Grösse und Richtung des auf den Punkt A übertragenen Druckes D bestimmt — welcher nach der im Anfang dieses Paragraphen vorausgeschickten

Fig. 231.

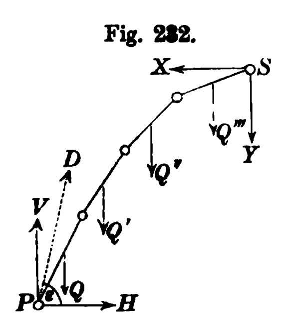


Erklärung genau auf dieselbe Weise zu bestimmen ist, wie wenn jene beiden Stangen in A und B durch feste Punkte unterstützt wären — und für die anstossende Stange AE giebt es nunmehr

nur eine einzige leicht aufzufindende Lage, bei welcher die Mittelkraft R von jenem Druck D und ihrer Belastung Q durch den jenseitigen Endpunkt E dieser Stange hindurch geht, wie es die Gleichgewichts-Bedingung derselben in Bezug auf Drehung um diesen Punkt erfordert. Diese (ebenfalls hiermit bestimmte) Mittelkraft R bildet zugleich den auf den Punkt E übertragenen Druck, welcher wiederum die nächstfolgende Stange im Gleichgewichtszustande erhält, folglich eine bestimmte Lage auch für diese Stange bedingt. Indem man zu beiden Seiten der gegebenen Stangen AC und BC auf diese Weise von einer Stange zur anderen fortschreitend jedesmal auf die nächstfolgende Stange die Gleichgewichts-Bedingung in Bezug auf Drehung um ihren jenseitigen Endpunkt anwendet, findet man nach und nach die Gleichgewichtslage für die ganze Stangenverbindung.

Da die Richtung einer beliebigen einzelnen Stange durch Grösse und Richtung des auf einen ihrer beiden Endpunkte wirkenden Drucks allein schon bedingt ist, so genügt es auch: für irgend einen der Gelenkpunkte die Grösse und Richtung des daselbst wirkenden Drucks oder dessen horizontale und verticale Seitenkraft zu kennen, um hieraus den Druck in jedem anderen Gelenkpunkte und die Gleichgewichtsform der ganzen Stangenverbindung zu bestimmen. Denn der Gleichgewichtszustand des Ganzen wird nicht gestört, wenn an irgend einem Gelenkpunkte die Verbindung aufgehoben und die Wirkung der anstossenden Stange durch eine Kraft von gleicher Wirkung ersetzt wird an jeder von den beiden getrennten Stangen. Die aus dem Ganzen herausgenommene Stangengruppe PS wird also im Gleichgewichtszustande verbleiben, sobald an den Trennungspunkten P und S resp. durch die Kräfte H, V und X, Y die vorher von den anstossenden Stangen auf sie ausgeübten Wirkungen genau ersetzt werden (Fig. 232). Wenn ferner diese vier Kräfte die Stangengruppe trotz der Beweglichkeit ihrer Verbindungsglieder schon im Gleichgewichtszustande zu erhalten im Stande sind, so wird um so weniger eine Ursache zur Verschiebung vorhanden sein, wenn diese Beweglichkeit der Verbindung aufgehoben, die ganze Gruppe also in einen starren Körper verwandelt würde (etwa von

Fig. 232.



solcher Beschaffenheit, wie wenn die Stangen in den Gelenkpunkten zusammengeschweisst wären). Es können daher auf die ganze Gruppe PS auch die für einen einfachen starren Körper geltenden Gleichgewichts-Bedingungen angewendet werden, nach welchen unter Anderen sowohl in Bezug auf die horizontale, als in Bezug auf die verticale Richtung die algebraische Summe sämmtlicher Seitenkräfte gleich Null sein muss. Für die Seitenkräfte H und V gelten demnach die Gleichungen:

$$181)\quad 0 = H - X, \quad \text{oder:} \quad H = X,$$

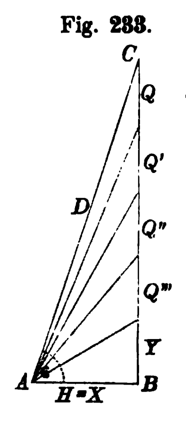
$$182)\quad 0 = V - Y - \Sigma(Q), \quad \text{oder:} \quad V = Y + \Sigma(Q),$$

in welcher letzteren abkürzungsweise mit $\Sigma\,(Q)$ die ganze Belastungssumme der Stangengruppe bezeichnet ist; und für den Druck D die Gleichungen:

$$183)\quad D = \sqrt{H^2 + V^2},$$

$$184)\quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{V}{H}.$$

Fig. 288.



Die in letzteren Gleichungen enthaltenen Resultate kann man auf die in Fig. 288 angegebene Weise geometrisch darstellen, indem man die horizontale Seitenkraft $AB = H$ und die verticale Seitenkraft $BC = V$ nach dem Parallelogramm der Kräfte zur Mittelkraft $AC = D$ zusammensetzt.

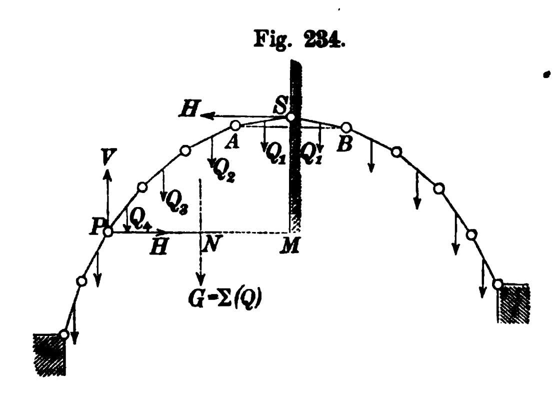
Denkt man sich diese Construction alsdann in Bezug auf jeden der übrigen Gelenkpunkte wiederholt, so erkennt man leicht, dass die anderen in der Figur von dem Punkte A ausgehenden Linien ihren Grössen und Richtungen nach die Drücke in den übrigen Gelenkpunkten darstellen.

Wenn also für irgend einen Gelenkpunkt S die Seitenkräfte X, Y des daselbst wirkenden Druckes gegeben sind, so ist damit für jeden beliebigen anderen Gelenkpunkt P die Grösse und Richtung des in diesem Punkte wirkenden Druckes D, folglich auch die Lage der angrenzenden Stange bestimmt. Zugleich ergiebt sich aus Gleichung 181), dass die horizontale Seitenkraft des Druckes in allen Gelenkpunkten der ganzen Stangenverbindung gleiche Grösse hat.

In § 56 sind die Bedingungen gefunden, unter welchen der zwischen zwei einander gegenseitig stützenden Stangen wirkende Druck horizontale Richtung hat, welcher Fall unter anderen dann eintritt, wenn die Stangen auf gleiche Weise belastet sind und die beiden gleichen Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks mit

horizontaler Basis bilden. Wenn die beiden Stangen AS und BS in Fig. 234 dieser Bedingung entsprechen, also der in dem Scheitelpunkte S thätige Druck auf jede der zu beiden Seiten liegenden Stangengruppen gerade so wirkt, wie wenn dieselbe in dem Punkte S an eine verticale Wand sich anlehnte, so ist Y gleich Null und nach Gleichung 182) wird:

Fig. 234.



185) $V = \Sigma(Q) = G$,

d. h. die verticale Seitenkraft des in irgend einem Gelenkpunkte wirkenden Druckes ist gleich der Summe der Belastungen aller zwischen diesem Punkte und dem Scheitelpunkte befindlichen Stangen. Die horizontale Seitenkraft dieses Druckes, welche immer dem im Scheitelpunkte wirkenden horizontalen Drucke gleich ist, kann man, wenn die Lage der Stangen und ihrer Belastungspunkte bekannt ist, auch bestimmen, indem man für das ganze Stück PS die Gleichung der statischen Momente aufstellt und dabei den beliebig zu wählenden Punkt P als Drehpunkt wählt. Statt der Summe der statischen Momente der Gewichte Q kann dabei auch das statische Moment von ihrer Mittelkraft G gesetzt werden. Man erhält also die Gleichung:

$$186) \quad 0 = G \,.\, \overline{PN} - H \,.\, \overline{SM}, \quad \text{oder:} \quad H = G \cdot \frac{\overline{PN}}{\overline{SM}}.$$

Die in Fig. 234 und den vorhergehenden Figuren dargestellte Gleichgewichtsform einer Stangenverbindung, bei welcher die beiden festen Unterstützungspunkte unten lagen, kann — nach Analogie der im § 51 eingeführten Bezeichnungsweise — eine labile Gleichgewichtsform genannt werden, insofern die geringste Verschiebung der Stangen den vollständigen Einsturz des ganzen Gebäudes zur Folge haben würde. Wenn man dieselbe Stangenverbindung ein anderes Mal — wie in Fig. 235 dargestellt — in umgekehrter Lage an zwei oben liegenden festen Punkten so aufhängt, dass die neue Form und Lage das Spiegelbild der vorigen darstellt, so befindet sich die Stangenverbindung ebenfalls im Gleichgewichts-

zustande, und zwar ist diese letztere Lage eine stabile Gleichgewichtslage, insofern bei dieser Anordnung eine geringe Verschiebung nur das Eintreten solcher Bewegungen zur Folge haben würde, welche die Stangen ihrer Gleichgewichtslage wieder zuführen.

Während es bei der labilen Gleichgewichtslage Druckkräfte sind, mit welchen die Stangen in den Gelenkpunkten einander gegenseitig stützen, sind es bei der stabilen Gleichgewichtslage Zugkräfte, welche übrigens hinsichtlich ihrer Richtungslinien und Grössen vollkommen mit jenen Druckkräften übereinstimmen. Denn dieselben Längengrössen $\overline{PN}$ und $\overline{SM}$ bilden auch in Fig. 235 die Hebelarme resp. der beiden Kräfte G und H; es stellt daher Gleichung 186) auch in Bezug auf diese letztere Figur die Gleichung der statischen Momente für das Stück PS dar, und zeigt, dass jede zwischen dem Scheitelpunkte S und irgend einem beliebig zu wählenden anderen Punkte P befindliche Stangengruppe, folglich auch die ganze Stangenverbindung im Gleichgewichtszustande sich befindet.

Fig. 235.

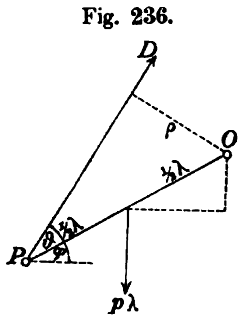
§ 61.

Gleichgewicht einer an zwei Punkten unterstützten vollkommen biegsamen Kette.

Wenn man für die in Fig. 236 dargestellte Stange die Gleichung der statischen Momente aufstellt in Bezug auf ihren einen Endpunkt O als Drehpunkt, so kann man daraus den Winkel ϑ bestimmen, welchen die Richtungslinie einer am anderen Endpunkte P wirkenden gegebenen Kraft D mit der Richtung der Stange einschliessen muss, um zu verhindern, dass die Stange um jenen Punkt O sich drehe. Die Belastung der Stange soll gleichförmig über ihre Länge λ vertheilt, und jede Längeneinheit derselben mit dem Gewichte p belastet sein; die ganze Belastung beträgt

also $p\lambda$ und wirkt wie ein in dem Mittelpunkte angehängtes Gewicht von dieser Grösse. Man erhält also nach Fig. 236 die Gleichung:

Fig. 236.



$$0 = D \cdot \varrho - (p\lambda)\left(\frac{\lambda}{2}\cos\varphi\right).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass das Verhältniss:

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right) = \frac{p\cos\varphi}{2D} \cdot \lambda = \sin\vartheta$$

um so kleiner sein muss, je kleiner die Länge λ angenommen wird, und dem Grenzwerthe Null sich nähert, wenn die Länge der Stange bis auf Null abnimmt.

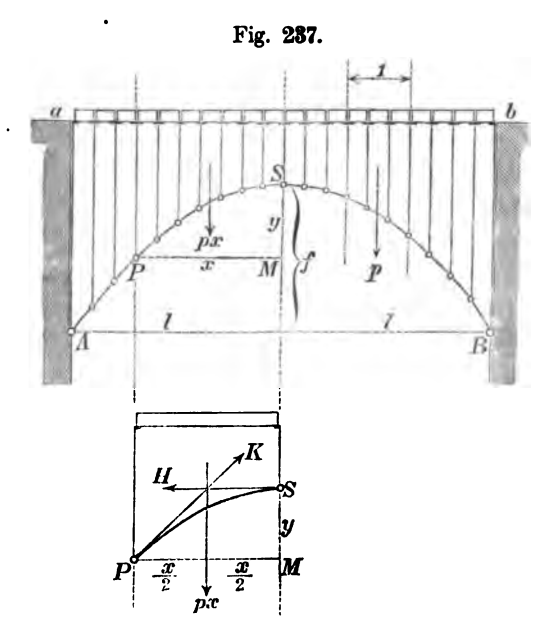
Wie gross auch immer das gegebene Gewicht p, und wie klein auch immer die gegebene Kraft D sein möge: die Richtungslinie dieser letzteren darf um so mehr als mit der Stangenrichtung zusammenfallend angesehen werden, je kürzer die Stange ist.

Je grösser man sich die Anzahl der mit einander verbundenen Stangen und je kleiner man sich die Stangen selbst vorstellt, um so mehr nähert man sich der Vorstellung einer vollkommen biegsamen (unausdehnbaren und unverkürzbaren) materiellen Linie, oder eines linienförmigen Systems von materiellen Punkten, in welchem die Abstände zwischen je zwei benachbarten Punkten unveränderlich, übrigens aber der Beweglichkeit der einzelnen materiellen Punkte keine Schranken weiter gesetzt sind. Eine solche biegsame materielle Linie kann wie eine Stangenkette mit unendlich vielen unendlich kleinen Gliedern behandelt werden. Die Gleichgewichtsform derselben wird also bei stetig über ihre Länge vertheilter Belastung eine gebrochene Linie mit unendlich kleinen Seiten, d. h. eine krumme Linie bilden. Die Richtungslinie der zwischen zwei benachbarten Gliedern wirkenden Kraft (Druck- oder Zug-Spannung) darf nach der oben vorausgeschickten Erklärung überall als mit der Richtung der krummen Linie (oder deren Tangente) zusammenfallend angesehen werden.

Die Form dieser Gleichgewichtslinie hängt von der Art und Weise ab, in welcher die Belastung über die Länge der Kette vertheilt ist, und kann nur dann bestimmt werden, wenn das Gesetz dieser Lastvertheilung bekannt ist. Es soll hier zunächst der specielle Fall vorausgesetzt werden: dass die Belastung über die Horizontal-Projection der Kette stetig und gleichförmig

vertheilt ist. Von dieser Art der Lastvertheilung kann man eine Vorstellung gewinnen, indem man sich einen horizontalen überall gleich starken Balken ab, welcher die ganze Belastung darstellen soll, zunächst in sehr viele sehr kurze Stücke zerschnitten und an den Schnittstellen durch gewichtlose verticale Stangen unterstützt denkt, welche ihre Belastungen auf die (gleichfalls gewichtlos gedachte) Kette übertragen; indem man alsdann jene Schnittstellen nebst den verticalen Stützen immer näher und näher an einander gerückt sich denkt, bis endlich die Fusspunkte dieser letzteren als stetig über die Kettenlänge vertheilt angesehen werden können (Fig. 237).

Fig. 237.



Wenn das Gewicht des Balkens für jede Längeneinheit desselben p beträgt, so hat ein Stück, dessen Länge x Längeneinheiten enthält, das Gewicht px, und der Schwerpunkt dieses Stückes liegt in der Mitte desselben. Für den gerade unter diesem Balkenstücke liegenden Kettentheil PS bildet also px die Mittelkraft von den unendlich vielen Gewichten, mit welchen derselbe belastet ist, und seine Horizontal-Projection $PM = x$ wird von der Richtungslinie dieser Mittelkraft halbirt. Als der eine Endpunkt S dieses Kettentheils soll der höchstliegende Punkt der ganzen Kette gewählt werden, d. h. derjenige Punkt, in welchem die Kette weder aufwärts noch abwärts, folglich **horizontal** gerichtet ist; der andere Endpunkt P soll beliebig gewählt sein. Wenn man in den Punkten S und P die Kette durchschnitte und die rechts und links neben dem Stücke PS liegenden Theile der Kette wegnähme, so müssten, um den Gleichgewichtszustand dieses Stückes zu erhalten, an den

Schnittstellen Kräfte angebracht werden, deren Richtungen mit den Richtungen der Kette an diesen Stellen zusammenfallen, an dem Punkte S also eine Horizontalkraft H, an dem Punkte P eine Kraft K, deren Richtungslinie die Tangente der Curve an diesem Punkte bildet. Das Stück PS wird demnach von den drei Kräften px, H, K im Gleichgewicht gehalten, die Richtungslinien dieser drei Kräfte müssen also in einem und demselben Punkte zusammentreffen, und die algebraische Summe ihrer statischen Momente in Bezug auf jeden beliebigen Punkt P muss gleich Null sein (vergl. Gleichung 186). Aus dieser letzteren Bedingung ergiebt sich die Gleichung:

$$187)\quad Hy = px\frac{x}{2}.$$

Diese Gleichung bleibt auch dann noch gültig, wenn statt des Punktes P der Stützpunkt A als Endpunkt des Kettenstücks angenommen, also wenn $x = l$ und $y = f$ gesetzt wird. Man erhält hieraus die neue Gleichung:

$$188)\quad Hf = pl\frac{l}{2}.$$

Wenn man alsdann Gleichung 187) durch Gleichung 188) dividirt, so erhält man als dritte Gleichung:

$$189)\quad \frac{y}{f} = \frac{x^2}{l^2}.$$

Die gleiche Untersuchung in Bezug auf den rechts vom Punkte S liegenden Theil der Kette angestellt, führt ebenfalls zur Gleichung 189) und zeigt, dass dem Werthe $y = f$ auch an der gegenüberliegenden Seite der Werth $x = l$ entspricht, dass also, wenn die beiden Stützpunkte A und B in gleicher Höhe liegen, die krumme Linie durch die Verticale des Punktes S in zwei symmetrisch gleiche Hälften zerlegt wird.

Mittelst der Gleichung 189) kann man für jeden beliebigen Werth von x den zugehörigen Werth von y berechnen, also die Lage jedes einzelnen Punktes der Kette bestimmen, sobald die Pfeilhöhe f und die Spannweite $2l$ gegeben sind. Aus der Form dieser Gleichung erkennt man, dass für diese specielle Art der Belastung die Gleichgewichtsform der Kette eine Parabel bildet, deren Achse vertical steht, und deren Scheitel in dem Punkte S liegt.

Die Spannung der Kette ist auf dieselbe Weise zu berechnen, wie im vorigen Paragraphen der in irgend einem Gelenkpunkte

wirkende Druck D. Für die Spannung H im Scheitelpunkte S findet man aus Gleichung 188) den Werth:

Fig. 238.

$$190)\quad H = \frac{pl^2}{2f}.$$

Eben so gross muss auch die horizontale Seitenkraft der Spannung K sein (Fig. 238). Die verticale Seitenkraft derselben ist gleich der Belastung des Stücks PS zu setzen, also:

$$191)\quad V = px,$$

worauf dann Grösse und Neigungswinkel der Kraft K bestimmt werden können aus den Gleichungen:

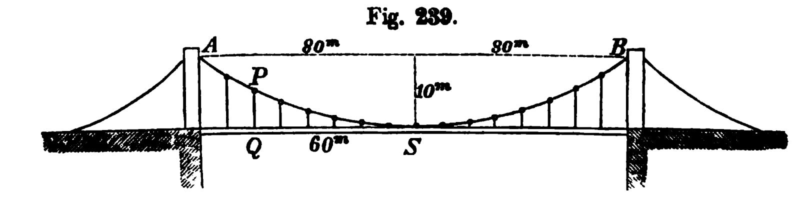
$$192)\quad K = \sqrt{H^2 + K^2} \quad \text{und} \quad 193)\quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{V}{H}.$$

Sämmtliche Gleichungen 187) . . . 193) gelten auch für die stabile Gleichgewichtslage der (hängenden) Kette, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man in Fig. 238 die Richtung jeder einzelnen Kraft und hierauf die ganze Figur umkehrt in der Weise, dass die Richtung von unten nach oben in die von oben nach unten verwandelt wird.

Wenn bei der in Fig. 239 dargestellten Hängebrücke die Totalbelastung — bestehend aus dem Gewichte der Kette, der Brückenbahn, der verticalen Hängestangen, an welcher die letztere hängt, und der sonstigen Körper, welche zur Zeit auf der Brückenbahn sich befinden — gleichförmig über die Spannweite der Brücke vertheilt ist und für jeden Meter der Brückenlänge 4000 Kil. beträgt, so ist die Horizontal-Spannung der Kette überall:

$$H = \frac{pl^2}{2f} = \frac{4000 \cdot 80^2}{2 \cdot 10} = 1\,280\,000 \text{ Kil.}$$

Fig. 239.



Wenn der tiefste Punkt der Kette in der Brückenbahnlinie liegt, so hat an einer Stelle Q, welche 60^m von der Mitte entfernt ist, die verticale Hängestange nach Gleichung 189) die Länge:

$$PQ = y = f\frac{x^2}{l^2} = 10 \cdot \frac{60^2}{80^2} = 5^m{,}625.$$

Die Vertical-Spannung der Kette hat an dieser Stelle die Grösse:

$$V = p \cdot x = 4000 \cdot 60 = 240\,000 \text{ Kil.},$$

und die Total-Spannung der Kette beträgt an dieser Stelle:

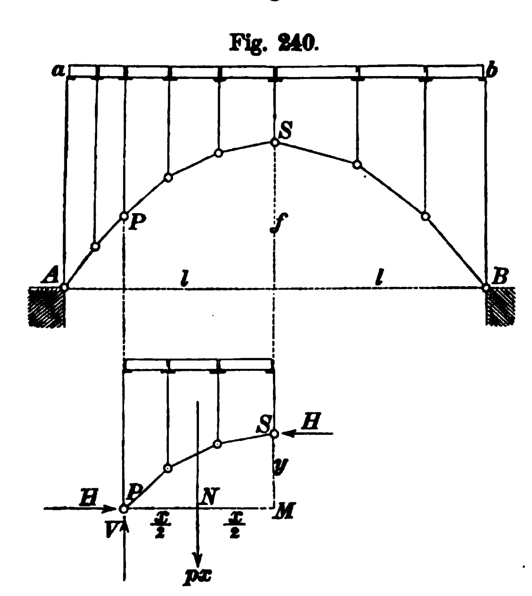
$$K = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{1\,280\,000^2 + 240\,000^2} = 1\,302\,000 \text{ Kil.}$$

Den Neigungswinkel, um welchen an dieser Stelle die Richtung der Kette gegen den Horizont geneigt ist, findet man aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{V}{H} = \frac{240\,000}{1\,280\,000} = 0{,}1875, \quad \varepsilon = 10^0\,37'.$$

Wenn bei der in Fig. 234 dargestellten Stangenverbindung die Belastungen der einzelnen Stangen so gewählt werden, dass der Punkt N, in welchem die Richtungslinie der Kraft G die Horizontal-Projection PM des Stückes PS schneidet, stets in die Mitte dieser Horizontal-Projection fällt, wie auch immer der Gelenkpunkt P gewählt werden möge, so führt die Gleichung 186) zu denselben Resultaten wie die Gleichung 187), und es zeigt sich, dass die einzelnen Gelenkpunkte jener Stangenverbindung alsdann ebenfalls in einer Parabel liegen müssen. Um eine solche Belastungsweise herzustellen, braucht man nur die in Fig. 237 dargestellte Belastungsweise dahin abzuändern, dass der horizontale Balken ab ausschliesslich an denjenigen Stellen, welche vertical über den Gelenkpunkten der Stangenverbindung liegen, durchschnitten und durch Verticalständer unterstützt wird (Fig. 240). Sämmtliche Gleichungen 187) ... 193) gelten nunmehr auch für die Gleichgewichtsform dieser Stangenverbindung, vorausgesetzt, dass unter den Grössen x, y ausschliesslich die Coordinaten der Gelenkpunkte verstanden werden. Da ferner der Gleichgewichtszustand dieser Stangenverbindung nicht gestört wird, wenn in irgend einem Gelenkpunkte, z. B. dem Punkte S, die Beweglichkeit der Gelenkverbindung aufgehoben, und das vorher durch denselben verbun-

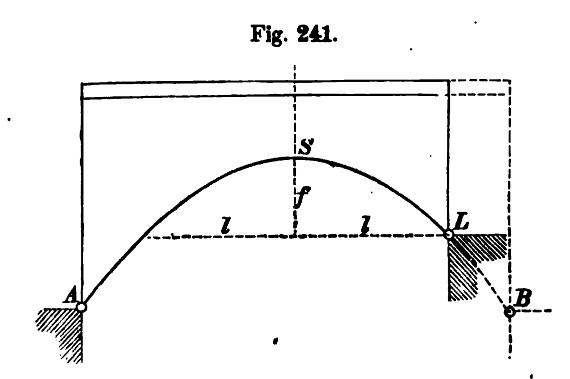
Fig. 240.



dene Stangenpaar zu einem steifen Körper vereinigt oder durch eine einfache Stange ersetzt wird, so bildet die Gleichgewichtslinie der Stangenverbindung auch dann noch ein der Parabel eingeschriebenes Polygon, wenn der Scheitelpunkt der Parabel nicht zu den Gelenkpunkten gehört, und die letzteren überhaupt eine beliebig unsymmetrische Lage haben.

Der Gleichgewichtszustand einer an zwei Punkten A und B unterstützten Stangenverbindung oder Kette (Fig. 241) kann auch dadurch keine Störung erleiden, wenn irgend ein Punkt L derselben in einen festen Punkt verwandelt wird, und der Theil AL wird auch dann noch im Gleichgewichte bleiben, wenn der andere Theil BL nunmehr weggenommen wird. Die Gleichungen 187) ... 193) gelten daher auch in dem Falle noch für die Gleichgewichtsform einer Kette, deren Belastung gleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilt ist, wenn die beiden festen Unterstützungspunkte A und L in verschiedenen Höhen liegen, sobald nur für die Grössen f und l in jenen Gleichungen irgend zwei zusammengehörige Werthe der Coordinaten x und y also z. B. die Coordinaten des nunmehrigen Unterstützungspunktes L substituirt werden.

Fig. 241.



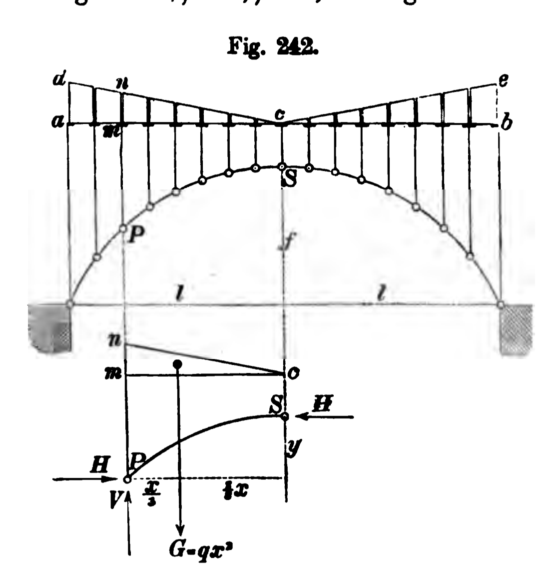
§ 62.

Kette mit ungleichförmig vertheilter Belastung.

Wie auch immer die Belastung über die Horizontal-Projection der Kette vertheilt sein möge: das Gesetz der Vertheilung lässt sich immer (analog der in Fig. 237 dargestellten Methode) durch einen horizontalen Balken veranschaulichen; nur wird bei ungleichförmiger Lastvertheilung der Balken nicht überall von gleicher Stärke anzunehmen sein — es wird vielmehr entweder die Dicke oder die Höhe des Balkens an verschiedenen Stellen verschiedene Grössen haben müssen. Sobald die der Lastvertheilung

entsprechende Form des Balkens von der Art ist, dass für einen beliebigen Abschnitt desselben die Lage des Schwerpunktes allgemein bestimmt werden kann, lässt sich mittelst der den Gleichungen 187), 188), 189) analog zu bildenden Gleichungen die Gleichgewichtsform der Kette leicht bestimmen.

Fig. 242.



Eine von der Mitte aus nach jeder Seite hin gleichförmig zunehmend über die Horizontalprojection vertheilte Belastung kann z. B. durch einen überall gleich dicken horizontalen Balken dargestellt werden, dessen Höhe von der Mitte aus nach jeder Seite hin proportional der Entfernung von der Mitte zunimmt, durch einen Balken also, welcher im Aufriss als aus zwei dreieckigen Hälften *cad* und *cbe* bestehend erscheint, den man im Uebrigen auf die mit Bezug auf Fig. 237 erklärte Art in Stücke zerschnitten und durch Verticalständer unterstützt sich zu denken hat (Fig. 242). Wenn Q das Gewicht der einen Balkenhälfte *cad* ist, so ergiebt sich für die Belastung des Kettentheiles PS nach Fig. 242 der Werth:

$$G = Q\frac{x^2}{l^2},$$

oder wenn abkürzungsweise $\frac{Q}{l^2}$ mit q bezeichnet wird:

$$194)\quad G = qx^2 = V.$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks *cmn* liegt von der Seite *mn* als Grundlinie aus gerechnet im ersten Drittel der Höhe, folglich ist $\frac{x}{3}$ der Hebelarm der Kraft G in Bezug auf den Punkt P. Man erhält also für diesen Fall die den Gleichungen 187), 188), 189) analog gebildeten Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}195) & Hy = q x^2 \dfrac{x}{3} \\ 196) & Hf = q l^2 \dfrac{l}{3}\end{array}\right\} \quad 197) \quad \frac{y}{f} = \frac{x^3}{l^3}.$$

Wenn ausser dieser Belastung noch eine gleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilte Belastung p pro Längeneinheit vorhanden wäre, so würden die obigen Gleichungen die Formen annehmen:

$$198) \quad V = q x^2 + p x,$$

$$\left.\begin{array}{ll}199) & Hy = \dfrac{q x^3}{3} + \dfrac{p x^2}{2} \\ 200) & Hf = \dfrac{q l^3}{3} + \dfrac{p l^2}{2}\end{array}\right\} \quad 201) \quad \frac{y}{f} = \frac{\frac{1}{3} q x^3 + \frac{1}{2} p x^2}{\frac{1}{3} q l^3 + \frac{1}{2} p l^2}.$$

Grösse und Richtung der Spannung der Kette können wie im vorigen Falle mittelst der Gleichungen 192) und 193) bestimmt werden.

§ 63.

Parabolischer Träger.

Denkt man sich eine Kette auf die in Fig. 240 angedeutete Art belastet und zugleich die Verticalen der einzelnen Belastungspunkte in gleichen Abständen von einander befindlich, so dass die ganze Spannweite AB in gleiche Abschnitte durch sie zerlegt wird, so kann man die Länge eines solchen Abschnittes als Längeneinheit wählen und durch diese Wahl der Längeneinheit erreichen, dass die Belastung pro Längeneinheit der Horizontal-Projection zugleich die Belastung für jeden der einzelnen Belastungspunkte bildet.

Fig. 243.

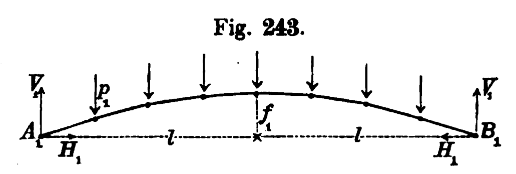
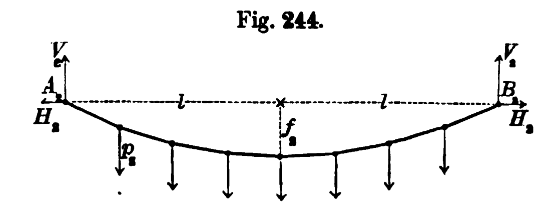


Fig. 244.



Hiernach ergiebt sich aus Gleichung 190) für die horizontale Druckspannung der in Fig. 243 dargestellten Kette der Werth:

$$202)\quad H_1 = \frac{p_1 l^2}{2 f_1},$$

und für die horizontale Zugspannung der in Fig. 244 dargestellten hängenden Kette der Werth:

$$203)\quad H_2 = \frac{p_2 l^2}{2 f_2}.$$

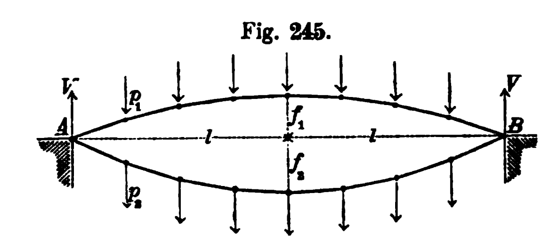
Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man die Gleichung:

$$204)\quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{f_1}{f_2}$$

als Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein muss, wenn die horizontalen Seitenkräfte der auf die festen Stützpunkte übertragenen Kräfte bei beiden Ketten gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung haben sollen.

Denkt man sich die beiden Stützpunkte A_1, A_2 in dem Punkte A vereinigt, ebenso die beiden Stützpunkte B_1, B_2 im Punkte B, so werden die Horizontalkräfte einander gegenseitig aufheben, und die Punkte A und B als gemeinschaftliche Stützpunkte für beide Ketten haben nur verticale Gegendrücke zu leisten, wenn die obige Bedingungsgleichung erfüllt ist (Fig. 245). Setzt man:

Fig. 245.



$$205)\quad p_1 + p_2 = p \quad \text{und} \quad 206)\quad f_1 + f_2 = f,$$

so erhält man für die den Gleichgewichts-Bedingungen entsprechende Vertheilung der Totalbelastung p auf die beiden Ketten die Gleichungen:

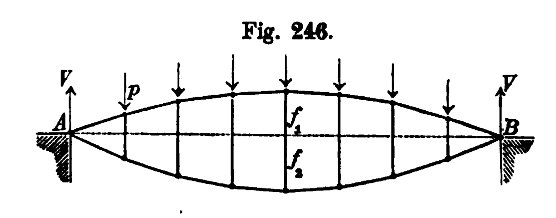
$$207)\quad p_1 = \frac{p}{1 + \frac{f_2}{f_1}} = p \cdot \frac{f_1}{f},$$

$$208)\quad p_2 = \frac{p}{1 + \frac{f_1}{f_2}} = p \cdot \frac{f_2}{f}.$$

Eine solche Lastvertheilung wird auch dann eintreten, wenn die übereinander liegenden Belastungspunkte paarweise durch Vertical-

stangen verbunden, und an den oberen Endpunkten derselben die Belastungen p angebracht sind (Fig. 246). Jede Verticalstange überträgt alsdann den Belastungstheil p_2 auf den betreffenden Belastungspunkt der unteren Kette, und es findet demnach in jeder Verticalstange eine **Druckspannung** von der Grösse p_2 statt. (Wären statt dessen die Totalbelastungen p an den unteren Endpunkten der Verticalstangen angebracht,

Fig. 246.

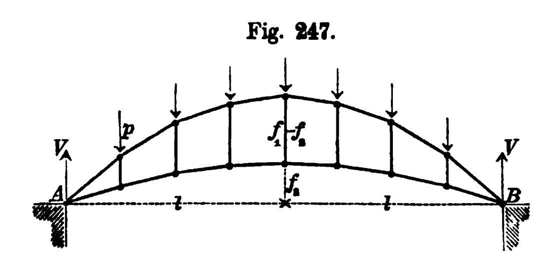


so würde jede derselben als **Hängestange** den Belastungstheil p_1 auf die obere Kette übertragen und die **Zugspannung** p_1 annehmen.)

Setzt man z. B. $p = 6000$ Kil. und $f_1 = f_2 = \frac{1}{2} f$, so wird $p_1 = p_2 = 3000$ Kil. Es erhält also jede der verticalen Stangen eine Druckspannung von 3000 Kil., wenn die Belastungspunkte oben liegen (dagegen eine Zugspannung von 3000 Kil., wenn die Belastungspunkte unten liegen).

Wenn man die Grösse $+f_2$ vertauscht mit der Grösse $-f_2$, so gelten die obigen Gleichungen für den in Fig. 247 dargestellten Fall, bei welchem die convexe Seite der unteren Kette nach oben gewendet ist. Man erhält also für diesen Fall die Gleichungen:

Fig. 247.



$$p_1 + p_2 = p, \qquad f_1 - f_2 = f,$$

$$p_1 = \frac{p}{1 - \frac{f_2}{f_1}} = p \cdot \frac{f_1}{f}, \qquad p_2 = \frac{p}{1 - \frac{f_1}{f_2}} = -p \frac{f_2}{f}.$$

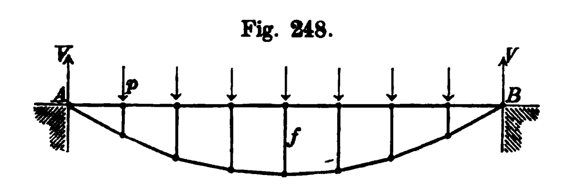
Die Belastungen p_2 der unteren Kette werden in diesem Falle negativ, d. h. dieselben wirken als vertical aufwärts gerichtete Kräfte; und die obere Kette erhält in Folge dessen Belastungen p_1, welche grösser sind als die wirklichen Totalbelastungen p.

Setzt man z. B. $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{3}$ und wieder $p = 6000$ Kil., so wird $p_1 = \frac{6000}{1 - \frac{1}{3}} = 9000$ Kil. und $p_2 = \frac{6000}{1 - 3} = -3000$ Kil. Die Totalbelastung von 6000 Kil.

zerlegt sich in diesem Falle gleichsam in die beiden Theile + 9000 Kil. und — 3000 Kil. Die obere Kette befindet sich in demselben Zustande, wie wenn an jedem Gelenkpunkte derselben ein Gewicht von 9000 Kil. hinge, und auf die untere Kette wirkt an jedem Gelenkpunkte eine vertical aufwärts gerichtete Kraft von 3000 Kil. Diese letzteren Kräfte werden durch die Verticalstangen übertragen, und es findet daher in jeder derselben eine Zugspannung von 3000 Kil. statt.

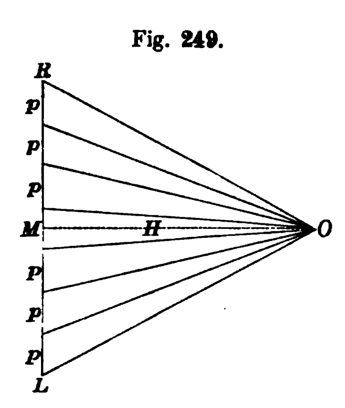
Wenn $f_1 = 0$ und $f_2 = f$ ist (s. Fig. 248), so wird $p_1 = 0$ und $p_2 = p$. In diesem Falle hat die untere Kette die ganze Last zu tragen, und jede Verticalstange erhält eine Druckspannung von der Grösse p. Die Spannung der oberen geradlinigen Kette ist in diesem Falle überall gleich der Horizontal-Spannung $H = \frac{p l^2}{2f}$ der unteren Kette.

Fig. 248.



Die Spannungen in den einzelnen Stangen der unteren Kette kann man (auf dieselbe Weise, wie in Bezug auf Fig. 230 erklärt wurde) mittelst der in Fig. 249 angegebenen Construction bestimmen, welche man auch in umgekehrter Weise zum Auffinden einer Gleichgewichtsform für die untere Kette benutzen kann, indem man eine willkürlich gewählte Grösse $MO = H$ als Horizontal-Spannung annimmt und nachher die einzelnen Theilpunkte der Linie LR mit dem Punkte O durch gerade Linien verbindet, welche ihrer Richtung und Grösse nach die Spannungen in den einzelnen Stangen der unteren Kette darstellen.

Fig. 249.



Setzt man z. B. $f = 1$ und $p = 6000$ Kil., so wird $H = \frac{6000 \cdot 4^2}{2 \cdot 1} = 48\,000$ Kil., und man erhält mittelst der in Fig. 249 angegebenen Construction für die Spannungen in den Stangen der unteren Kette in der Reihenfolge von der Mitte nach den Enden hin die Grössen: 48 100 Kil., 48 900 Kil. 50 300 Kil., 52 500 Kil. Die Stangen der oberen, horizontalen Kette erhalten jede eine Druckspannung von 48 000 Kil.; und die Verticalstangen jede (n Druckspannung von 6000 Kil.

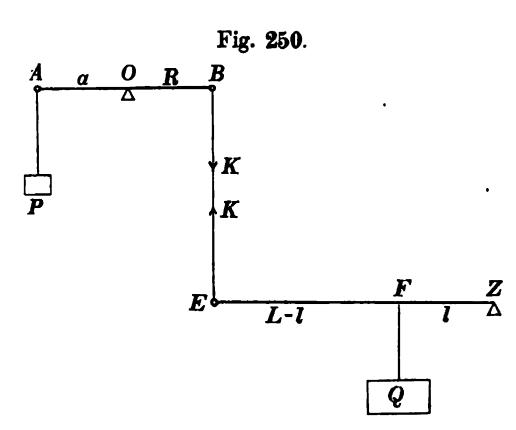
Die Formen Fig. **246**, Fig. **247** und Fig. **248** sind nur in dem Falle wirkliche Gleichgewichtsformen, wenn die Totalbelastung gleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilt ist, d. h. wenn die Belastungen der einzelnen Verticalstangen (bei gleichen Abständen derselben) gleiche Grösse haben. Bei der geringsten Abweichung von dieser Art der Lastvertheilung würde eine Verschiebung der Stangenverbindung eintreten, und müsste man, um eine solche zu verhindern, in jedem der viereckigen Felder noch eine Diagonalstange hinzufügen. Man erhält dann den eigentlichen sogenannten „parabolischen Träger", wie derselbe bei Dach- und Brücken-Constructionen angewendet wird. Die Art und Weise, wie die Spannungen in den einzelnen Stangen eines solchen parabolischen Trägers zu berechnen sind, wird in einem später folgenden Abschnitte noch näher erklärt werden.

§ 64.

Brückenwage.

Die beiden horizontalen (gewichtlos gedachten) Hebel AB und EZ in Fig. **250** sollen in O und Z durch feste Drehpunkte unterstützt sein und sollen ausserdem durch die verticale Stange BE derartig mit einander verbunden sein, dass durch eine Drehung des einen Hebels allemal eine Drehung des andern in entgegengesetzter Richtung bedingt wird.

Fig. **250**.



Um die Bedingungen zu finden, unter denen die beiden angehängten Gewichte P und Q an dieser Hebelverbindung einander im Gleichgewicht halten, denkt man sich die verticale Hängestange BE durchschnitten und an jeder Schnittstelle eine Verticalkraft K angebracht, durch welche die Wirkung des abgeschnittenen Theiles ersetzt wird. Diese Kräfte K stellen die Wirkung und Gegenwirkung dar,

welche die beiden Hebel AB und EZ auf einander wechselseitig übertragen. An dem Hebel AB muss die vertical abwärts wirkende Kraft K dem Gewichte P, und an dem Hebel EZ die vertical aufwärts wirkende Kraft K dem Gewichte Q das Gleichgewicht halten. Als Gleichgewichts-Bedingungen für die beiden einzelnen Hebel erhält man nach Fig. **250** die Gleichungen:

$$KR = Pa \quad \text{und} \quad KL = Ql,$$

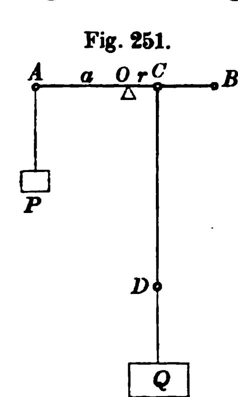
aus denen sich nach Elimination der Grösse K die dritte Gleichung ergiebt:

$$209) \quad Q\frac{l}{L}R = Pa.$$

Mit Hülfe dieser letzteren Gleichung lässt sich die Lage des Punktes F bestimmen, an welchem das Gewicht Q aufgehängt werden muss, um dem Gewichte P das Gleichgewicht zu halten.

Das in dem Punkte F aufgehängte Gewicht Q wirkt bei der in Fig. **250** dargestellten Anordnung mittelbar auf den Hebel AB, insofern erst durch Vermittelung des Hebels EZ und der Verticalstange BE die Wirkung desselben auf jenen Hebel übertragen wird. Es giebt in derselben Hebelverbindung noch einen zweiten Punkt, an welchem aufgehängt dasselbe Gewicht Q ebenfalls dem Gewichte P das Gleichgewicht hält. Anstatt das Gewicht Q mittelbar auf den oberen Hebel wirken zu lassen, kann man nämlich dieses Gewicht auch unmittelbar an diesem Hebel aufhängen. Sobald nur der Aufhängepunkt C (Fig. **251**) so gewählt wird, dass die Bedingungsgleichung:

Fig. 251.



$$210) \quad Qr = Pa$$

erfüllt ist, wird der Hebel AB ebenfalls im Gleichgewichtszustande sich befinden.

Aus der Vergleichung der beiden Gleichungen 209) und 210) ergiebt sich folgendes Resultat: Wenn die Länge r des Hebelarms OC gleich $\frac{l}{L}R$ genommen wird, wenn also die Bedingungsgleichung:

$$211) \quad \frac{r}{R} = \frac{l}{L}$$

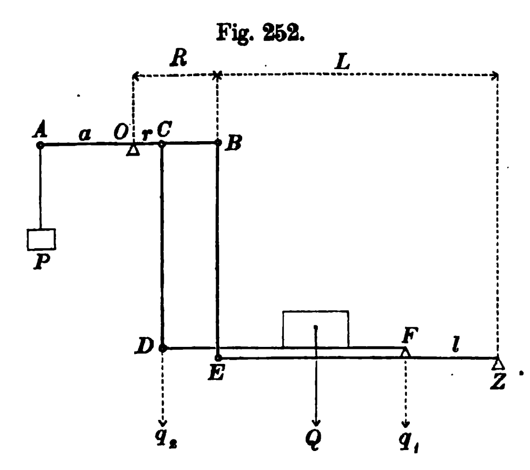
erfüllt ist, so stimmt die in Fig. **251** dargestellte directe Wir-

kung des Gewichtes Q auf den Hebel AB mit der in Fig. 250 dargestellten indirecten Wirkung genau überein.

Was von dem ganzen Gewicht Q gilt, das gilt auch von einem beliebigen Theile desselben. Wenn man also das Gewicht Q z. B. in zwei Theile q_1 und q_2 zerlegte und den einen Theil q_1 wie in Fig. 250 indirect, den anderen wie in Fig. 251 direct auf den Hebel AB wirken liesse, so würde die Wirkung genau dieselbe sein, wie wenn der erstere Theil q_1 ebenfalls an dem Punkte C hinge, also wie wenn das ganze Gewicht $q_1 + q_2 = Q$ an dem Punkte C direct aufgehängt wäre.

Eine solche Zerlegung des Gewichtes Q in zwei vertical abwärts wirkende Seitenkräfte findet in der That statt, wenn dieses Gewicht auf einen horizontalen Balken DF (Fig. 252) gelegt wird, und diesem Balken als Stützpunkte einerseits der untere Endpunkt einer in dem Punkte C aufgehängten verticalen Hängestange CD, andererseits der Punkt F des Hebels EZ gegeben werden. Wo auch immer die Last Q liegen möge auf dem Balken DF — die beiden Drücke q_1 und q_2, welche durch dasselbe auf die Stützpunkte D und E übertragen werden, wirken genau auf dieselbe Weise, wie wenn die ganze Last $Q = q_1 + q_2$ auf die in Fig. 251 dargestellte Weise direct an dem Hebel AB aufgehängt wäre.

Fig. 252.



Vorausgesetzt also, dass die Bedingungsgleichung 211) erfüllt ist, gilt für die in Fig. 252 dargestellte Hebelverbindung dieselbe Gleichung 210), welche für den einfachen Hebel AOC in Bezug auf Fig. 251 gefunden wurde, und kann demnach eine solche Hebelverbindung gerade so wie der einfache Hebel benutzt werden, um mittelst des bekannten Gewichtes P das unbekannte Gewicht Q zu bestimmen, sobald das Verhältniss der Hebelarme a und r bekannt ist.

Auf diesem Principe beruht die Einrichtung der gewöhnlichen

Brückenwage, und die Gleichung 211) enthält die Regel, nach welcher die Verhältnisse der Hebellängen bei einer solchen Wage gewählt werden müssen, wenn der Gleichgewichtszustand der Wage unabhängig sein soll von der Stelle, an welcher die horizontale Brücke DF ihre Belastung trägt.

§ 65.

Roberval'sche Wage.

Als Bedingung, unter welcher die beiden Gewichte p und q an dem gewichtlosen Hebel AB einander das Gleichgewicht halten, erhält man nach Fig. 253 die Gleichung:

Fig. 253.

$$p\,a \cos \alpha = q\,b \cos \alpha$$

oder, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $\cos \alpha$ auf beiden Seiten fortlässt:

$$212) \quad p\,a = q\,b.$$

Für den zweiten Hebel $A_1 B_1$, welcher hinsichtlich seiner Stellung und Form mit dem vorigen genau übereinstimmt, und dessen fester Drehpunkt O_1 vertical unter dem Drehpunkte O des ersten Hebels liegen soll, erhält man auf gleiche Weise die Bedingungsgleichung:

$$213) \quad p_1 a = q_1 b.$$

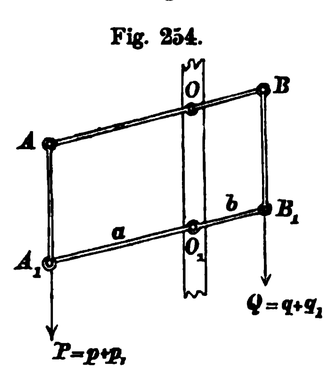


Fig. 254.

Wenn die beiden vertical über einander liegenden Punkte A und A_1 durch eine gewichtlose Verticalstange AA_1, ebenso die beiden vertical über einander liegenden Punkte B und B_1 durch die gewichtlose Verticalstange BB_1 mit einander verbunden werden, so erleiden die Gleichgewichtszustände der beiden Hebel hierdurch keinerlei Störung. Es entsteht auf diese Weise das von zwei festen Punkten O und O_1 unterstützte verschiebbare Parallelogramm ABB_1A_1 (Fig. 254), dessen verticale Stangen AA_1 und BB_1 resp. mit den Gewicht-Summen $p + p_1 = P$ und $q + q_1 = Q$ belastet sind. Ob die oberen oder die unteren Endpunkte der

verticalen Stangen (oder auch beliebige Zwischenpunkte an denselben) als die Aufhängepunkte dieser Belastungen angenommen werden — das ist bei dieser Anordnung gleichgültig, weil (nach § 40) der Einfluss einer Kraft auf den Gleichgewichtszustand eines Körpers nicht geändert wird, wenn der Angriffspunkt dieser Kraft in der Richtungslinie derselben beliebig verschoben wird.

Durch Addition der beiden Gleichungen 212) und 213) erhält man die Gleichung:

$$214)\quad Pa = Qb.$$

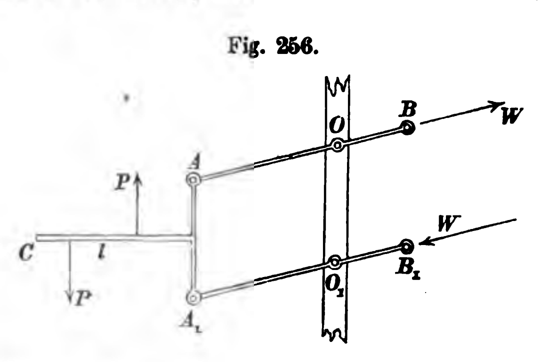
aus welcher sich ergiebt, dass für den Gleichgewichtszustand eines solchen verschiebbaren Parallelogramms oder Doppelhebels genau dieselbe Bedingung gilt, wie für den einfachen Hebel AB in Fig. 253.

Nach § 42 halten zwei auf einen festen Körper wirkende Kräftepaare einander im Gleichgewicht, wenn ihre Drehungsrichtungen entgegengesetzt und ihre Momente gleich gross sind. Es kann also z. B. an dem Körper ACA_1 (Fig. 255) einem gegebenen Kräftepaare P, P das Gleichgewicht gehalten werden durch das entgegengesetzt drehende Kräftepaar W, W, dessen Moment $W\varrho$ gleich dem gegebenen Momente Pl sein soll.

Fig. 255.

Der Gleichgewichtszustand dieses Körpers wird auch dann noch fortdauern, wenn die beiden Kräfte W, W — anstatt direct auf den Körper zu wirken — durch Vermittelung von geradlinigen und gewichtlosen Stangen, welche mit deren Richtungslinien zusammenfallen, ihre Wirkung auf den Körper übertragen, und es können beliebige Punkte dieser Stangen als Angriffspunkte für jene Kräfte gewählt werden (Fig. 256). Wenn hinterher alsdann zwei beliebige Punkte

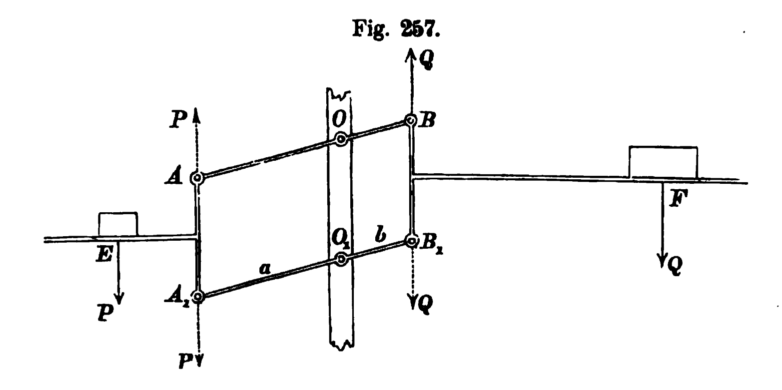
Fig. 256.



dieser Stangen, z. B. die Punkte O und O_1, in feste Punkte verwandelt werden, so kann der einmal bestehende Gleichgewichts-Zustand der Stangenverbindung hierdurch nicht gestört werden. In diesem Falle können die beiden Kräfte W, W auch fortgelassen werden, insofern die Widerstände der beiden festen Punkte dann an ihre Stelle treten und ein Kräftepaar bilden, durch welches unter allen Umständen das gegebene Kräftepaar P, P aufgehoben wird.

Die Gleichgewichts-Bedingungen für die in Fig. 257 dargestellte Hebelverbindung lassen sich nunmehr auf folgende Weise

Fig. 257.



ableiten. Wenn man in den Punkten A und A_1 bie beiden entgegengesetzten Kräfte P, P hinzufügt, so wird dadurch der Gleichgewichtszustand nicht gestört. Von den drei jetzt vorhandenen Kräften P bilden die zwei resp. in E und A angreifenden Kräfte ein Kräftepaar, welches (nach dem eben bewiesenen Satze) durch die festen Drehpunkte O und O_1 aufgehoben wird, also auch fortgelassen werden kann, ohne dass der Gleichgewichtszustand dadurch gestört würde. Die noch übrig bleibende dritte Kraft P wirkt in dem Punkte A_1, und diese Kraft stellt demnach den Einfluss dar, welchen die Belastung des Punktes E auf den Gleichgewichtszustand der ganzen Hebelverbindung ausübt.

In gleicher Weise kann auf der anderen Seite in Bezug auf die Belastung Q verfahren werden. Die beiden in F und B angreifenden Kräfte Q bilden ein Kräftepaar, welches durch die festen Drehpunkte O und O_1 aufgehoben wird, und die in dem Punkte B_1 angreifende Kraft Q stellt den Einfluss dar, welchen die Belastung des Punktes F auf den Gleichgewichtszustand des Ganzen ausübt.

Die beiden in E und F angebrachten Belastungen wirken daher gerade so, wie wenn dieselben unmittelbar resp. an den Punkten A_1 und B_1 aufgehängt wären, und dieselbe Gleichung 214):

$$Pa = Qb,$$

welche in Bezug auf Fig. 254 gefunden wurde, stellt auch in Bezug auf Fig. 257 die Gleichgewichts-Bedingung dar. Die ganze Hebelverbindung verhält sich hinsichtlich ihrer Gleichgewichtslage wie der einfache an seinen Endpunkten belastete Hebel AB in Fig. 253 und kann wie dieser zum Messen von Gewichten benutzt werden. Die Lage der beiden Stellen E und F, in welchen die horizontalen Ansätze der verticalen Stangen belastet werden — eine Verschiebung der Belastungen auf ihren horizontalen Unterlagen — hat keinen Einfluss auf den Gleichgewichtszustand; es ist vielmehr lediglich das Verhältniss der beiden Hebellängen a und b, durch welches das zum Gleichgewichtszustande erforderliche Verhältniss der beiden Belastungen P und Q bedingt wird.

DREIZEHNTES CAPITEL.

Reibungswiderstände.

§ 66.

Reibungscoefficienten.

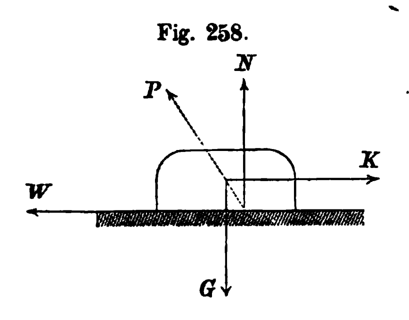
Wenn man einem auf horizontaler Unterlage ruhenden Körper eine fortschreitende Bewegung längs der horizontalen Unterstützungs-Ebene ertheilt und den Körper alsdann sich selbst — d. h. ausschliesslich der Wirkung seines Gewichtes und des von der Unterlage geleisteten Gegendrucks — überlässt, so findet man unter allen Umständen, dass die Geschwindigkeit der Bewegung allmählich abnimmt, und dass nach einiger Zeit der Körper zum Stillstande gelangt.

Um die Geschwindigkeit der Bewegung unverändert zu erhalten, dazu bedarf es einer Kraft, welche in der Richtung der Bewegung wirkend fortwährend die verlorene Geschwindigkeit wieder ersetzt.

Es muss hieraus geschlossen werden, dass die von Seiten der Unterlage auf den Körper übertragene Kraft P in diesem Falle nicht vertical aufwärts gerichtet ist, sondern ausser ihrer verti-

calen Seitenkraft N auch eine horizontale längs der Berührungsfläche wirkende Seitenkraft W enthält, welche der Bewegungsrichtung allemal entgegenwirkt (Fig. 258). Man kann die Grösse dieses Widerstandes bestimmen, indem man durch Versuche die Grösse der horizontalen Zugkraft K ermittelt, welche erforderlich ist, um den Körper gleichförmig längs der Unterlage fortzubewegen. Da bei gleichförmiger Bewegung sämmtliche auf den Körper wirkende Kräfte einander im Gleichgewicht halten müssen, so ist alsdann der normal zur Berührungsfläche wirkende Gegendruck N gleich dem Gewicht G des Körpers, und die horizontale Zugkraft K jenem Widerstande W selbst gleich.

Fig. 258.



Man findet, dass die erforderliche Zugkraft — also auch jener Widerstand — um so kleiner ausfällt, je sorgfältiger die Oberflächen der Körper an den Berührungsstellen geglättet sind. Man nimmt deshalb an, dass jener Widerstand in den auch bei sorgfältiger Glättung der Oberflächen nie ganz zu beseitigenden kleinen Unebenheiten der Oberflächen seine Ursache hat, und nennt denselben — wie in § 30 bereits erklärt wurde — den **Reibungswiderstand**.

Nicht nur bei einem auf horizontaler Unterlage fortgleitenden Körper, sondern überhaupt in allen Fällen, wo zwei einander berührende Körper längs einander gleiten, ist der zwischen den beiden Körpern wirkende normal zur Berührungsebene gerichtete Druck N begleitet von einem längs der Berührungsebene wirkenden Reibungswiderstande W, welcher an jedem der beiden Körper der Richtung des Gleitens entgegenwirkt. Die Erfahrung lehrt, dass bei zwei bestimmten Körpern mit thunlichst geglätteten Oberflächen die Grösse des Reibungswiderstandes wesentlich bedingt wird durch die Grösse des Normaldruckes zwischen den beiden Körpern. Aus diesem Grunde pflegt man die Grösse des Reibungswiderstandes in Procenten des Normaldruckes anzugeben, und hat für das Verhältniss $\left(\frac{W}{N} = f\right)$ des Reibungswiderstandes zum Normaldruck einen besonderen Namen gewählt;

man nennt dasselbe den Reibungscoefficienten der beiden Körper:

$$\frac{\text{Reibungswiderstand}}{\text{Normaldruck}} = \text{Reibungscoefficient.}$$

Kennt man für einen bestimmten Fall die Grösse des Reibungscoefficienten f, so kann man aus der Grösse des Normaldruckes den Reibungswiderstand selbst berechnen mittelst der Gleichung:

Reibungswiderstand=Reibungscoefficient×Normaldruck,

oder: 215) $W = f \,.\, N$.

Bei einem 280 Kil. schweren Schlitten, welcher längs horizontaler glatter Eisfläche durch eine horizontale Zugkraft gleichförmig fortbewegt wird, ist der an der Berührungsfläche zwischen dem Schlitten und der Eisbahn stattfindende Normaldruck N gleich dem Gewichte des Schlittens, also gleich 280 Kil. Wenn aus Versuchen bereits bekannt wäre, dass für diesen speciellen Fall der Reibungscoefficient $f = \frac{1}{70}$ ist, so würde man den Reibungswiderstand W berechnen können aus der Gleichung:

$$W = \frac{1}{70} \cdot 280 = 4 \text{ Kil.}$$

Die zum Ueberwinden des Reibungswiderstandes erforderliche Zugkraft beträgt ebenfalls 4 Kil.

Hätte man umgekehrt: ohne die Grösse des Reibungscoefficienten zu kennen, durch directe Messung dieser Zugkraft die Grösse des Reibungswiderstandes ermittelt und gefunden, dass derselbe 4 Kil. beträgt, so würde man hieraus den Reibungscoefficienten berechnen können mittelst der Gleichung:

$$f = \frac{4}{280} = \frac{1}{70}.$$

Gesetze und Versuchsresultate, nach welchen für jeden gegebenen bestimmten Fall die Grösse des Reibungscoefficienten im Voraus genau angegeben werden könnte, sind bislang nicht bekannt. Auch liegt es in der Natur der Verhältnisse, dass dies niemals möglich sein wird. Denn der Reibungscoefficient hängt zum Theil von Ursachen und Umständen ab, welche sich nicht als mathematische Grössen definiren lassen, folglich aller Messung und Berechung sich entziehen. Selbst wenn zu möglichst genauer Ermittelung der Reibungscoefficienten für jeden besonderen Fall besondere Versuche vorher angestellt würden, so würden die auf solche Weise gefundenen Werthe für spätere gleichartige Fälle dennoch nur als Annäherungswerthe gelten können. Aus den bisher zu solchen Zwecken angestellten Versuchen lässt sich nur Folgendes entnehmen:

1) Die Grösse des Reibungscoefficienten hängt wesentlich ab von der Substanz der beiden reibenden Körper, von der Beschaffenheit und dem Zustande der einander berührenden Oberflächen (in gewissem Grade auch von der Temperatur, insofern der Zustand der Berührungsflächen mit der Temperatur sich ändert). Bei festen harten Körpern kann durch Anwendung geeigneter Schmiermittel eine erhebliche Verminderung des Reibungscoefficienten erreicht werden. Je härter und glatter die reibenden Körper, je vollkommener die Schmierung: um so mehr darf der Reibungscoefficient als unabhängig von der Substanz der beiden festen Körper angesehen werden.

2) Auch die Geschwindigkeit des Gleitens hat einen gewissen Einfluss auf die Grösse des Reibungscoefficienten. Mit abnehmender Geschwindigkeit nimmt der Reibungscoefficient zu, und bei der Geschwindigkeit Null erreicht derselbe seinen grössten Werth; d. h. der Reibungscoefficient beim Uebergange aus Ruhe in Bewegung ist grösser als der Reibungscoefficient der Bewegung, und bei sehr langsamem Gleiten ist der Reibungscoefficient grösser als bei sehr raschem Gleiten.

3) Der Reibungscoefficient hängt ausserdem ab von der Art und Weise, in welcher der Druck auf die Berührungsfläche sich vertheilt, von der Grösse des auf die Flächeneinheit der Berührungsfläche wirkenden Druckes. Bei sehr kleinem und ebenso auch bei sehr grossem Drucke auf die Flächeneinheit der Berührungsfläche ist der Reibungscoefficient grösser als bei mittlerem Drucke, und man darf annehmen, dass es für je zwei bestimmte Körper eine bestimmte Grösse dieses Druckes giebt, bei welcher der Reibungscoefficient unter sonst gleichbleibenden Umständen seinen kleinsten Werth erreicht.

4) Während der Reibung werden beständig kleine Theilchen von den Oberflächen der reibenden Körper losgerissen. In Folge dessen ist der Zustand der Reibungsflächen, die Vertheilung des Druckes, die Temperatur — im Allgemeinen also auch die Grösse der Reibungscoefficienten in beständiger Aenderung begriffen.

Da also einestheils die Art und Weise, in welcher die verschiedenen Umstände ihren Einfluss geltend machen, unbekannt und überhaupt nicht genau bestimmbar ist; da anderntheils während der Reibung diese Umstände selbst sich ändern: so kann von unveränderlich gültigen, überhaupt von einigermassen genau festzustellenden Werthen der Reibungscoefficienten für je zwei

bestimmte Körperarten überall nicht die Rede sein — vielmehr immer nur von Mittelwerthen, welche als rohe Annäherungen an die wirklichen Werthe zu betrachten sind, oder von Grenzwerthen, zwischen welchen unter gewöhnlichen Verhältnissen die Werthe der Reibungscoefficienten variiren.

Da bei zunehmender Rauhigkeit der Reibungsflächen der Widerstand, welchen die gleich Zähnen in einander greifenden Unebenheiten der Oberflächen dem Gleiten entgegensetzen, sich derartig vergrössert, dass dadurch ein Wachsen des Reibungscoefficienten über alle Grenzen hinaus bedingt wird: so kann natürlich mit dem oberen Grenzwerthe nur derjenige Werth gemeint sein, bis zu welchem auch unter gewöhnlichen Umständen, d. h. bei möglichst glatt bearbeiteten Oberflächen, durch zufälliges Zusammenwirken sonstiger die Reibung verstärkender Ursachen, der Reibungscoefficient mitunter gesteigert wird; und kann überhaupt die Angabe der oberen Grenzwerthe nur den Zweck haben, für die Auswahl passender Mittelwerthe Anhaltspunkte zu bieten.

Bei sehr kleinem (ebenso auch bei sehr grossem) Drucke und bei sehr kleiner Geschwindigkeit (insbesondere bei der Geschwindigkeit Null) wird im Allgemeinen das Maximum — bei mittlerem Drucke und grosser Geschwindigkeit dagegen wird das Minimum als derjenige Grenzwerth anzusehen sein, welchem der wirkliche Werth des Reibungscoefficienten für den betreffenden Fall am nächsten liegt.

Grenzwerthe der Reibungscoefficienten für Körper mit glatt bearbeiteten Berührungsflächen.

A. Ohne Anwendung von Schmiermitteln.

			Minimum*)	Maximum
Metall	auf	Metall	0,10	0,30
Metall	„	Holz	0,10	0,60
Holz	„	Holz	0,10	0,70
Leder	„	Metall	0,25	0,60
Leder	„	Holz	0,25	0,70
Hanf	„	Holz	0,40	0,80
Metall	„	Stein	0,25	0,50
Holz	„	Stein	0,30	0,65
Stein	„	Stein	0,40	0,75
Ziegelstein	„	Stein	0,60	0,75
Eis	„	Eis	0,018	0,028
Stahl	„	Eis	0,014	0,027

*) Die bisher bekannt gewordenen Reibungsversuche sind zum grossen Theile noch so ungenügend, dass nicht einmal die unteren Grenzwerthe der

B. Bei Anwendung von geeigneten Schmiermitteln.

			Minimum	Maximum
Metall	auf	Metall*)	0,009	0,10
Metall	„	Holz**)	0,02	0,10
Holz	„	Holz***)	0,033	0,10
Leder	„	Metall	0,12	0,25

Reibungscoefficienten mit einiger Sicherheit sich feststellen lassen. Bei vielen der bisher angestellten Versuche waren sowohl Druck als Geschwindigkeit verhältnissmässig klein; und die Versuche waren auch meistens gar nicht auf das bestimmte Ziel gerichtet: die kleinsten erreichbaren Werthe der Reibungscoefficienten zu ermitteln. Es ist deshalb anzunehmen, dass bei weiterer Ausdehnung der Reibungsversuche hier und da noch kleinere Werthe sich ergeben werden. (Eine vollständige Zusammenstellung der älteren Versuchsresultate von Coulomb, Rennie, Morin u. A. findet man in einer Abhandlung „über die Reibung" von Brix in den „Verhandlungen des Vereins zur Beförd. des Gewerbfl. in Preussen, Jahrg. 1837". Bei vollständiger Berücksichtigung aller dieser Versuchsresultate würden für die unteren Grenzwerthe zum Theil noch kleinere Zahlen als die in obiger Tabelle angegebenen zu substituiren sein.)

*) Nach zahlreichen „Versuchen über Zapfenreibung an Eisenbahnwagen-Achsen, angestellt in der Eisenbahnwerkstätte zu Hannover in den Jahren 1861 und 1862 vom Maschinendirector Kirchweger" (Mittheilungen des Gewerbevereins für das Königreich Hannover, Jahrg. 1862), variirt der Reibungscoefficient für schmiedeeiserne oder gussstählerne Zapfen in Lagern von Hartblei oder von Zinncomposition, geschmiert mit Rüböl oder mit Cohäsionsöl, zwischen den Grenzen 0,0090 und 0,0099, wenn die Geschwindigkeit des Gleitens (Umfangsgeschwindigkeit der Zapfen) pro Secunde 2 Zoll bis 4,5 Fuss und der Druck auf den Quadratzoll 200 ℔. bis 1400 ℔. beträgt. Der Reibungscoefficient für den Uebergang aus Ruhe in Bewegung dagegen ist unter gleichen Umständen nahezu 10-mal so gross als während der Bewegung.

**) Nach Versuchen von Bochet ist der Reibungscoefficient der Bewegung für Holz auf Schmiedeisen (polirt und mit Fett geschmiert) 0,02, wenn der Druck auf den Quadratcentimeter mindestens 10 Kil. beträgt, dagegen 0,06, wenn dieser Druck 5 Kil. und weniger beträgt. Der Einfluss der Geschwindigkeit auf die Grösse des Reibungscoefficienten soll nach Bochet's Angaben annäherungsweise sich darstellen lassen durch die empirische Formel: $f = \frac{f_0 - f_1}{1 + 0{,}3\,v} + f_1$, worin v die Geschwindigkeit in Metern pro Secunde, f_0 den Reibungscoefficienten für die Geschwindigkeit Null, und f_1 den Grenzwerth bezeichnet, welchem f sich nähert, wenn die Geschwindigkeit v unendlich gross wird. Die Grössen f_0 und f_1 hängen ab von der Beschaffenheit der reibenden Flächen, ausserdem aber auch von der Grösse des Druckes. (Annales des mines, Jahrg. 1861.)

***) Nach dem Berichte einer Commission des Franklin-Instituts über Reibungsversuche mit vom Stapel laufenden amerikanischen Kriegsschiffen ist 0,033 der mittlere Werth des Reibungscoefficienten der Bewegung für Holz auf Holz, geschmiert mit Talg, bei einem Drucke von 20 ℔. bis 50 ℔. pro Quadratzoll. (Civil engineer and architects journal, Jahrg. 1859, S. 11.)

§ 67.

Reibungswinkel.

Die bei dem Gleiten eines Körpers auf unbeweglicher Unterstützungsfläche auftretenden Reibungswiderstände gehören zur Gattung der Widerstandskräfte, d. h. zur Gattung derjenigen Kräfte, welche nur Bewegungen verhindern und verzögern — nie aber Bewegungen hervorbringen können.

Der Reibungswiderstand wirkt stets derjenigen Richtung entgegen, in welcher der Körper entweder wirklich gleitet, oder ohne das Vorhandensein des Reibungswiderstandes gleiten würde. Findet das Gleiten wirklich Statt, so ist der Reibungswiderstand immer gleich dem Producte: „Reibungscoefficient mal Normaldruck“, hat also den in Gleichung 215) angegebenen bestimmten Zahlenwerth:

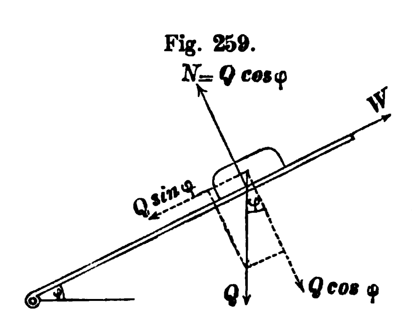
$$W = fN.$$

Wenn dagegen das Gleiten noch nicht begonnen hat, und ein Theil der Kraft fN schon ausreicht, um das Eintreten des Gleitens zu verhindern, so gelangt eben nur dieser Theil zur wirklichen Thätigkeit; der Reibungswiderstand W ist also in diesem Falle kleiner als das Product fN. Streng genommen ist daher dieses Product fN nur als oberer Grenzwerth für die Kraft W zu betrachten und gilt für die wirkliche Grösse des Reibungswiderstandes die Bedingung:

$$W \leqq fN.$$

Wenn die feste Unterstützungsebene eines ruhenden Körpers um irgend einen Winkel φ gegen die Horizontale geneigt ist, so würde ohne das Vorhandensein des Reibungswiderstandes der Körper in Bewegung gerathen; denn von den beiden Seitenkräften $Q \sin\varphi$ und $Q \cos\varphi$, in welche das Gewicht des Körpers zerlegt werden kann, würde nur die letztere durch den von der Unterlage geleisteten Gegendruck $N = Q \cos\varphi$ aufgehoben werden (Fig. 259). Die andere Seitenkraft $Q \sin\varphi$ würde für sich allein ein Hinabgleiten des Körpers bewirken. Diesem

Fig. 259.



Hinabgleiten wirkt der Reibungswiderstand W entgegen. Die wirkliche Grösse der Kraft W wird in gewissem Grade durch die Grösse des Neigungswinkels φ bedingt, und sind in dieser Beziehung zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Wenn der Neigungswinkel φ sehr gross ist, und in Folge dessen $Q \sin \varphi$ grösser ist, als das Product fN (gleich $fQ \cos \varphi$), so tritt das Gleiten wirklich ein und in diesem Falle ist immer:

$$W = fQ \cos \varphi.$$

Wenn dagegen der Neigungswinkel φ sehr klein ist, und in Folge dessen $Q \sin \varphi$ kleiner ist als $fQ \cos \varphi$, so reicht ein Theil jener Kraft schon aus, um das Gleiten zu verhindern, und der Rest bleibt unthätig. Der zur Wirkung gelangende Reibungswiderstand hat also in diesem Falle nur die Grösse:

$$W = Q \sin \varphi.$$

Den Grenzfall zwischen diesen beiden Fällen bildet derjenige Fall, in welchem der Neigungswinkel gerade diejenige Grösse hat, bei welcher:

$$216) \quad Q \sin \varphi = fQ \cos \varphi, \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tg} \varphi = f \text{ ist.}$$

Der aus dieser Gleichung zu berechnende Winkel φ ist der grösste von allen denjenigen Neigungswinkeln, bei welchen der Reibungswiderstand noch ausreicht, das Gleiten zu verhindern. Dieser Winkel wird der Reibungswinkel genannt. Nach Gleichung 216) ist also der Reibungswinkel derjenige Winkel, dessen Tangente gleich dem Reibungscoefficienten ist.

Es ergiebt sich hieraus eine einfache Methode, die Grösse der Reibungscoefficienten durch Versuche zu bestimmen. Wenn man den Neigungswinkel der Unterlage eines ruhenden Körpers allmählich wachsen lässt so lange bis der Körper anfängt zu gleiten, so ist die Tangente des auf diese Weise gefundenen Winkels der „Reibungscoefficient der Ruhe". Um den „Reibungscoefficienten der Bewegung" zu bestimmen, würde man dem Körper von vornherein eine abwärtsgleitende Bewegung ertheilen und darauf achten: ob die Fortsetzung dieser Bewegung eine verzögerte oder eine beschleunigte ist. Im ersteren Falle würde der Neigungswinkel zu vergrössern, im letzteren zu verkleinern sein. Die Tangente desjenigen Neigungswinkels, bei welchem die gleitende Bewegung gleichförmig ist*), würde der Reibungscoefficient

*) Die gleichförmig fortschreitende Bewegung, welche der Körper in diesem Falle ausführt, setzt Gleichgewicht der wirkenden Kräfte voraus. Das Gewicht Q

für die Bewegung sein, und zwar derjenige specielle Werth dieses Coefficienten, welcher der gewählten Geschwindigkeit entspricht.

Nach der Tabelle des vorigen Paragraphen wäre z. B. als Reibungswinkel für Ziegelstein auf Stein ein Winkel anzunehmen, dessen Tangente zwischen 0,60 und 0,75 liegt, also $\varphi = 31^0$ bis 37^0. Für Stahl auf Eis liegt der Reibungswinkel zwischen den Grenzen $0^0\ 48'$ und $1^0\ 33'$, für Holz auf Holz zwischen den Grenzen $5^0\ 45'$ und 35^0, für Metall auf Metall zwischen den Grenzen $5^0\ 45'$ und $16^0\ 45'$. Der Reibungscoefficient für Holz auf Holz mit Talg beschmiert beträgt bei Schiffen, welche vom Stapel laufen, etwa 0,033, und ist der zugehörige Reibungswinkel $\varphi = 1^0\ 55'$. Wenn also nach dem Wegnehmen der Befestigungskeile das Gleiten des Schiffes von selbst eintreten soll, so muss die Neigung der Gleitbahn mehr als $1^0\ 55'$ betragen, und gilt deshalb ein Winkel von 4^0 für eine passende Grösse dieses Neigungswinkels.

Für die Grösse, welche eine unter dem Winkel α gegen die Verticale geneigte Zugkraft K haben muss, um einen Körper vom Gewichte Q auf horizontaler Unterlage gleichförmig fortzubewegen, erhält man nach Fig. 260 die Gleichung:

$$K \sin \alpha = f(Q + K \cos \alpha),$$

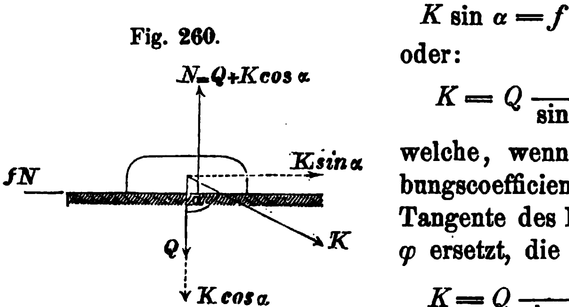
oder:

$$K = Q \frac{f}{\sin \alpha - f \cos \alpha},$$

welche, wenn man den Reibungscoefficienten f durch die Tangente des Reibungswinkels φ ersetzt, die Form annimmt:

$$K = Q \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha}$$

Fig. 260.



oder, wenn man auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit $\cos \varphi$ multiplicirt:

---

kann aber nur dann durch die Mittelkraft der beiden Kräfte N und W aufgehoben werden, wenn der Angriffspunkt der beiden letzteren mit dem Schwerpunkte des Körpers in einer und derselben Verticalen liegt (s. Fig. 259). Läge der Schwerpunkt so hoch, oder wäre die Berührungsfläche so klein, dass die nach unten verlängerte Verticale des Schwerpunktes die Unterstützungsebene in einem ausserhalb der Berührungsfläche liegenden Punkte träfe, so würde ausser dem Gleiten auch eine Drehung des Körpers eintreten. In Bezug auf Fig. 259, sowie in Bezug auf die folgenden Fälle, ist deshalb vorauszusetzen, dass der Schwerpunkt des Körpers so tief liegt, oder die Berührungsfläche so gross ist, wie es die Bedingung der Stabilität gegen Umkippen erfordert. (Vergl. § 55.) Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so bewegt sich der Körper, wie wenn der Schwerpunkt desselben der Angriffspunkt sämmtlicher Kräfte wäre, und kann daher die Bewegung wie die eines einfachen materiellen Punktes beurtheilt werden.

$$217)\quad K = \frac{Q \sin \varphi}{\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi} = \frac{Q \sin \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)}.$$

Wenn $\alpha = \varphi$ wird, so wird $K = \infty$, d. h. die gleichförmige Fortbewegung ist nur dann überhaupt möglich, wenn der Winkel α grösser ist als der Reibungswinkel. Für $\alpha = 90^0$ wird $K = Q \operatorname{tg} \varphi$, für $\alpha = 90^0 + \varphi$ wird $K = Q \sin \varphi$ und für $\alpha = 90^0 + 2\varphi$ wird wiederum $K = Q \operatorname{tg} \varphi$. Die erforderliche Zugkraft wird also am kleinsten, wenn ihre Richtungslinie von der Horizontalen nach oben hin um den Reibungswinkel abweicht.

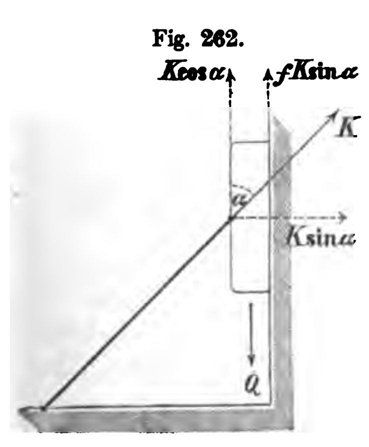
Fig. 261.

Wenn ein Körper durch eine Horizontalkraft K gegen eine verticale Wand gedrückt wird, so entsteht ein Reibungswiderstand, welcher dem Hinabgleiten des Körpers entgegenwirkt (Fig. 261). Soll das Gewicht des Körpers durch den Reibungswiderstand aufgehoben werden, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$fK \geqq Q, \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tg} \varphi \geqq \frac{Q}{K}.$$

Der Reibungswinkel bildet demnach die Grenze desjenigen Winkels, um welchen die Mittelkraft R der beiden Kräfte K und Q höchstens abweichen darf von der Normalen zur Wandfläche, wenn dieselbe durch die totale Gegenwirkung der Wand noch aufgehoben werden soll; zugleich also die Grenze desjenigen Winkels, um welchen dieser Totalwiderstand T von der Normalen der Wandfläche überhaupt abweichen kann.

Fig. 262.



Wenn durch eine unter dem Winkel α gegen die Verticale geneigte Stütze das Hinabgleiten eines Körpers vom Gewichte Q längs der verticalen Wandfläche verhindert wird, so ist die von der Stütze auf den Körper übertragene Druckkraft nach Fig. 262 zu berechnen aus der Gleichung:

$$K \cos \alpha + f K \sin \alpha = Q,$$

welcher man nach Substitution des Werthes: $f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ auch die folgende Form geben kann:

$$K = \frac{Q \cos \varphi}{\cos (\alpha - \varphi)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Kraft K, welche in entgegengesetzter Richtung genommen den auf die stützende Stange übertragenen Druck bildet, ihren kleinsten Werth: $Q \cos \varphi$ annimmt, wenn der Winkel α gleich dem Reibungswinkel φ ist.

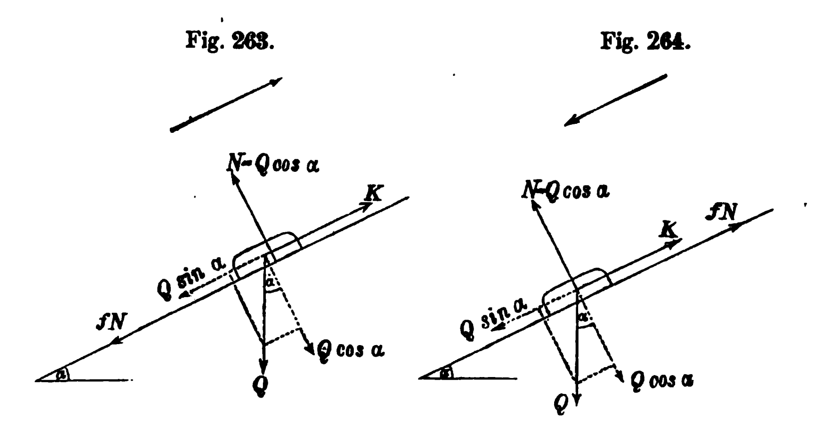
§ 68.

Schiefe Ebene.

Um die Gleichgewichts-Bedingungen für einen auf schräg ansteigender Bahn aufwärts oder abwärts gleitenden Körper zu finden, zerlegt man jede der auf den Körper wirkenden Kräfte in zwei Seitenkräfte, von denen die eine rechtwinkelig, die andere parallel zur Bahn gerichtet ist, und setzt dann die Summe der bergan wirkenden Seitenkräfte gleich der Summe der bergab wirkenden Seitenkräfte. (Vorausgesetzt wird, dass nur Kräfte in der Vertical-Ebene der Bahn vorkommen.)

Eine bergan wirkende Zugkraft K, welche die Last Q **gleichförmig** aufwärts bewegen soll, hat dabei den Reibungswiderstand fN und die bergab wirkende Seitenkraft des Gewichtes als

Fig. 263. Fig. 264.



Widerstände zu überwinden. Man erhält also nach Fig. 263 die Gleichung:

$$218) \quad K = Q \sin \alpha + f Q \cos \alpha.$$

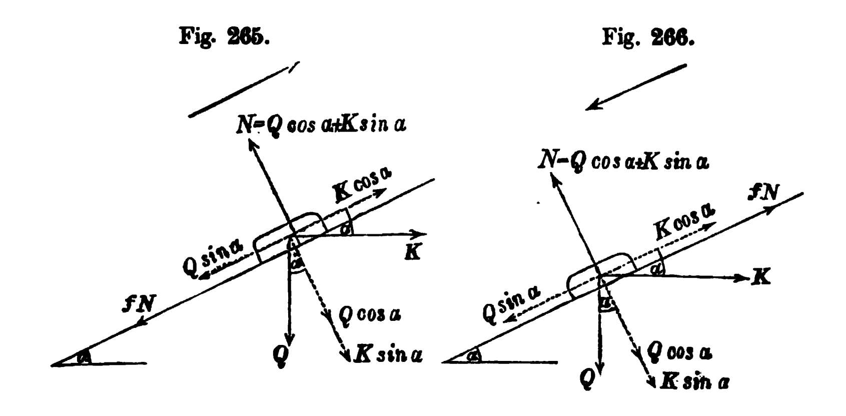
Wenn dagegen der Körper im Hinabgleiten begriffen ist, und die Kraft K nur verhindern soll, dass die Geschwindigkeit dieses Hinabgleitens sich ändere, so ist der Reibungswiderstand als eine bergan wirkende Kraft in Rechnung zu bringen, und man erhält für diesen Fall nach Fig. 264 die Gleichung:

$$219)\quad K = Q \sin \alpha - f Q \cos \alpha.$$

Die Bedingung der gleichförmigen Bewegung lässt sich in einer für beide Fälle gemeinschaftlich geltenden Form darstellen durch die Gleichung:

$$220)\quad K = Q (\sin \alpha \pm f \cos \alpha),$$

in welcher das Plus-Zeichen auf den in Fig. 263, das Minus-Zeichen auf den in Fig. 264 dargestellten Fall sich bezieht. Diese Gleichung giebt zugleich die Grenzwerthe an, zwischen welchen die Grösse der Kraft K liegen muss, wenn unter ihrer Einwirkung der vorher im Ruhezustande befindliche Körper nicht nach der einen oder anderen Richtung hin in Bewegung gerathen soll.



Auf ähnliche Weise erhält man für eine horizontal wirkende Zugkraft K, welche die Last Q gleichförmig bergan ziehen soll, nach Fig. 265 die Gleichung:

$$K \cos \alpha = Q \sin \alpha + f (Q \cos \alpha + K \sin \alpha), \quad \text{oder:}$$

$$221)\quad K = Q \left(\frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}\right),$$

und für eine Horizontalkraft K, welche beim Hinabgleiten des

Körpers eine Aenderung der Geschwindigkeit verhindern soll, nach Fig. 266 die Gleichung:

$$K \cos \alpha + f(Q \cos \alpha + K \sin \alpha) = Q \sin \alpha, \text{ oder:}$$

$$222) \quad K = Q \left(\frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \right).$$

Für die beiden letzteren Fälle gemeinschaftlich gilt die Gleichung:

$$223) \quad K = Q \left(\frac{\sin \alpha \pm f \cos \alpha}{\cos \alpha \mp f \sin \alpha} \right),$$

in welcher die oberen Vorzeichen auf den in Fig. 265, die unteren auf den in Fig. 266 dargestellten Fall sich beziehen.

Diese Gleichung nimmt, wenn auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch $\cos \alpha$ dividirt werden, die Form an:

$$224) \quad K = Q \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha \pm f}{1 \mp f \operatorname{tg} \alpha} \right),$$

oder, wenn man darin den Reibungscoefficienten f durch den Reibungswinkel φ ausdrückt, also $f = \operatorname{tg} \varphi$ substituirt, die Form:

$$225) \quad K = Q \operatorname{tg} (\alpha \pm \varphi).$$

Diese Gleichung zeigt in Bezug auf den in Fig. 265 dargestellten Fall, dass $K = \infty$ wird, wenn $\alpha + \varphi = 90^0$ oder $\alpha = 90^0 - \varphi$ wird. Wenn also der Neigungswinkel der Bahn den Reibungswinkel zu 90^0 ergänzt (oder noch grösser ist als die Ergänzung desselben zu 90^0), so ist es unmöglich, den Körper mittelst einer horizontal wirkenden Zugkraft gleichförmig bergan zu ziehen.

Wenn z. B. der Reibungscoefficient für einen Holzblock auf hölzerner Unterlage 0,4 beträgt, so ist der Reibungswinkel ungefähr 22^0. Die Unterlage darf also höchstens um einen Winkel von $90^0 - 22^0 = 68^0$ gegen die Horizontale geneigt sein, wenn es überhaupt noch möglich sein soll, mittelst horizontaler Zugkraft den Block bergan zu ziehen.

Für die in Fig. 267 und Fig. 268 dargestellten Fälle, in welchen die Richtungslinie der Kraft K den Winkel β mit der Bahnrichtung einschliesst, erhält man auf ähnliche Weise die allgemeine Bedingungsgleichung:

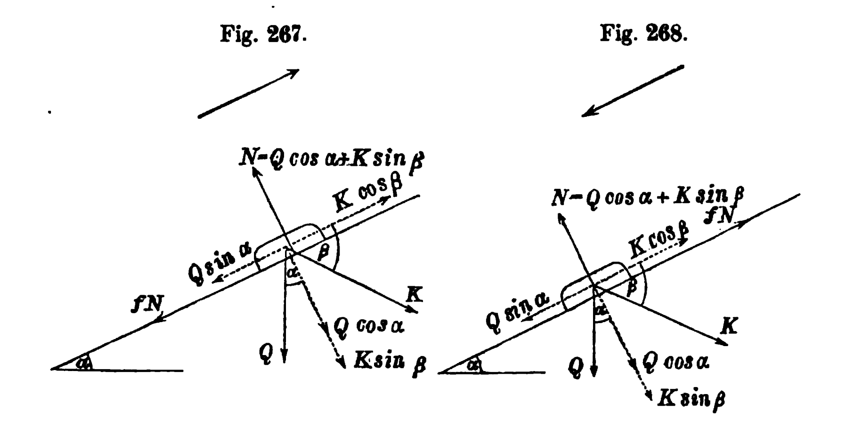
$$K \cos \beta = Q \sin \alpha \pm f(Q \cos \alpha + K \sin \beta), \text{ oder:}$$

$$226) \quad K = \frac{Q(\sin \alpha \pm f \cos \alpha)}{\cos \beta \mp f \sin \beta},$$

in welcher die oberen Vorzeichen auf den Fall des Hinaufgleitens

(Fig. 267), die unteren auf den Fall des Hinabgleitens (Fig. 268) sich beziehen (und aus welcher die früher gefundenen Gleichungen

Fig. 267. Fig. 268.



220) und 223) als specielle Fälle sich ergeben, jenachdem für den Winkel β die speciellen Werthe Null oder α substituirt werden). Wenn wiederum $f = \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt, und auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit $\cos \varphi$ multiplicirt wird, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$227)\quad K = \frac{Q \sin (\alpha \pm \varphi)}{\cos (\beta \pm \varphi)}$$

und zeigt in Bezug auf den in Fig. 267 dargestellten Fall: dass $K = \infty$ wird, wenn $\beta = 90^\circ - \varphi$ wird, d. h. wenn der Winkel zwischen der Kraft K und der Normalen zur Bahnrichtung gleich dem Reibungswinkel ist; dass dagegen K am kleinsten wird, wenn $\beta + \varphi = 0$, oder $\beta = -\varphi$ wird, d. h. wenn die Kraft K nach oben hin um den Reibungswinkel von der Bahnrichtung abweicht.

Wenn der Körper ohne Einwirkung der Kraft K hinabgleitet auf einer Bahn, deren Neigungswinkel grösser ist als der Reibungswinkel, so wird durch den Ueberschuss der Kraft $Q \sin \alpha$ über den Reibungswiderstand $fQ \cos \alpha$ eine Beschleunigung hervorgebracht. Man findet diese Beschleunigung, indem man jenen Kraft-Ueberschuss $Q \sin \alpha - fQ \cos \alpha$ durch die Masse des Körpers, also durch die Zahl $\frac{Q}{g}$ dividirt. Die Beschleunigung der Bewegung ist demnach:

$$228)\quad p = g\,(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Unter der Voraussetzung, dass der Reibungscoefficient während der Bewegung sich nicht ändert, kann die Bewegung als eine gleichförmig beschleunigte Bewegung angesehen und nach den Regeln des § 7 bestimmt

werden. War also die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null, so ist die in t Secunden zurückgelegte Wegeslänge:

$$229)\quad l = \frac{p t^2}{2}.$$

Die beiden Gleichungen 228) und 229) bieten ein Mittel, um aus den beobachteten Werthen der drei Grössen t, l, α die Grösse des Reibungscoefficienten f zu berechnen.

Bei den am Schlusse des § 66 citirten Versuchen legte die vom Stapel laufende Fregatte „Raritan" in 11 Secunden eine Strecke von 18 Metern zurück, und die Bahn war um einen Winkel von 3° 40′ gegen den Horizont geneigt.

Hiernach ergeben sich folgende Gleichungen:

$$18 = \frac{p \,.\, 11^2}{2}, \quad \text{folglich:}\quad p = 0^m{,}3 \quad \text{und}$$

$$0{,}3 = 9{,}81\ (0{,}064 - f \,.\, 0{,}998), \quad \text{also:}\quad f = 0{,}034.$$

Bei einem anderen Versuche legte das vom Stapel laufende Schiff „Princeton" auf einer um 4° 25′ geneigten Bahn in 5,25 Secunden eine Strecke von 5,98 Metern zurück, woraus sich die Gleichungen ergeben:

$$5{,}98 = \frac{p \,.\, 5{,}25^2}{2}, \quad p = 0^m{,}434 \quad \text{und}$$

$$0{,}434 = 9{,}81\ (0{,}077 - f \,.\, 0{,}997), \quad \text{also:}\quad f = 0{,}033.$$

Beim Hinaufgleiten des Körpers wirken die Kräfte $Q \sin \alpha$ und $f Q \cos \alpha$ beide der Bewegung entgegen; die Bewegung ist also in diesem Falle immer eine verzögerte Bewegung, deren Geschwindigkeit in jeder Secunde abnimmt um die Grösse:

$$230)\quad p = g\ (\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Wenn mit t die Zeit bezeichnet wird, nach welcher die Geschwindigkeit Null geworden ist, und mit l die in dieser Zeit zurückgelegte Strecke, so gilt die Gleichung 229) auch für diesen Fall; man erhält also nach Substitution des hier für p gefundenen Werthes die Gleichung:

$$231)\quad l = g\ (\sin \alpha + f \cos \alpha)\ \frac{t^2}{2},$$

welche ebenfalls zur Berechnung des Reibungscoefficienten benutzt werden kann, wenn die Grössen t, l, α aus directen Beobachtungen bekannt sind.

Wenn z. B. beobachtet wäre, dass auf einer um 5° 45′ ansteigenden Eisbahn ein Schlitten noch 58,8 Meter in 10 Secunden bergan läuft, bevor seine Geschwindigkeit Null geworden ist, so würde zur Berechnung des Reibungscoefficienten die Gleichung dienen:

$$58{,}8 = 9{,}81\ (0{,}1 + f \,.\, 0{,}995)\ \frac{10^2}{2}, \quad \text{also:}\quad f = 0{,}02.$$

Zugleich würde sich hieraus ergeben, dass die Anfangsgeschwindigkeit $11^m{,}76$, und die Geschwindigkeitsverminderung in jeder Secunde $1^m{,}176$ betrug.

§ 69.

Reibungscoefficienten und Reibungswinkel für Bewegung in Keilnuthen.

Wenn ein Körper längs einer horizontalen von zwei convergirenden Unterstützungsebenen gebildeten keilförmigen Rinne fortbewegt wird, so tritt an jeder von beiden Berührungsstellen ein Reibungswiderstand auf, welcher der Bewegungsrichtung entgegen, also in horizontaler Richtung wirkt. Eine Horizontalkraft K, welche den Körper längs einer solchen Keilnuth gleichförmig fortbewegen soll, muss also gleich der Summe dieser beiden Reibungswiderstände sein. Man erhält die Grösse jedes der beiden Reibungswiderstände, indem man den betreffenden Normaldruck mit dem Reibungscoefficienten f multiplicirt. Wenn die beiden Seitenflächen gleiche Neigungswinkel mit der verticalen Mittelebene einschliessen, so haben die beiden Normaldrücke gleiche Grösse; denn ihre Mittelkraft R, welche dem Gewichte des Körpers gleich und entgegengesetzt ist, halbirt in diesem Falle den von ihnen eingeschlossenen Winkel. Es ergeben sich hiernach aus Fig. 269 und Fig. 270 die Gleichungen:

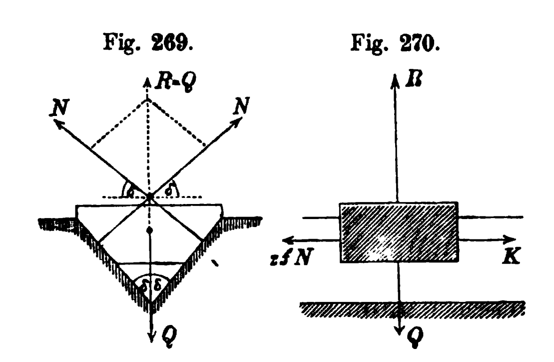


Fig. 269. Fig. 270.

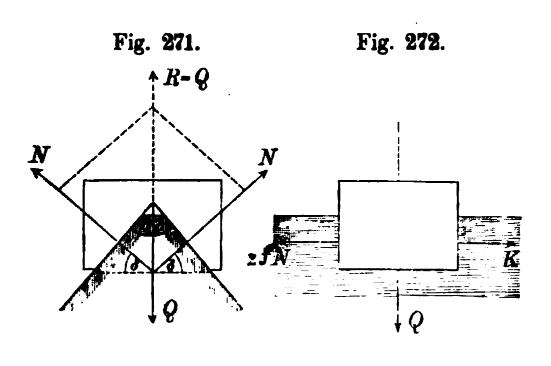


Fig. 271. Fig. 272.

$$232)\quad Q = 2\,N \sin \delta,$$

oder: $N = \dfrac{Q}{2 \sin \delta}$,

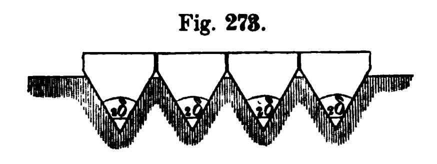
$$233)\quad K = 2\,f N = \frac{f}{\sin \delta} \cdot Q.$$

Dieselben Gleichungen gelten auch für den in Fig. 271 und Fig. 272 dargestellten Fall, bei welchem die beiden Unterstützungs-

ebenen nach oben hin convergiren; es macht also hinsichtlich der Grösse des zu überwindenden Reibungswiderstandes keinen Unterschied: ob die Keilnuth in der festen Unterlage oder in dem beweglichen Körper sich befindet.

Wenn mehrere solcher gleichschenkeliger Keilnuthen mit gleichen Convergenzwinkeln horizontal und parallel neben einander liegen, und in jeder derselben ein Körper gleitet (Fig. **273**), so ist für jeden einzelnen dieser Körper die zum Ueberwinden des Reibungswiderstandes erforderliche Zugkraft nach Gleichung 233) zu bestimmen, ist also gleich dem Gewichte des Körpers multiplicirt mit dem Quotienten $\frac{f}{\sin \delta}$. Folglich ist auch, wenn alle diese Körper zu einem festen Ganzen vereinigt werden, die zur gleichförmigen Bewegung des Ganzen erforderliche Zugkraft gleich dem Producte aus der ganzen Gewicht-Summe in den Quotienten $\frac{f}{\sin \delta}$ — vorausgesetzt, dass für alle Berührungsstellen der Reibungscoefficient eine und dieselbe Grösse hat. Die Gleichung 233) kann daher auch für den Fall als gültig angesehen werden, wenn die Gleitbahn mehrere neben einander liegende Keilnuthen enthält.

Fig. 273.



Die Bewegung auf horizontaler Ebene kann als ein specieller Fall der Bewegung in Keilnuthen aufgefasst werden: als derjenige Fall nämlich, bei welchem der Convergenzwinkel der Seitenflächen 180° beträgt. Denn wenn man $\delta = 90°$ setzt in Gleichung 233), so erhält man wiederum die für jenen Fall früher gefundene Gleichung $K = f Q$. Der Einfluss der Keilnuthenform kann also aufgefasst werden wie eine Vergrösserung der Reibungscoefficienten in dem Verhältnisse von f zu $\frac{f}{\sin \delta}$ und der Quotient:

$$234) \quad \frac{f}{\sin \delta} = f_1$$

kann der „Reibungscoefficient für die Bewegung in Keilnuthen" genannt werden.

Wenn z. B. $2\delta = 60°$, also $\sin \delta = \frac{1}{2}$ ist, so wird $f_1 = 2f$. Bei einem Convergenzwinkel von 60° hat also die Keilnuthen-Form denselben Einfluss, wie bei einer ebenen Bahn eine solche Vergrösserung der Rauhigkeit der Oberflächen, bei welcher der Reibungscoefficient gerade die doppelte Grösse erreichte.

Statt des Reibungswinkels φ würde einer Keilnuthenbahn der grössere — aus der Gleichung:

235) $f_1 = \operatorname{tg} \psi$

zu bestimmende — Neigungswinkel ψ gegeben werden müssen, wenn die Bewegung des unter Einwirkung der Schwere und der Reibung hinabgleitenden Körpers eine gleichförmige Bewegung sein soll (Fig. 274). Dieser Winkel ψ würde der früher gewählten Bezeichnungsweise entsprechend der „Reibungswinkel für Keilnuthen-Bewegung" genannt werden können. Sämmtliche Gleichungen des vorigen Paragraphen gelten auch für die Bewegung längs Keilnuthen, sobald darin f_1 statt f, und ψ statt φ substituirt wird.

Fig. 274.

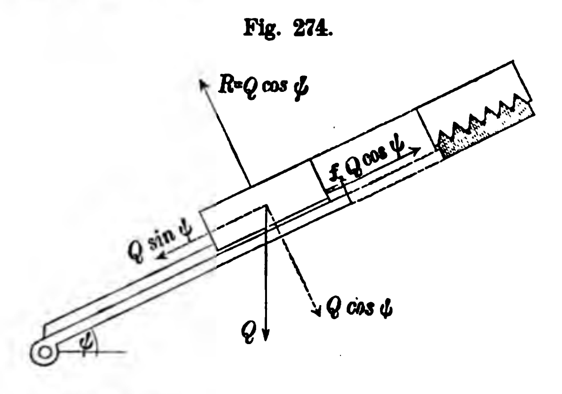
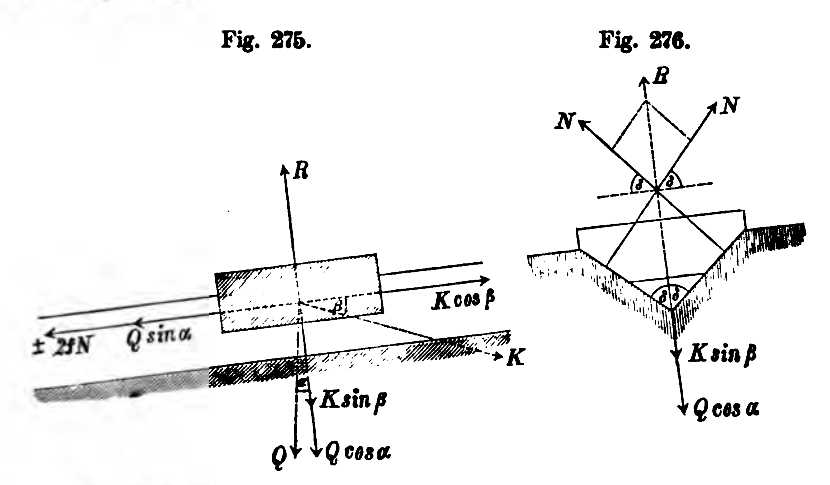


Fig. 275. Fig. 276.



Beispielsweise ergeben sich für den in Fig. 275 und Fig. 276 dargestellten Fall die Gleichungen:

$$K \cos \beta = Q \sin \alpha \pm 2fN$$

und:

$$R = 2N \sin \delta = K \sin \beta + Q \cos \alpha$$

oder, wenn der aus letzterer Gleichung für N sich ergebende Werth in der ersteren substituirt wird:

$$K \cos\beta = Q \sin\alpha \pm \frac{f}{\sin\delta}(K \sin\beta + Q \cos\alpha).$$

Diese Gleichung nimmt für K aufgelöst, wenn $\frac{f}{\sin\delta}$ mit f_1 bezeichnet wird, die Form an:

$$236) \quad K = Q\left(\frac{\sin\alpha \pm f_1 \cos\alpha}{\cos\beta \mp f_1 \sin\beta}\right),$$

stimmt also mit der früher gefundenen Gleichung 226) genau überein, sobald darin f_1 statt f substituirt wird, und kann ebenso wie jene auch auf die [der Gleichung 227) entsprechende] Form:

$$237) \quad K = \frac{Q \sin(\alpha \pm \psi)}{\cos(\beta \pm \psi)}$$

gebracht werden, wenn der Reibungscoefficient durch den Reibungswinkel ausgedrückt wird.

§ 70.

Gleichgewicht eines von zwei festen Ebenen unterstützten Körpers.

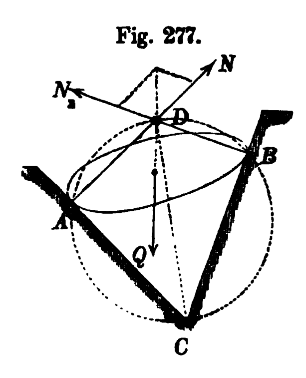
Es soll angenommen werden, dass der Körper jede der beiden Unterstützungsebenen nur in einem Punkte berührt, und dass die Vertical-Ebene, in welcher diese beiden Berührungspunkte liegen, rechtwinkelig zu der (horizontalen) Durchschnittslinie der beiden Ebenen steht. Auch wird vorausgesetzt, dass der Reibungscoefficient für beide Berührungsstellen dieselbe Grösse hat.

Auf den Körper wirken drei Kräfte: nämlich das eigene Gewicht desselben, und die von den beiden Unterstützungspunkten geleisteten Gegendrücke. Jeder von den beiden letzteren ist anzusehen als die Mittelkraft aus dem normalen Gegendrucke der Unterstützungs-Ebene und dem längs der Ebene wirkenden Reibungswiderstande, kann also (nach § 67) mit der Richtung der Normalen niemals einen grösseren Winkel einschliessen als den Reibungswinkel. Abgesehen von dieser Einschränkung befindet sich der Körper genau in derselben Situation, wie ein von zwei festen Punkten unterstützter Körper, und gelten daher für den Gleichgewichtszustand dieselben Bedingungen, welche im § 53 für diesen Fall gefunden wurden.

Nach dem „Satze von den drei Kräften" müssen die Richtungslinien jener drei Kräfte stets in einem und demselben Punkte

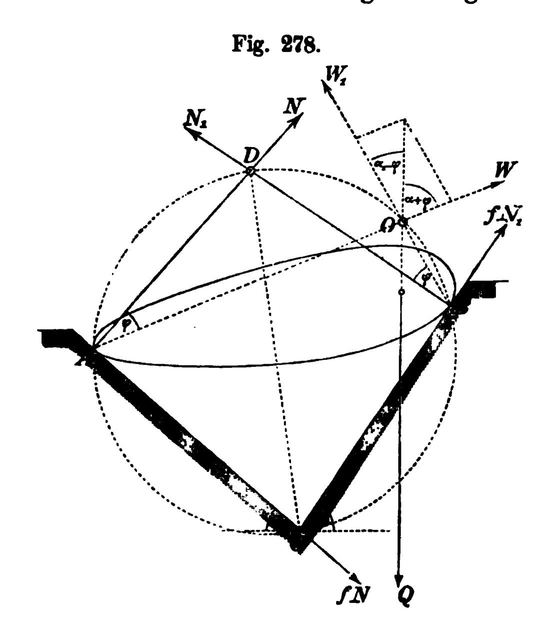
einander schneiden, wenn der Körper sich im Gleichgewichtszustande befinden soll. Wenn der Punkt D, in welchem die in den Berührungspunkten A und B errichteten Normalen der Unterstützungsebenen einander schneiden, in der Verticalen des Schwerpunktes liegt, so ist der Gleichgewichtszustand des Körpers vollkommen unabhängig von der Grösse des Reibungscoefficienten (Fig. 277). In diesem Falle würde der Körper sich im Gleichgewichts-Zustande befinden, auch wenn die beiden Ebenen absolut glatt wären. Die beiden normalen Gegendrücke N und N_1 reichen in diesem Falle allein schon aus, um das Gewicht Q aufzuheben, und können auf die bekannte Weise durch die in Fig. 277 angedeutete Construction des Kräfte-Parallelogramms gefunden werden.

Fig. 277.



Wenn dagegen jener Durchschnittspunkt D seitwärts von der Verticalen des Schwerpunktes liegt, so wird zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustandes die Mitwirkung der Reibungswiderstände in Anspruch genommen (Fig. 278). Um zunächst die Frage zu entscheiden: nach welcher von beiden Richtungen der Reibungswiderstand an einer der Berührungsstellen wirkt, kann man den Körper als an jenem Durchschnittspunkte D aufgehängt ansehen und aus der Richtung der Drehbewegung, welche in diesem Falle die Kraft Q hervorbringen würde, die Richtungen bestimmen, in welchen ohne das Vorhan-

Fig. 278.



densein der Reibungswiderstände die Berührungsstellen A und B längs der Unterstützungs-Ebenen gleiten würden. Diesen Gleitbewegungen entgegen wirken die Reibungswiderstände.

In Fig. 278 geht die Richtungslinie des Gewichtes Q rechts an dem Durchschnittspunkte D vorbei, die Kraft Q würde also dem Körper eine Drehung von links nach rechts herum um den Punkt D als Drehpunkt ertheilen, und bei dieser Drehung würde der Punkt A aufwärts und der Punkt B abwärts gleiten. Folglich wirkt in diesem Falle der Reibungswiderstand bei A abwärts und bei B aufwärts.

Die Grösse, welche der Reibungscoefficient mindestens haben muss, wenn der Körper in dieser Stellung durch Mitwirkung der Reibungswiderstände im Gleichgewicht gehalten werden soll, findet man, indem man über CD als Durchmesser eine Kreislinie beschreibt. Der Punkt O, in welchem die Verticale des Schwerpunktes von dieser Kreislinie geschnitten wird, ist derjenige Punkt, in welchem die Richtungslinien der drei Kräfte, nämlich des Gewichtes Q und der beiden totalen Gegendrücke W und W_1 einander schneiden. Die beiden (als Peripherie-Winkel über dem Bogen DO einander gleichen) Winkel φ, um welche die totalen Gegendrücke von den betreffenden Normalen abweichen, sind die Reibungswinkel, und es ist daher der gesuchte Reibungscoefficient: $f = \operatorname{tg} \varphi$. Wenn der wirkliche Reibungscoefficient kleiner wäre als $\operatorname{tg} \varphi$, so würde ein Gleiten des Körpers eintreten. Wenn derselbe gerade gleich $\operatorname{tg} \varphi$ ist, so befindet sich der Körper an der Grenze des Gleichgewichtszustandes. Für letzteren Fall können die Kräfte W und W_1 entweder durch die in Fig. 278 angedeutete Parallelogramm-Construction oder nach der hieraus sich ergebenden Proportion:

$$W : W_1 : Q = \sin(\alpha_1 - \varphi) : \sin(\alpha + \varphi) : \sin(\alpha + \alpha_1)$$

bestimmt werden, aus welcher man die Gleichungen erhält:

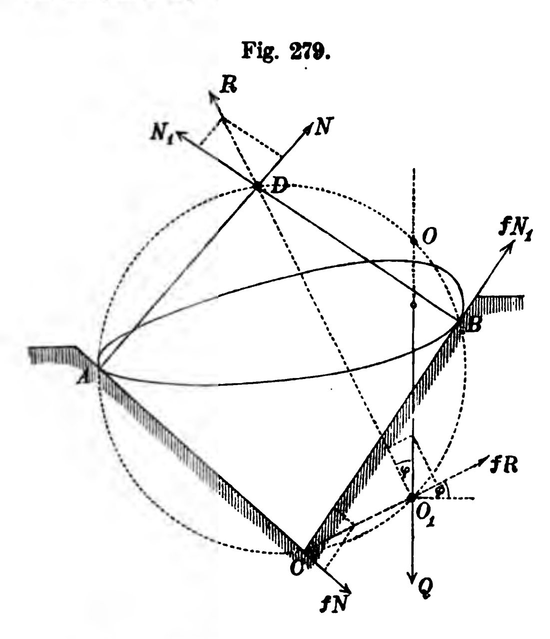
$$238)\quad W = Q \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\alpha + \alpha_1)},$$

$$239)\quad W_1 = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \alpha_1)},$$

worauf dann auch die normalen Gegendrücke N und N_1 entweder durch Zerlegung jener totalen Gegendrücke, oder auch aus den Gleichungen $N = W \cos \varphi$ und $N_1 = W_1 \cos \varphi$ sich bestimmen lassen.

Statt des oberen Durchschnittspunktes O kann auch der untere Durchschnittspunkt O_1 der Schwerpunkts-Verticalen mit der Kreislinie zur Construction des gesuchten Reibungswinkels benutzt werden (Fig. 279). Es ist nämlich O_1 derjenige Punkt, in welchem die Mittelkraft R der beiden Normaldrücke N, N_1, und die Mittelkraft fR der beiden Reibungswiderstände fN und fN_1 mit der Kraft Q zusammentreffen. Der Winkel φ, den die Kraft R mit der Verticalen (oder den die Kraft fR mit der Horizontalen) einschliesst, muss der gesuchte Reibungswinkel sein, weil die in dem Punkte O_1 angreifenden Horizontalkräfte einander aufheben müssen, also $R \sin \varphi = fR \cos \varphi$, oder: $\operatorname{tg} \varphi = f$ sein muss.

Fig. 279.



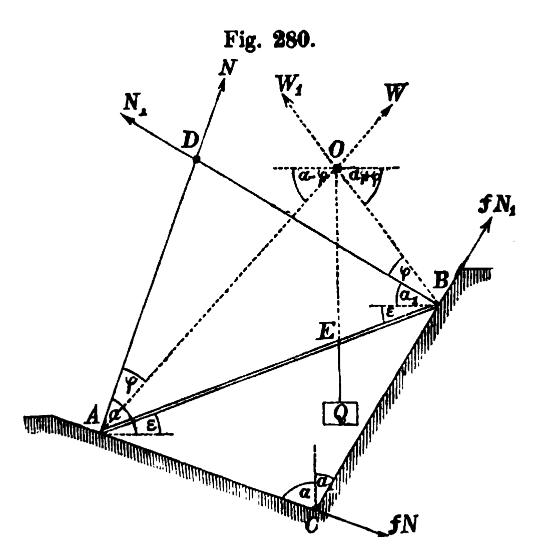
Wenn der wirkliche Reibungscoefficient grösser wäre als zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustandes erforderlich ist, so würde an den Berührungsstellen statt der ganzen Widerstandsfähigkeit der Reibung nur so viel davon in Anspruch genommen und in wirkliche Thätigkeit versetzt, als zum Gleichgewichte erforderlich ist. Die Kräfte W und W_1 wirken daher in diesem Falle gerade so, wie wenn der wirkliche Reibungscoefficient nur die dem oben gefundenen Winkel φ als Reibungswinkel entsprechende Grösse hätte. Die Gleichungen 238) und 239) sind also auch in diesem Falle zur Bestimmung jener Kräfte zu benutzen.

Wäre die in Fig. 278 gelöste Aufgabe in der umgekehrten Form gestellt gewesen: „gegeben ist der Reibungscoefficient $f (= \operatorname{tg} \varphi)$, gesucht wird die Verticale, in welcher der Schwerpunkt liegen muss, wenn der Körper gerade an der Grenze des Gleichgewichtszustandes sich befinden soll": so würde man durch Abtragen der gegebenen Reibungswinkel φ an die Normalen den Punkt O der gesuchten Verticalen gefunden haben. Doch würde es für diese Aufgabe noch eine zweite Lösung geben. Wenn man

nämlich ein anderes Mal an jeder Berührungsstelle den Winkel φ an der entgegengesetzten Seite der Normalen abträgt, so bildet der auf solche Weise erhaltene (links von dem Punkte D in der Kreislinie liegende) Durchschnittspunkt ebenfalls einen Punkt, dessen Verticale die verlangte Eigenschaft besitzt.

Da die Form des Körpers nur in so fern einen Einfluss auf den Gleichgewichts-Zustand hat, als die Lage der Berührungspunkte und die Lage der Schwerpunkts-Verticalen durch sie bedingt wird, so kann bei allen derartigen Aufgaben — wie in der Folge geschehen soll — der Körper wie eine geradlinige gewichtlose Stange behandelt werden, welche mit der Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte ihrer Lage und Richtung nach zusammenfällt, und welche belastet ist mit einem Gewichte, dessen Aufhängepunkt der Durchschnittspunkt jener Linie mit der Verticalen des Schwerpunktes bildet.

Fig. 280.



Für das Verhältniss, in welchem die beiden durch den Belastungspunkt E gebildeten Abschnitte AE und BE zu einander stehen müssen, und für den Neigungswinkel ε, welchen die Stange mit der Horizontalen einschliessen muss, wenn dieselbe an der Grenze des Gleichgewichts-Zustandes sich befinden soll, ergeben sich aus den beiden Dreiecken AEO und BEO in Fig. 280 die Gleichungen:

$$\frac{OE}{AE} = \frac{\sin(\alpha - \varphi - \varepsilon)}{\cos(\alpha - \varphi)} = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)\cos\varepsilon - \sin\varepsilon,$$

$$\frac{OE}{BE} = \frac{\sin(\alpha_1 + \varphi + \varepsilon)}{\cos(\alpha_1 + \varphi)} = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi)\cos\varepsilon + \sin\varepsilon.$$

Wenn man die letztere durch die erstere dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi)\cos\varepsilon + \sin\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)\cos\varepsilon - \sin\varepsilon}$$

oder, wenn das Verhältniss $\frac{AE}{BE}$ mit n bezeichnet, und auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch $\cos\varepsilon$ dividirt wird:

$$240)\quad n = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) - \operatorname{tg}\varepsilon}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Grösse n oder die Lage des Belastungspunktes E bestimmen, wenn der Neigungswinkel ε gegeben ist; und wenn man dieselbe für $\operatorname{tg}\varepsilon$ auflöst, so erhält man die Gleichung:

$$241)\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{n\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) - \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi)}{1 + n},$$

aus welcher der Neigungswinkel ε gefunden werden kann, sobald das Verhältniss n gegeben ist.

Wenn man in der letzteren Gleichung $\alpha = 90^\circ$ und $\alpha_1 = 0$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$242)\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{n\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi}{1+n} = \frac{n - f^2}{(1+n)f},$$

aus welcher man z. B. den Winkel bestimmen kann, den eine auf horizontaler Bodenfläche stehende gegen eine verticale Wand gelehnte Leiter mindestens mit der Horizontalen einschliessen muss, wenn dieselbe nicht ausgleiten soll. Liegt der Schwerpunkt der Leiter in der Mitte, so wird $n = 1$, also:

$$243)\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1 - f^2}{2f}.$$

Wenn also z. B. $f = 0{,}4$ wäre, so würde:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1 - 0{,}16}{0{,}8} = 1{,}05 \quad\text{und}\quad \varepsilon = 46{,}5^\circ.$$

Die Leiter würde also bei einem Neigungswinkel von 46,5° gegen die Horizontale an der Grenze des Gleichgewichtszustandes sich befinden.

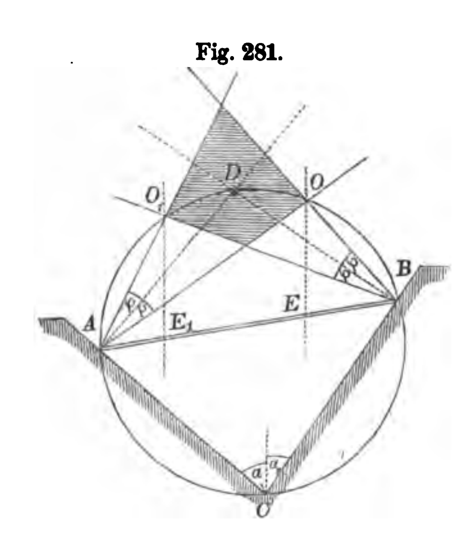
Der aus Gleichung 240) sich ergebende Werth von n bezeichnet in Bezug auf Fig. 280 die Grenze, bis zu welcher der Belastungspunkt nach rechts verschoben werden kann, ohne dass ein Gleiten der Stange eintritt. Setzt man in dieser Gleichung $\alpha + \varphi$ statt $\alpha - \varphi$, und $\alpha_1 - \varphi$ statt $\alpha_1 + \varphi$, so erhält man:

$$244)\quad n_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varphi) + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \operatorname{tg}\varepsilon} = \frac{AE_1}{BE_1}.$$

Diese Gleichung bezieht sich auf den Durchschnittspunkt O_1 (Fig. 281), welchen man erhält, wenn man an jeder Berührungsstelle den Reibungswinkel nach der anderen (der vorigen entgegengesetzten) Seite hin abträgt. Sie bestimmt die Grenze, bis

zu welcher der Belastungspunkt nach **links** verschoben werden kann, ohne dass ein Gleiten der Stange eintritt.

Fig. 281.



Es bildet nämlich der zwischen den Richtungen AO und AO_1 liegende Theil der Bildfläche den geometrischen Ort aller derjenigen Richtungen, welche die Kraft W möglicherweise annehmen kann; ebenso der zwischen den Richtungen BO und BO_1 liegende Theil den geometrischen Ort aller derjenigen Richtungen, welche die Kraft W_1 annehmen kann. Der (in Fig. 281 schraffirte) beiden Winkelflächen gemeinschaftlich angehörende Flächentheil OO_1 bildet daher das Gebiet, auf welchem der Durchschnittspunkt der drei Kraftrichtungen Q, W und W_1 unter allen Umständen zu suchen ist. Von der Kreislinie $CADB$ können also nur diejenigen Punkte, welche in diesem Flächentheile liegen, Durchschnittspunkte jener drei Kraftrichtungen werden. Wenn man also durch die Endpunkte O und O_1 des in jenen Flächentheil fallenden Bogens OO_1 Verticalen legt, so erhält man die Grenzpunkte E und E_1, bis zu welchen der Belastungspunkt nach der einen und nach der anderen Seite hin längs der Stange verschoben werden kann, ohne dass ein Gleiten derselben eintritt.

Führt man in Bezug auf Fig. 280 statt der oben gewählten die neue Bezeichnungsweise ein:

$$\frac{AE}{AB} = m, \qquad \frac{BE}{AB} = 1 - m, \qquad \text{also:} \quad n = \frac{m}{1-m},$$

und substituirt man den letzteren Werth in Gleichung 240), so nimmt dieselbe für m aufgelöst die Form an:

$$245) \quad m = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) + \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)},$$

und wenn man mit Gleichung 244) in analoger Weise verfährt, also: $n_1 = \frac{m_1}{1 - m_1}$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$246)\quad m_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varphi) + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varphi) + \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Wenn $\alpha - \varphi = \varepsilon$ ist, so wird $m = 1$, und wenn zugleich $\alpha_1 - \varphi = -\varepsilon$ ist, so wird $m_1 = 0$. Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so fallen die Grenzpunkte E und E_1 resp. mit den Endpunkten B und A der Stange zusammen. In diesem speciellen Falle kann also jeder beliebige Punkt der Stange als Belastungspunkt gewählt werden, ohne dass ein Gleiten eintritt. Ebenso auch in dem andern speciellen Falle, wenn $\alpha_1 + \varphi = 90^0$ und gleichzeitig $\alpha + \varphi = 90^0$ ist.

Wenn man dagegen in den obigen beiden Gleichungen $\varphi = 0$ setzt, so erhält man:

$$247)\quad m = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha} = m_1,$$

d. h. wenn die beiden Unterstützungs-Ebenen absolut glatt wären, so würden die beiden Grenzpunkte E und E_1 zusammenfallen; es gäbe in diesem Falle für den Belastungspunkt nur eine einzige Stelle, welche den Gleichgewichts-Bedingungen entspricht, nämlich (wie in Bezug auf Fig. 277 nachgewiesen) diejenige, welche mit dem Punkte D in einer und derselben Verticalen liegt. Diese Stelle liegt ausserhalb der Schenkel des Convergenzwinkels der beiden Ebenen, sobald $\varepsilon > \alpha$ ist, denn in diesem Falle wird der gemeinschaftliche Werth von m und m_1 grösser als Eins.

Denkt man sich die Stange über den Endpunkt B hinaus verlängert — etwa durch eine in der Wand befindliche Spalte hindurch, oder auch ringförmig an der Unterstützungsstelle erweitert und jenseits dieser ringförmigen Erweiterung wiederum geradlinig sich fortsetzend — in der Weise jedoch, dass die Stelle B dabei nicht aufhört, die Berührungs- und Unterstützungsstelle zu bilden, so können auch die jenseits dieser Stelle liegenden Punkte der Stangen-Richtung als Belastungspunkte in Frage kommen.

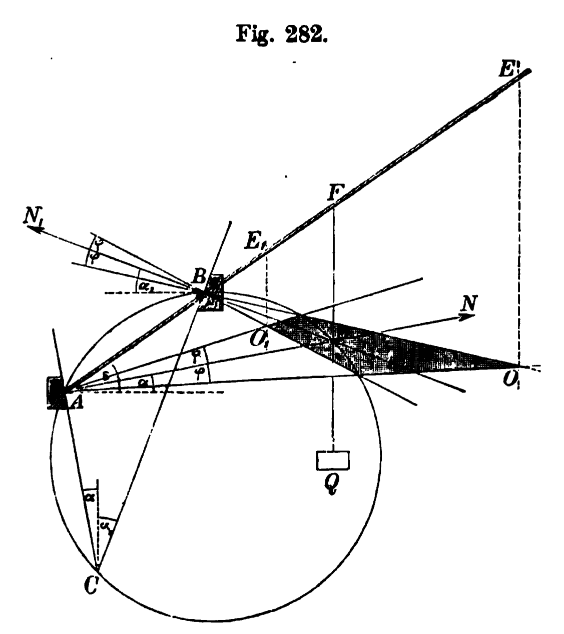
Bei der in Fig. 282 dargestellten Lage würde der oberhalb des Punktes D in der Verlängerung der Stange liegende Punkt F diejenige Stelle sein, an welcher das Gewicht aufgehängt werden müsste, wenn die Unterstützungsflächen absolut glatt wären. Hinge das Gewicht links von der Stelle, so würde eine von rechts nach links gerichtete Drehung der Stange um den Punkt D herum eintreten. Bei dieser Drehung würden beide Berührungsstellen **abwärts** gleiten. Wenn also Reibung vorhanden ist, so wirken in

diesem Falle beide Reibungs-Widerstände längs der Berührungsflächen aufwärts. Die Grenze E_1, bis zu welcher die Belastungsstelle nach links verschoben werden kann, ohne dass ein Gleiten eintritt, findet man — wie eine Vergleichung der beiden Figuren **282** und **281** zeigt — aus Gleichung 246), indem man darin $\alpha_1 + \varphi$ statt $\alpha_1 - \varphi$ setzt, also aus der Gleichung:

$$248)\quad m_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) + \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Wenn dagegen die Verticale des Gewichtes Q rechts an dem Punkte D vorbei geht, so würde dasselbe eine von links nach rechts herum gerichtete Drehung der Stange um den Punkt D hervorbringen. Bei dieser Drehung würden beide Berührungsstellen aufwärts gleiten. Folglich wirken in diesem letzteren Falle beide Reibungswiderstände längs der Berührungsflächen abwärts. Die Grenze E, bis zu welcher die Belastungsstelle nach rechts verschoben werden kann, ohne dass ein Gleiten eintritt, findet man aus Gleichung 245), indem man darin $\alpha_1 - \varphi$ statt $\alpha_1 + \varphi$ setzt, also aus der Gleichung:

Fig. 282.



$$249)\quad m = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varphi) + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varphi) + \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}.$$

Die Eckpunkte O_1 und O des in Fig. **282** schraffirten Vierecks $O O_1$ bilden die äussersten Grenzen, bis zu welchen der Durchschnittspunkt der drei Kraftrichtungen von dem Punkte D aus nach jeder Seite hin sich entfernen kann. Jede vertical über irgend einem Punkte dieses Vierecks liegende Stelle der Stange

genügt als Belastungspunkt den Bedingungen des Gleichgewichts. Wenn $\alpha + \varphi = \varepsilon$ ist, so fallen die Punkte O_1 und E_1 mit dem Unterstützungspunkte B zusammen. Die Gültigkeit der Gleichung 248) erstreckt sich auf alle Fälle, in denen $\alpha + \varphi \leqq \varepsilon$ ist. (Bei grösseren Werthen des Winkels $\alpha + \varphi$ ist diese Gleichung — wie später gezeigt werden wird — nur bedingungsweise gültig.) Der Punkt O rückt in unendliche Ferne, wenn $\alpha_1 - \varphi = -(\alpha - \varphi)$, oder: $\frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \varphi$ wird. In diesem Falle verschwindet die Grenze E, und genügt jede rechts von dem Punkte F liegende Stelle der Stange als Belastungspunkt den Gleichgewichts-Bedingungen. Ebenso auch dann, wenn $\frac{\alpha_1 + \alpha}{2} < \varphi$ ist. Die Gültigkeit der Gleichung 249) beschränkt sich daher auf diejenigen Fälle, in denen $\frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \geqq \varphi$ ist.

Wenn z. B. die Unterstützungsebenen verticale Lage haben, also $\alpha_1 = \alpha = 0$ ist, und wenn zugleich $\varphi < \varepsilon$ ist (Fig. **283**), so sind die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung 248) erfüllt, und es ergiebt sich für m_1 der Werth:

$$250)\quad m_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varepsilon}{2\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{f}\right).$$

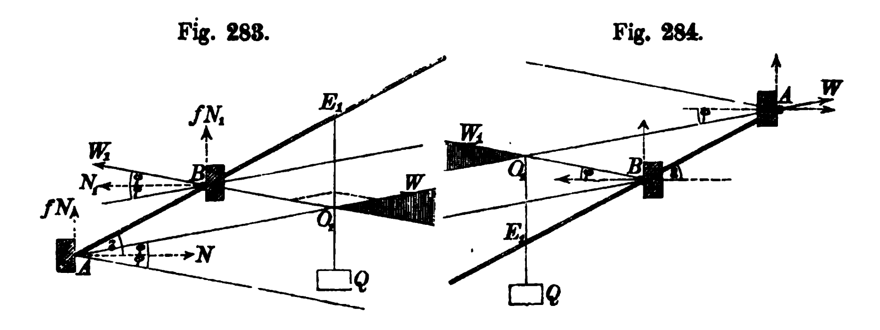
Die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung 249) sind dagegen nicht erfüllt (weil $\frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = 0$, also kleiner als φ ist). Es giebt daher in diesem Falle nur e i n e Grenze für den Belastungspunkt, nämlich die Stelle E_1. Diese Stelle bildet demnach die Grenze, bis zu welcher von aussen her der Belastungspunkt dem Unterstützungspunkt B genähert werden kann, ohne dass ein Gleiten eintritt. Alle weiter entfernt liegenden Stellen genügen ebenfalls den Gleichgewichts-Bedingungen. Wenn E_1 der Belastungspunkt ist, so wird:

$$251)\quad W = W_1 = \frac{Q}{2\sin\varphi}.$$

$$252)\quad N = N_1 = W\cos\varphi = \frac{Q}{2\operatorname{tg}\varphi} = \frac{Q}{2f}.$$

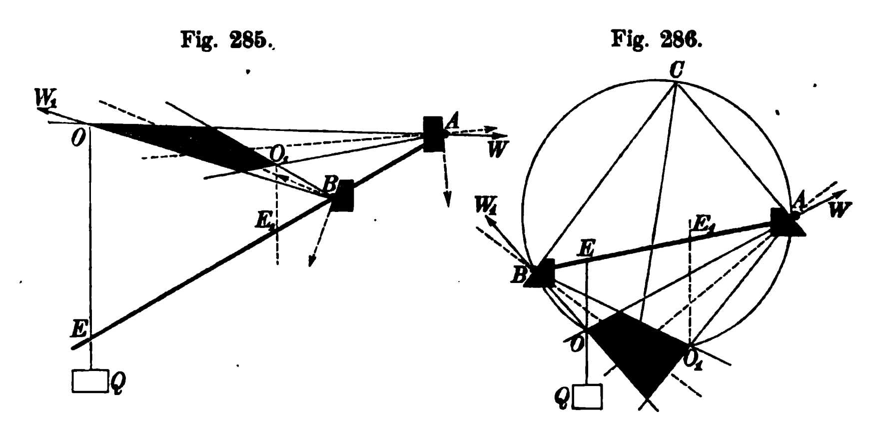
Die drei in dem Punkte O_1 einander im Gleichgewicht haltenden Kräfte Q, W und W_1 werden auch dann einander aufheben, wenn ihre Richtungen in die entgegengesetzten verwandelt werden. Wenn nach Umkehrung der drei Kraftrichtungen alsdann die

ganze Figur umgekehrt wird, so ergiebt sich aus dem vorigen der in Fig. 284 dargestellte Fall, in welchem die Gegendrücke W und W_1 der beiden festen Wände — nach aussen hin statt nach innen



— gegen die Stange wirken. Die Gleichungen 250), 251), 252) gelten daher auch für die in Fig. 284 dargestellte Gleichgewichtslage der Stange.

Auf ähnliche Weise lassen sich aus Fig. 281 und Fig. 282 resp. die Figuren 285 und 286 ableiten, in welcher letzteren diejenige Belastungsweise dargestellt ist, bei welcher beide Reibungswiderstände längs der Berührungsflächen **abwärts** wirken.



Der aus Gleichung 249) für m sich ergebende Werth hat zwar in Bezug auf den in Fig. 282 dargestellten Fall eine **unmittelbare** Gültigkeit nur so lange, als der Nenner auf der rechten Seite positiv ist, d. h. so lange $\frac{\alpha_1 + \alpha}{2} > \varphi$ ist. Jedoch lässt

auch der negative Werth, welchen m annimmt, wenn $\frac{\alpha_1 + \alpha}{2} < \varphi$ ist, eine gewisse Deutung zu. Diesem negativen Werthe des Verhältnisses $\frac{AE}{AB}$ entspricht nämlich eine Lage des Punktes E an der entgegengesetzten Seite in der Verlängerung der Richtung BA über den Punkt A hinaus links abwärts. Wenn man an dieser Stelle eine Kraft $-Q$ statt $+Q$, d. h. eine vertical aufwärts gerichtete Kraft statt einer vertical abwärts wirkenden anbrächte,

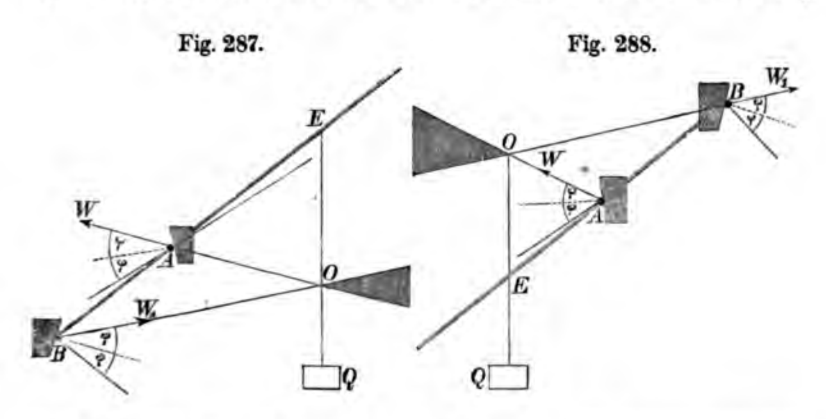


Fig. 287. Fig. 288.

so würde die Stange ebenfalls an der Grenze des Gleichgewichtszustandes sich befinden. Denkt man sich alsdann die ganze Figur umgekehrt, so dass die nunmehr vertical abwärts gerichtete Kraft Q wiederum durch ein Gewicht dargestellt werden kann, so erhält man die in Fig. **287** dargestellte Gleichgewichtslage, bei welcher die Unterstützungs-Ebenen nach oben hin convergiren, statt nach unten hin. In analoger Weise lässt sich aus Fig. **286** der in Fig. **288** dargestellte Fall ableiten.

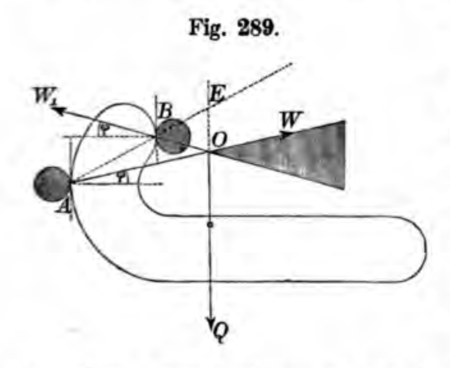


Fig. 289.

Dass die Formen der Oberflächen — sowohl des unterstützten Körpers als der unterstützenden Wände — nur in sofern einen Einfluss auf den Gleichgewichtszustand haben, als die Lage der Verbindungslinie AB und die Richtungen der an

den Berührungsstellen errichteten Normalen der Berührungsebenen durch sie bedingt werden, ist beispielsweise durch den in Fig. **289** dargestellten Fall veranschaulicht, bei welchem die Bedingungen des Gleichgewichts genau auf dieselbe Weise wie in Fig. **283** bestimmt werden können.

Die in diesem Paragraphen erklärte Methode kann selbstverständlich auch dann angewendet werden, wenn statt des Gewichtes Q irgend eine andere Kraft K es ist, welche ein Gleiten des Körpers hervorzubringen strebt; auch dann, wenn diese Kraft K wiederum als die Mittelkraft von beliebigen anderen auf den Körper wirkenden Kräften sich darstellt. Für solche Fälle ist es nur nöthig, statt der verticalen Richtung überall die Richtung der Kraft K einzuführen, worauf dann die Bedingungen der Gleichgewichtslage genau wie bei den vorigen Beispielen — entweder durch Construction oder durch Rechnung — gefunden werden können.

§ 71.

Gleichgewicht eines an zwei feste Horizontalstangen sich anlehnenden verticalen Balkens.

Die zum gleichförmigen Heben eines Pochstempels vom Gewichte G erforderliche Hubkraft K muss so beschaffen sein, dass die Mittelkraft Q der beiden Kräfte K und G genau durch den Punkt O hindurchgeht, in welchem während der Bewegung die von den Unterstützungsstellen A und B ausgehenden Gegendrücke W, W einander schneiden. Hiernach ergiebt sich für die Grösse der Kraft K aus Fig. **290** die Gleichung:

$$0 = G \,.\, \overline{EC} \,.\, \cos \varepsilon - K \,.\, \overline{EF} \,.\, \cos \varepsilon, \quad \text{oder:}$$

$$253) \quad K = G \cdot \frac{EC}{EF}.$$

Wenn die Hubkraft etwas kleiner wäre als K, so würde jene Mittelkraft links an dem Punkte O vorbeigehen, und die Bewegung eine verzögerte sein. Wenn dagegen die Hubkraft etwas grösser wäre als K, so würde die Mittelkraft rechts an dem Punkte O vorbeigehen und die Bewegung eine beschleunigte sein.

Die Lage des Punktes E kann nach Gleichung 249) bestimmt werden. Wenn z. B. $\operatorname{tg} \varepsilon = 2$ und $\operatorname{tg} \varphi = f = 0{,}4$ ist, so erhält man aus jener Gleichung:

$$m = \frac{-0{,}4 + 2}{-0{,}8} = -2$$

(wobei das Minuszeichen nur andeutet, dass der Punkt E in der Linie AB **links** von dem Punkte A liegt). Es ist daher in diesem Falle:

Fig. 290.

$$\frac{AE}{AB} = 2 \quad \text{und} \quad \frac{AE}{AC} = 4,$$

$$\text{folglich:} \quad \frac{EC}{AC} = 5.$$

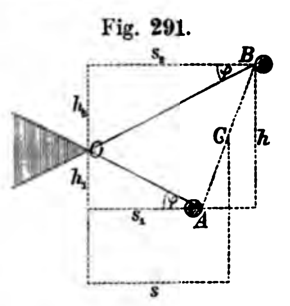
Wenn also z. B. die Länge der Hublatte, deren Endpunkt den Angriffspunkt der K bildet, gleich der einfachen Dicke des Pochstempels wäre, so würde $FC = 3 \,.\, \overline{AC}$ und $\overline{EF} = 2 \,.\, \overline{AC}$, folglich nach Gleichung 253):

$$K = \frac{5}{2} G.$$

Wenn dagegen die Länge der Hublatte gleich der doppelten Dicke des Pochstempels wäre, so würde K unendlich gross sein müssen; d. h. wenn es überhaupt möglich sein soll, den Pochstempel gleichförmig aufwärts zu bewegen, so muss die Richtungslinie der hebenden Kraft K **rechts** an dem Punkte O vorbeigehen.

Die Lage dieses Punktes kann man auch nach Fig. 291 bestimmen, aus welcher für die Abstände der Verticalen des Punktes O von den Punkten A und B resp. die Werthe sich ergeben:

Fig. 291.



$$s_1 = \frac{h_1}{\operatorname{tg} \varphi} \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{h_2}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

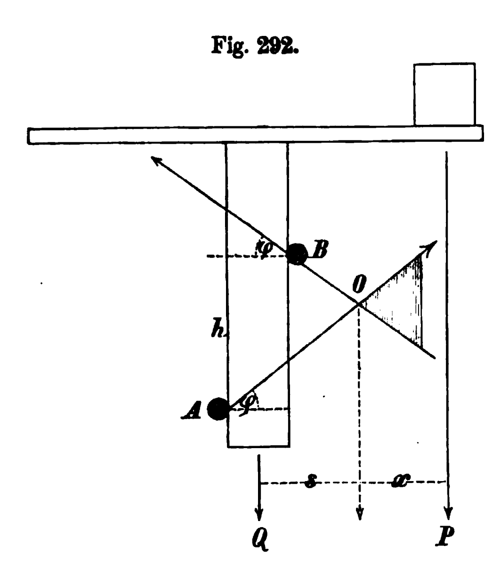
Die Entfernung des Punktes O von der verticalen Mittellinie des Pochstempels ist gleich dem arithmetischen Mittel dieser beiden Werthe; also ist:

$$254) \quad s = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{h_1 + h_2}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{h}{2f}.$$

Dieselbe Gleichung würde man auch für den in Fig. 292 dargestellten Fall benutzen können, um die Bedingung des Gleich-

gewichts eines an zwei feste Horizontalstangen sich anlehnenden verticalen Balkens in Bezug auf das Hinabgleiten zu finden. Die beiden Gewichte P und Q können nur dann aufgehoben werden, wenn der Abstand ihrer Mittelkraft von der verticalen Balken-Achse nicht kleiner als s ist, da der Punkt O die äusserste Grenzlage darstellt, bis zu welcher der Durchschnittspunkt der beiden Gegendrücke nach links rücken kann. Der Grenze des Gleichgewichts entspricht also die Bedingungsgleichung:

Fig. 292.



$$Px = Qs,$$

aus welcher man nach Substitution des oben für s gefundenen Ausdrucks den Werth erhält:

$$x = \frac{Q}{P} \cdot \frac{h}{2f}.$$

Für $P = Q$ und $f = 0{,}4$ wird $x = 1{,}25\,h$ und $s + x = 2{,}5\,h$. Der Schwerpunkts-Abstand des aufgelegten Gewichtstückes von der verticalen Balken-Achse darf also nicht kleiner als $2{,}5\,h$ sein, wenn kein Hinabgleiten eintreten soll.

§ 72.

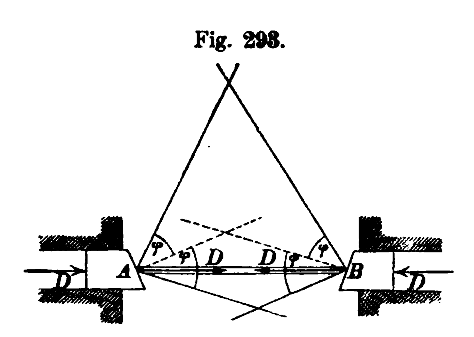
Bedingungen des Klemmens.

Die Untersuchungen des vorigen Paragraphen bezogen sich auf solche Fälle, in denen der Reibungswinkel φ **kleiner** ist als jeder von den beiden Winkeln, welche die Verbindungslinie der Unterstützungspunkte mit den in letzteren errichteten Normalen der Berührungsebenen einschliesst. Es zeigte sich, dass in allen diesen Fällen der Gleichgewichtszustand der Stange innerhalb gewisser Grenzen durch die Lage des Belastungspunktes bedingt wird, dass also der geometrische Ort aller derjenigen Stellen,

welche als Belastungspunkte den Gleichgewichts-Bedingungen genügen, immer nur einen Theil bildet von der (nach beiden Seiten hin bis ins Unendliche verlängert gedachten) Verbindungslinie der Unterstützungspunkte. Es zeigte sich ferner, dass der Gleichgewichtszustand der Stange vollkommen unabhängig ist von der Grösse der Belastung; dass derselbe folglich durch eine beliebige Vergrösserung der Belastung nicht gestört werden kann. Es zeigte sich endlich drittens: dass die von den Unterstützungspunkten auf die Stange übertragenen Druckkräfte W und W_1 sofort Null werden, sobald die Belastung Q gleich Null wird, insofern jene beiden Kräfte für sich allein wirkend die Stange nur dann im Gleichgewicht halten könnten, wenn jede von beiden in die Richtung der Stange hineinfiele, was aber unter der obigen Voraussetzung wegen Kleinheit des Reibungswinkels bei keiner von beiden möglich ist.

Wesentlich verschieden von den vorigen sind die Bedingungen des Gleichgewichts in dem Falle, wenn der Reibungswinkel φ grösser ist als die Winkel zwischen der Richtung der Stange und den Richtungen der Normalen, wenn also in Bezug auf jede der beiden Stützflächen die Stangen-Richtung innerhalb der Reibungswinkel-Fläche liegt. In diesem Falle können die von den Stützflächen auf die Stangen übertragenen Druckkräfte auch die Richtung der Stange selbst annehmen, sie können folglich die Stange im Gleichgewicht halten, auch wenn dieselbe ganz unbelastet ist. Wenn z. B. auf die in Fig. 293 angedeutete Art die unterstützenden Körper durch zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte D gegen die Stange gedrängt werden, so entsteht dadurch in der Stange eine Druckspannung von gleicher Grösse. Die Stange ist alsdann zwischen den beiden Körpern eingeklemmt, d. h. sie befindet sich in einem Zustande, bei welchem es — je nach der Grösse der Kraft D — eines geringeren oder grösseren Kraftaufwandes bedarf, um dieselbe aus ihrer Lage in dem einen oder anderen Sinne zu verschieben. Die Widerstandsfähigkeit gegen das Gleiten wächst mit

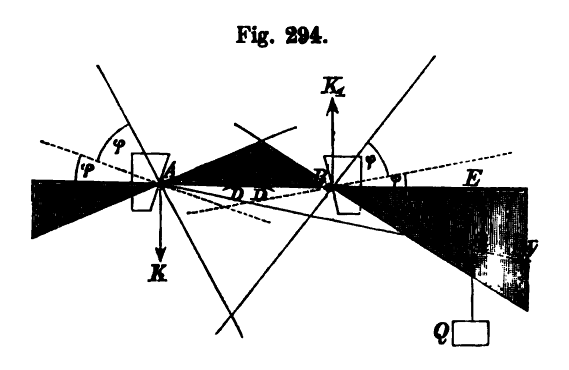
Fig. 293.



Vergrösserung der Kräfte D und kann bis zu jedem beliebigen Grade dadurch gesteigert werden. Es ist also nur erforderlich, jene Kräfte hinreichend zu vergrössern, um zu erreichen, dass bei jeder beliebigen Lage des Belastungspunktes und bei jeder beliebigen Grösse der Belastung der Gleichgewichtszustand fortdauert. Durch Hinzufügung der Kräfte D zu den vorher schon stattfindenden Kraftwirkungen wird allemal bewirkt, dass die totalen bei A und B auf die Stange übertragenen Kräfte W und W_1 mehr der Richtung der Stange sich anschliessen, also einer Richtung sich nähern, bei welcher die grösste Abweichung von der Normalen kleiner ist als der Reibungswinkel.

Auch in dem Falle, wenn die Unterstützungs-Ebenen nach oben hin convergiren, lässt sich auf solche Art für jede beliebige Lage und Grösse der Belastung Q der Gleichgewichtszustand herstellen. Durch Verschiebung des Belastungspunktes E längs der Stangenrichtung und durch gehörige Regulirung jener Spannung des Klemmens lässt sich erreichen, dass jeder beliebige Punkt der in Fig. **294** schraffirten Fläche der Durchschnittspunkt wird für die Richtungslinien der drei einander im Gleichgewicht haltenden Kräfte Q, W und W_1. Denn das Gleichgewicht der in dem Punkte E mit dem Gewichte Q belasteten Stange würde an den beiden (festliegend gedachten) Stützpunkten A und B resp. die verticalen Gegendrücke erfordern:

Fig. 294.



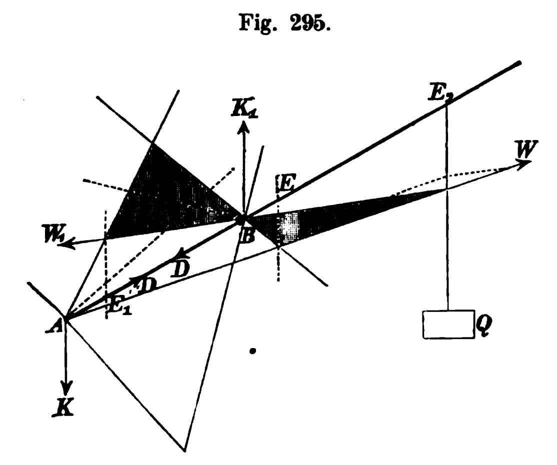
$$K = Q \cdot \frac{EB}{AB} \quad \text{und} \quad K_1 = Q \cdot \frac{AE}{AB}.$$

Denkt man sich alsdann auf die in Fig. **293** angedeutete Weise noch so viel Druck D hinzugefügt, dass weder die Mittelkraft W der beiden Kräfte K und D, noch die Mittelkraft W_1 der beiden Kräfte K_1 und D um mehr als den Reibungswinkel von der betreffenden Normalen abweicht, so erkennt man, dass die von den Stützflächen auf die Stange übertragenen Kräfte dem Gewichte Q das Gleichgewicht halten können, und dass der Durchschnitts-

punkt O der drei Kräfte Q, W und W_1 dem Punkte E um so näher rücken wird, je grösser jene hinzugefügte Druckspannung D war. Zugleich erkennt man, dass der Gleichgewichtszustand in diesem Falle von der Grösse des Gewichtes Q abhängt. Denn wenn bei einer Vergrösserung des Gewichtes Q der Gleichgewichtszustand fortdauern soll, so muss D ebenfalls zunehmen. Geschieht letzteres nicht, so wird bei allmählichem Wachsen des Gewichtes Q schliesslich die Stange herabfallen.

Wenn bei einer von den beiden Unterstützungsflächen der Winkel zwischen der Normalen und der Stangenrichtung kleiner, bei der anderen dagegen grösser ist als der Reibungswinkel, wie in Fig. 295, so ist wiederum bei unbelastetem Zustande der Stange kein Druck an den Unterstützungsstellen möglich. Für die belastete sich selbst überlassene Stange würden die Punkte E und E_1 die Grenzen bilden, welche der Belastungspunkt nicht überschreiten darf, wenn ein Gleiten nicht eintreten soll. Durch künstliche Hinzufügung der Druckkräfte D lässt sich dagegen erreichen, dass der Belastungspunkt bis zu der Stelle E_2 hinaus verschoben werden darf, ohne dass ein Gleiten eintritt. Bei einer Lage des Belastungspunktes zwischen den Stellen E und E_2 tritt jedoch der von dem vorigen abweichende Fall ein, dass ebensowohl die einseitige Vergrösserung des Drucks D, als auch die einseitige Vergrösserung der Belastung Q für sich allein eine Störung des Gleichgewichts bewirken würde, insofern erstere ein Heraustreten der Mittelkraft W_1, letztere ein Heraustreten der Mittelkraft W aus der betreffenden Reibungswinkel-Fläche zur Folge haben würde. Wenn also die Last in dem Grenzpunkte E_2 selbst aufgehängt ist, so giebt es für jede bestimmte Grösse des Drucks D nur eine bestimmte Grösse des Gewichtes Q — ebenso

Fig. 295.

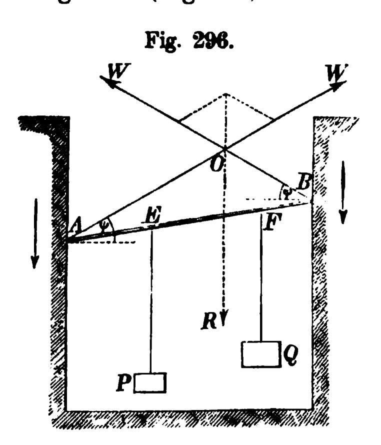


für jede gegebene Grösse des Gewichtes Q nur eine bestimmte Grösse des Drucks D, bei welcher der Gleichgewichtszustand überhaupt möglich ist.

Nicht nur bei den zuletzt untersuchten, sondern auch bei allen Fällen des vorigen Paragraphen lässt sich also auf die in Fig. 293 angedeutete Weise durch Vergrösserung oder Verkleinerung der Kräfte, mit welchen die unterstützenden Körper gegen die Stange gedrängt werden, erreichen, dass jeder beliebige Punkt des den beiden Reibungswinkel-Flächen gemeinschaftlich angehörenden Flächentheils der Durchschnittspunkt wird für die Richtungen der beiden Kräfte W und W_1. Eine solche künstlich hervorzubringende Verschiebung jenes Durchschnittspunktes ist indessen nur möglich während des Ruhezustandes der Stange. Mit dem Eintritt des Bewegungszustandes gelangen sofort die im vorigen Paragraphen gefundenen Regeln zur Bestimmung jenes Punktes wiederum zur Gültigkeit. Während des Gleitens weicht an jeder Berührungsstelle die Mittelkraft aus Normaldruck und Reibungswiderstand stets um den Reibungswinkel ab von der Richtung der Normalen.

Wenn z. B. die zwischen zwei verticalen Wänden eingeklemmte Stange AB (Fig. 296) in vertical abwärts gerichteter fortschreitender Bewegung begriffen ist, so schneiden die Richtungslinien der von den Wänden auf die Stange übertragenen Kräfte W, W einander in dem Punkte O und behalten beständig dieselben Richtungen bei, so lange das Gleiten dauert. Soll diese fortschreitende Bewegung eine gleichförmige sein, so müssen sämmtliche auf die Stange wirkenden Kräfte einander im Gleichgewicht halten; es muss also die Mittelkraft der beiden Kräfte W, W der Mittelkraft R von allen übrigen Kräften gleich und entgegengesetzt sein, und die Richtungslinie der letzteren muss durch den Punkt O hindurchgehen.

Fig. 296.



Einen solchen Gleichgewichtszustand kann man sich durch die in den Punkten E und F aufgehängten Gewichte P und Q

hergestellt denken, welche so regulirt sein sollen, dass ihr Schwerpunkt mit dem Punkte O genau in einer und derselben Verticalen liegt, und dass ihre Summe R genau dieselbe Grösse hat wie die Mittelkraft der beiden Kräfte W, W im Anfange hatte. Die Bedingungen der gleichförmig fortschreitenden Bewegung sind dann erfüllt, die Stange wird also mit unveränderter Geschwindigkeit ihre abwärts gleitende Bewegung fortsetzen, so lange als in der Wirkung der Kräfte P und Q sich Nichts ändert. Sobald jedoch auf irgend eine Weise die eine von diesen beiden Kräften ausser Thätigkeit versetzt würde — etwa durch eine feste horizontale Ebene, welche (je nach der Länge der Fäden) entweder das Gewicht P oder das Gewicht Q zuerst auffängt und an der weiteren Fortsetzung der Bewegung verhindert — so würde in diesem Augenblicke eine Aenderung in dem Bewegungszustande der Stange eintreten.

Angenommen: das Gewicht Q erreichte als das tiefer hängende zuerst den Boden, so würde die von diesem Augenblicke an allein wirkende Kraft P, als eine links neben dem Durchschnittspunkte der beiden Kräfte W, W vorbeigehende Kraft sofort eine Drehung der Stange von rechts nach links herum hervorbringen. Bei dieser Drehung aber würde sogleich die Berührung mit den Wänden, folglich auch die Wirkung der Kräfte W, W aufhören; die Stange würde also nunmehr frei herabfallen.

Wenn statt dessen (wie in Fig. 296) das Gewicht P das tiefer hängende wäre, so würde in dem Augenblicke, wo dasselbe den Boden erreicht, die Bewegung der Stange ruckweise unterbrochen werden, und ein völliger Stillstand eintreten. Es würde nämlich mit jeder Fortsetzung der gleitenden Bewegung — wie klein auch immer die Dauer derselben angenommen werden möge — eine Drehung der Stange nach rechts herum unzertrennlich verbunden sein. Denn so lange das Gleiten dauerte, würden die Richtungen der Kräfte W, W unverändert dieselben bleiben, würde also der Durchschnittspunkt O ihrer Richtungen stets dieselbe Lage gegen die Stange behalten, und würde die vertical abwärts wirkende Kraft Q beständig rechts neben diesem Punkte vorbeigehen.

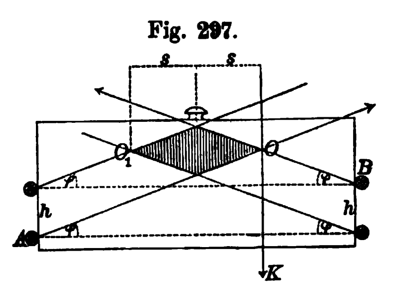
Da nun aber eine solche Drehung der Stange eine geometrische Unmöglichkeit ist, so folgt hieraus, dass auch die Fortsetzung der gleitenden Bewegung eine Unmöglichkeit ist. Die Widerstände W, W werden plötzlich unendlich gross, denn ihre Mittelkraft bringt in der Zeit Null eine Geschwindigkeitsänderung

hervor, und der Durchschnittspunkt ihrer Richtungen springt nach dem Punkte F der Stange hinüber. Nach dem Stillstande befindet sich also die Stange zwischen den Wänden so fest eingeklemmt, dass es unendlich grosser Kräfte bedarf, um dieselbe aus ihrer Lage zu verschieben. Es wird folglich nachher an jedem beliebigen Punkte der Stange ein Gewicht von jeder beliebigen Grösse aufgehängt werden können, ohne dass ein Gleiten eintritt.

In Wirklichkeit kann zwar von absolut festen Körpern so wenig als von unendlich grossen Kräften die Rede sein, und sind daher die hier aus der Annahme absolut fester Körper abgeleiteten Schlussfolgerungen nur annäherungsweise als gültig zu betrachten für Körper, wie sie wirklich existiren. Indessen sind dieselben doch vollkommen geeignet, die bekannte Thatsache zu erklären, dass es schwierig und so zu sagen unmöglich ist, die Bedingungen der gleichförmig fortschreitenden Bewegung für einen solchen zwischen senkrechten Wänden eingeklemmten Körper zu realisiren — um so schwieriger, je mehr die Verbindungslinie der Berührungspunkte der horizontalen Richtung sich nähert — insofern die geringste seitliche Ausweichung des Schwerpunktes sofort entweder das Frei-herab-fallen oder den völligen Stillstand zur Folge haben muss.

Auf ähnliche Weise kann man sich die Erscheinung des „Klemmens" bei dem in Fig. 297 dargestellten Beispiele erklären. Soll das Klemmen nicht eintreten, so muss die Richtungslinie der schiebenden Kraft K durch die in der Figur schraffirte Parallelogramm-Fläche hindurchgehen. Das Klemmen tritt dagegen ein, sobald die Kraft K entweder rechts an dem Punkte O oder links an dem Punkte O_1 vorbeigeht.

Fig. 297.



Für den Abstand jedes dieser beiden Punkte von der verticalen Mittellinie erhält man aus dem in der Figur schraffirten Parallelogramm (dessen verticale Diagonale $= h$, dessen horizontale Diagonale $= 2s$ ist, und dessen Seiten sämmtlich um den Reibungswinkel φ von der Horizontalen abweichen) die Gleichung:

$$s \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{2}, \quad \text{oder:} \quad s = \frac{h}{2f},$$

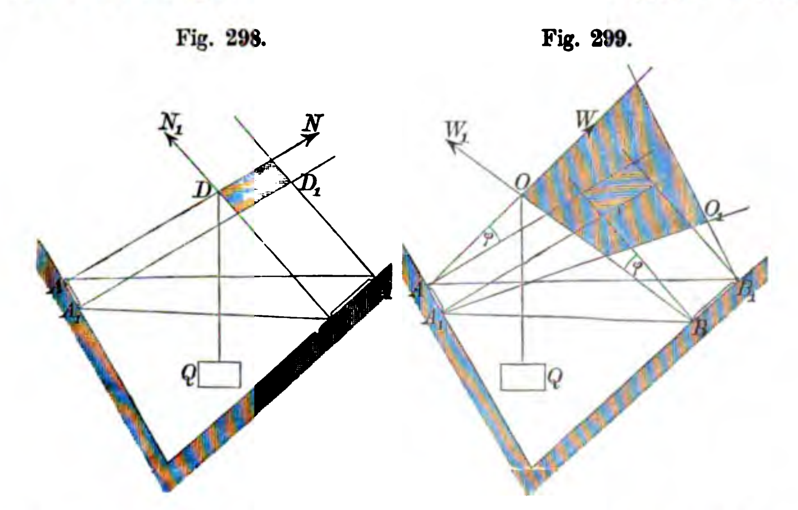
also denselben Werth, welcher bereits in Gleichung 254) aus Fig. 291 gefunden wurde.

§ 73.

Gleichgewicht des Keiles in Bezug auf Kippen.

Wenn der unterstützte Körper jede von den beiden Unterstützungsebenen an **zwei** Stellen berührt, so wird im Allgemeinen an jeder von den vier Unterstützungsstellen ein Druck auftreten, und sind es im Allgemeinen vier Druckkräfte, welche dem Gewichte des Körpers (oder der Belastung desselben) das Gleichgewicht halten. Wären die Unterstützungsflächen absolut glatt, so würden diese Druckkräfte nur rechtwinkelig zu denselben gerichtet sein können. Denkt man sich die von jeder der beiden Ebenen ausgehenden beiden Normaldrücke allemal zu einer Mittelkraft zusammengesetzt, so erkennt man, dass — je nach der Vertheilung des Druckes auf die beiden einer und derselben Ebene angehörigen Stützpunkte — jeder Punkt der in Fig. 298 schraffirten Parallelogramm-Fläche Durchschnittspunkt dieser beiden

Fig. 298. Fig. 299.



Mittelkräfte werden kann. Solange also die Verticale des Belastungspunktes zwischen den Endpunkten D und D_1 dieses Parallelogrammes liegt, reichen die Normaldrücke allein aus, eine Drehung des Körpers zu verhindern.

Wenn dagegen die Verticale des Belastungspunktes ausserhalb dieser Grenzen, z. B. links von dem Punkte D liegt, so würde ohne Mitwirkung der Reibungswiderstände eine Drehung des Körpers nach links herum eintreten. Bei dieser Drehung

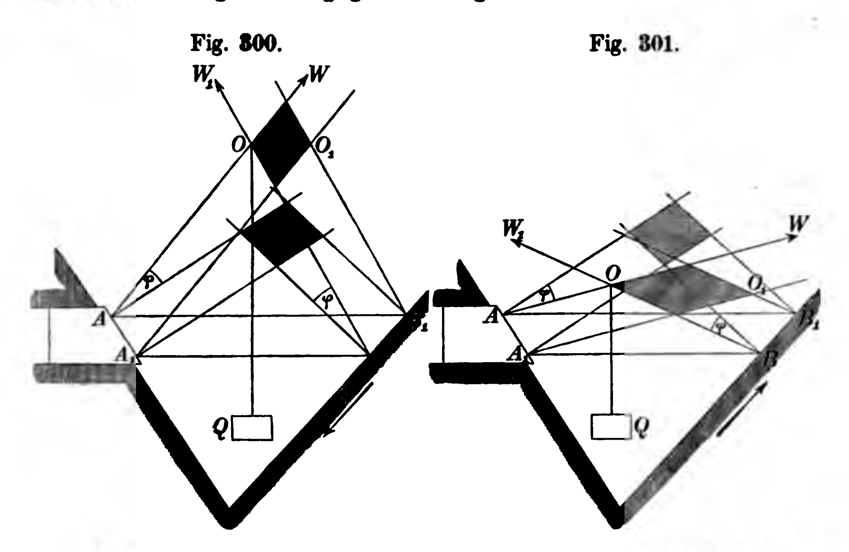
würden die Punkte A_1 und B_1 aufhören, Berührungspunkte zu sein; es können also nur die an den beiden anderen Stützpunkten A und B wirkenden Kräfte W und W_1 einer solchen Drehung entgegenwirken. Die Bedingungen des Gleichgewichtes in Bezug auf eine solche Drehung sind daher auf dieselbe Weise, wie wenn nur diese beiden Stützpunkte vorhanden wären, nach den Regeln des § 70 zu bestimmen. Wenn man den Reibungswinkel φ bei A nach oben, bei B nach unten von der betreffenden Normalen aus abträgt, so bildet der Durchschnittspunkt O der auf diese Art erhaltenen Richtungen die Grenze, bis zu welcher die Verticale des Belastungspunktes nach links rücken darf, ohne dass eine Drehung eintritt (Fig. **299**). Auf analoge Weise findet man auf der anderen Seite den Grenzpunkt O_1, bis zu welchem die Verticale des Belastungspunktes nach rechts verschoben werden darf.

Wenn zwischen den beiden Punkten A und A_1, ebenso zwischen den beiden Punkten B und B_1 jeder Zwischenpunkt ebenfalls eine Berührungsstelle bildet, die Berührung also an jeder Seite längs einer ganzen Linie stattfindet, so bleiben die Bedingungen des Gleichgewichtes genau dieselben. Denkt man sich alsdann das Viereck $A\,A_1\,B\,B_1$ rechtwinkelig zur Bildfläche bewegt und sieht man den hierbei von demselben beschriebenen prismatischen Raum als Form des unterstützten Körpers an, so findet man, dass die oben gefundenen Gleichgewichts-Bedingungen auch gelten für einen Körper von der Form eines Keiles, dessen Seitenebenen unter demselben Winkel wie die Unterstützungsebenen convergirend längs ihrer ganzen Ausdehnung die letzteren berühren.

Die in Fig. **299** gefundenen Punkte O und O_1 bilden die Grenzen, zwischen denen die Verticale des Belastungspunktes liegen muss, wenn der ruhende Keil durch die Belastung Q nicht zum Kippen gebracht werden soll. Eine andere Lage nehmen jene Grenzpunkte an, wenn der Keil in abwärtsgerichteter fortschreitender Bewegung begriffen ist, was natürlich voraussetzt, dass mindestens eine von den beiden Unterstützungsebenen einem beweglichen Körper angehört. Während der Keil AB in Fig. **300** längs der festen Unterstützungsebene B_1B abwärts gleitet, wirkt an jeder von den beiden Stützflächen die Mittelkraft aus Normaldruck und Reibungswiderstand beständig in einer Richtung, welche von der betreffenden Normalen nach oben hin um den Reibungswinkel abweicht. Den geometrischen Ort für alle Punkte, in

welchen die Richtungslinien der von den beiden Stützflächen auf den Keil übertragenen Kräfte einander schneiden können, bildet für diesen Fall die in Fig. **300** schraffirte Parallelogramm-Fläche OO_1. Wenn dagegen der Keil a u f w ä r t s geschoben wird, so weichen jene Mittelkräfte beständig an beiden Stützflächen nach u n t e n hin um den Reibungswinkel von den betreffenden Normalen ab, und die Parallelogramm-Fläche OO_1 nimmt für diesen Fall die in Fig. **301** angegebene Lage an.

Fig. **300**. Fig. **301**.



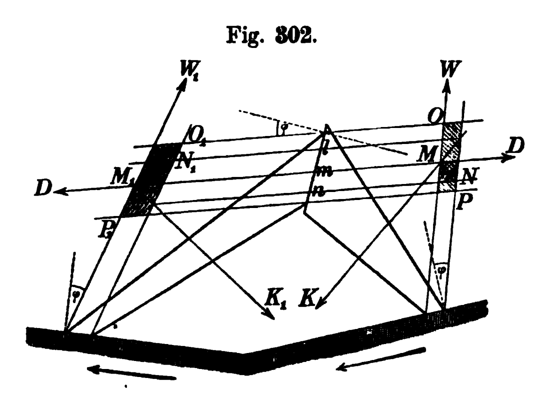
Wenn statt des Gewichtes Q eine beliebige andere Kraft K es ist, unter deren Einwirkung der Keil seine fortschreitende Bewegung ausführen soll, so wird dadurch in keiner Weise eine Abweichung von dem obigen Constructions-Verfahren bedingt. Soll die Bewegung eine fortschreitende bleiben, so darf die Richtungslinie dieser Kraft K nicht an der (schraffirten) Fläche OO_1 vorbeigehen, sie muss vielmehr mindestens einen (Eck-) Punkt mit derselben gemeinschaftlich haben.

Eine Vergleichung der beiden Figuren **300**, **301** mit Fig. **299** zeigt, dass bei f o r t s c h r e i t e n d e r Bewegung des Keiles der Spielraum für die Lage der Kraft K stets nur einen Theil bildet von demjenigen Spielraume, welcher in Fig. **299** für den r u h e n d e n Keil gefunden wurde. Wenn also die Richtungslinie der Kraft K eine solche Lage hat, dass der in fortschreitender Bewegung begriffene Keil durch sie nicht zum Kippen gebracht

wird, so genügt dieselbe um so mehr für den in gleicher Lage ruhenden Keil den Bedingungen des Gleichgewichts in Beziehung auf das Kippen.

Eine weitere Beschränkung erleidet jedoch der Spielraum der Kraft K in dem Falle, wenn die bewegliche Unterstützungsfläche des Keiles gleichfalls einem Keile angehört, der ebenso wie der erste an der einen Seite durch eine feste, an der anderen Seite durch eine bewegliche Fläche unterstützt ist. In diesem Falle wird der Spielraum der Kraft K nicht nur durch die zuvor erwähnten Umstände, sondern ausserdem auch noch durch die Lage der den anderen Keil im Gleichgewicht haltenden Kraft K_1 bedingt. Bei der in Fig. 302 durch die Pfeile angedeuteten Verschiebungs-Richtung würde die betreffende Parallelogramm-Fläche für den Keil rechts wie in Fig. 300, für den Keil links wie in Fig. 301 zu construiren sein. Wäre der Keil links unter allen Umständen an einer kippenden Bewegung verhindert, so würde die Parallelogramm-Fläche OP den Spielraum für die Kraft K bezeichnen. Wenn dagegen die bestimmt gegebene Kraft K_1 diejenige Kraft bildet, welche den Keil links im Gleichgewicht hält, so wird nunmehr an dem Keile rechts der Spielraum für die Kraft K auf die Parallelogramm-Fläche MN reducirt. Denn die Punkte m und n in der gemeinschaftlichen Berührungsfläche beider Keile bilden die Grenzpunkte, welche die Richtungslinie der beiden von den Keilen gegenseitig auf einander ausgeübten Druckkräfte D, D nicht überschreiten darf, wenn bei dem Keile links ein Zusammentreffen der Richtungslinien der drei Kräfte D, W_1 und K_1 in einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte noch möglich sein soll. Auf gleiche Weise findet man, dass der Spielraum für die Kraft K_1 auf die Parallelogramm-Fläche $M_1 N_1$ sich reducirt, sobald die den Keil rechts im Gleichgewicht haltende Kraft K die bestimmte in Fig. 302 angegebene Richtung und Lage hat,

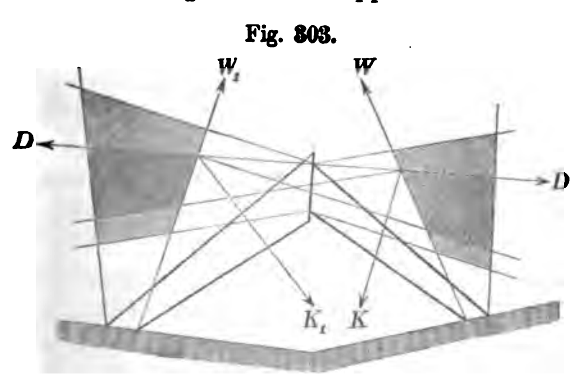
Fig. 302.



da in diesem letzteren Falle die Richtungslinie der Kräfte D, D nicht ausserhalb der Grenzpunkte l und m die gemeinschaftliche Berührungsfläche treffen darf, wenn für den Keil rechts die Bedingung des Gleichgewichts in Bezug auf das Kippen noch erfüllt bleiben soll. Wenn also z. B. gleichzeitig die beiden Kräfte K und K_1 die in Fig. **302** angegebene Lage haben, so befindet sich das Keil-System an der Grenze des Gleichgewichtszustandes, weil der Punkt m in der gemeinschaftlichen Berührungsfläche der einzige Punkt ist, welcher als Angriffspunkt der beiden Drücke D, D für beide Keile zugleich den Gleichgewichts-Bedingungen genügt. Die geringste Verschiebung einer der beiden Kräfte K oder K_1 nach der linken Seite hinüber würde ein Kippen des Keil-Systems zur Folge haben, während die einseitige Verschiebung einer der beiden Kräfte nach rechts bis zum gegenüberliegenden Eckpunkte der doppelt schraffirten Parallelogramm-Fläche hin den Gleichgewichtszustand nicht stören würde.

Auf ähnliche Weise wird auch bei dem ruhenden Keil-System die (im Uebrigen wie in Fig. **299** zu construirende) Spielraumfläche an jedem der beiden Keile auf ein kleineres Gebiet reducirt, sobald die den jenseitigen Keil im Gleichgewicht haltende Kraft eine bestimmt gegebene Richtung und Lage hat. So z. B. bezeichnet in Fig. **303** die doppelt schraffirte Fläche r e c h t s den Spielraum, innerhalb dessen die Richtungs - Linie der Kraft K verschoben werden darf, so lange die Richtungs - Linie der auf den anderen Keil wirkenden Kraft K_1 die bestimmte in der Figur angegebene Lage hat; und die doppelt schraffirte Fläche l i n k s bezeichnet in gleicher Weise den Spielraum für die Kraft K_1 für den Fall, dass die Richtungslinie der Kraft K die bestimmte in der Figur angegebene Lage hat — vorausgesetzt wie immer, dass der G r ö s s e nach die beiden Kräfte K und K_1 den Gleichgewichts-Bedingungen entsprechen.

Fig. **303**.



Unter dieser Voraussetzung darf überhaupt das Gleichgewicht des Keil-Systems in Bezug auf das Kippen allemal als gesichert betrachtet werden, sobald für die Richtungslinie der von den beiden Keilen auf einander gegenseitig ausgeübten Druckkräfte D, D irgend eine (mit den Gesetzen der Reibung vereinbare) solche Lage aufgefunden werden kann, bei welcher an jedem der beiden Keile ein Zusammentreffen der drei auf denselben wirkenden Kräfte in einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte nachweisbar ist.

§ 74.

Gleichförmig fortschreitende Bewegung des Keiles.

Aus der in Fig. **303** und Fig. **302** angegebenen Construction ist leicht zu erkennen, wie mit zunehmender Ausdehnung der drei Stützflächen auch die Ausdehnung jener das Kippen betreffenden Spielraumflächen rasch zunimmt, und damit zugleich die Gefahr des Kippens rasch sich vermindert. Wenn also — wie im Folgenden stets vorausgesetzt werden soll — die drei Stützflächen und demzufolge auch jene Spielraumflächen eine solche Ausdehnung haben, dass an jedem der beiden Keile die Richtungslinie der betreffenden Kraft unter allen Umständen durch das Innere der ihr zugewiesenen Spielraumfläche hindurchgeht, so kommt die Möglichkeit des Kippens nicht weiter in Frage, darf also eine etwaige Verschiebung jedes der beiden Keile unter allen Umständen als eine fortschreitende Bewegung betrachtet werden. Es handelt sich alsdann nur noch um die Frage: in welchem Grössen-Verhältniss die beiden ihrer Richtung nach gegebenen Kräfte K und K_1 zu einander stehen müssen, wenn die geradlinig fortschreitende Bewegung jedes der beiden Keile zugleich eine gleichförmige Bewegung sein soll.

Die geradlinig fortschreitende gleichförmige Bewegung eines Körpers setzt Gleichgewicht der wirkenden Kräfte voraus. An jedem der beiden Keile müssen also die drei auf denselben wirkenden Kräfte einander im Gleichgewicht halten (Fig. **304**). Man kann daher auf jeden dieser beiden Körper den in § 40 gefundenen Satz von den drei Kräften anwenden, indem man für jeden der beiden Durchschnittspunkte O und O_1 das Verhältniss der daselbst angreifenden Kräfte gleich dem Verhältniss der Sinus der gegenüberliegenden Winkel setzt. Hiernach ergiebt sich für den Keil rechts aus Fig. **305** die Proportion:

255) $K : D : W = \sin(\alpha + 2\varphi) : \cos(\omega + \varphi) : \cos(\alpha - \omega + \varphi)$;
und für den Keil links aus Fig. 306 die Proportion:
256) $K_1 : D : W_1 = \sin(\alpha_1 - 2\varphi) : \cos(\omega_1 - \varphi) : \cos(\alpha_1 - \omega_1 - \varphi)$.

Sobald eine von den fünf Kräften gegeben ist, können die übrigen vier aus diesen beiden Proportionen bestimmt werden.

Wenn man von den beiden Quotienten:

$$\frac{K}{D} = \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\cos(\omega + \varphi)} \text{ und } \frac{K_1}{D} = \frac{\sin(\alpha_1 - 2\varphi)}{\cos(\omega_1 - \varphi)}$$

den ersteren durch den letzteren dividirt, so erhält man für das gesuchte Verhältniss der beiden Kräfte K und K_1 die Gleichung:

$$257)\quad \frac{K}{K_1} = \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\sin(\alpha_1 - 2\varphi)} \cdot \frac{\cos(\omega_1 - \varphi)}{\cos(\omega + \varphi)}.$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die in Fig. 304 durch die Pfeile angedeutete Art der Verschiebung, also auf den Fall, in welchem K die treibende Kraft, und K_1 den zu überwindenden Widerstand bildet. Aus dieser Gleichung lässt sich also die zur gleichförmigen Ueberwindung eines gegebenen Widerstandes K_1 erforderliche treibende Kraft berechnen. In zwei Fällen ergiebt sich für letztere ein unendlich grosser Werth: nämlich erstens, wenn $\alpha_1 = 2\varphi$ und zweitens, wenn $\omega = 90^\circ - \varphi$ wird. Soll also eine Ueberwindung jenes Widerstandes oder eine gleichförmige Unterhaltung der Bewegung mittelst der treibenden Kraft überhaupt möglich sein, so muss $\alpha_1 > 2\varphi$ und $\omega < 90^\circ - \varphi$ sein.

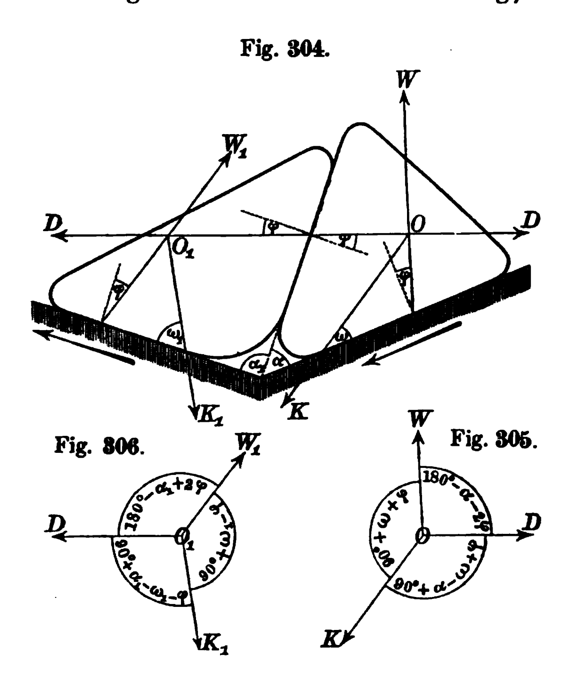


Fig. 304.
Fig. 306.
Fig. 305.

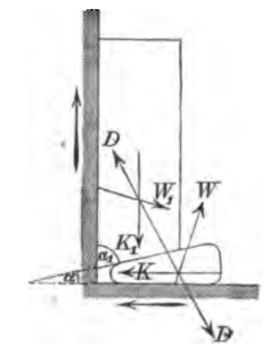
Wenn man in der obigen Gleichung $-\varphi$ statt $+\varphi$ substituirte, so erhielte man die Gleichung:

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\sin(\alpha - 2\varphi)}{\sin(\alpha_1 + 2\varphi)} \cdot \frac{\cos(\omega_1 + \varphi)}{\cos(\omega - \varphi)},$$

welche für den entgegengesetzten Fall gelten würde, in welchem der Keil links der treibende, und der Keil rechts der zurückweichende ist. Da indessen diese Gleichung durch einfache Vertauschung der auf die beiden Keile bezüglichen Buchstaben mit der vorigen wiederum identisch wird, so ist es überflüssig, diesen Fall als einen besonderen dem vorigen gegenüber zu stellen. Die Gleichung 257) kann vielmehr für beide Fälle zugleich benutzt werden, sobald die mit dem Index versehenen Buchstaben ein für alle Male zur Bezeichnung der auf den zurückweichenden Keil bezüglichen Grössen gewählt werden.

Um z. B. die Horizontalkraft K zu berechnen, welche erforderlich ist, um mittelst eines auf horizontaler Grundfläche verschiebbaren Keiles eine Säule vom Gewichte K_1 längs einer verticalen Wand gleichförmig hinaufzuschieben (Fig. 307), setzt man $\omega = 0 = \omega_1$ und $\alpha_1 = 90^0 - \alpha$; man erhält dann aus Gleichung 257):

Fig. 307.



$$\frac{K}{K_1} = \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\sin(90^0 - \alpha - 2\varphi)} \cdot \frac{\cos(-\varphi)}{\cos\varphi}, \text{ oder:}$$

$$258) \quad K = K_1 \operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi).$$

Diese Gleichung zeigt, dass $K = \infty$ wird, wenn $\alpha = 90^0 - 2\varphi$ wird, d. h. eine Wirkung des Keiles in der angegebenen Weise ist nur dann möglich, wenn $\alpha < 90^0 - 2\varphi$ ist. Setzt man $\alpha = 5^0$ und den Reibungscoefficienten $f = 0{,}08$, also den Reibungswinkel $\varphi = 4^0\,30'$, so erhält man:

$$K = K_1 \,.\, \operatorname{tg} 14^0 = K_1 \,.\, 0{,}249.$$

Wenn also ein Gewicht $K_1 = 1000$ Kil. in der angegebenen Weise gehoben werden soll, so muss die auf den Keil wirkende Horizontalkraft $K = 249$ Kil. sein.

Setzt man $-\varphi$ statt $+\varphi$, so erhält man statt Gleichung 258) die Gleichung:

$$259) \quad K = K_1 \,.\, \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi),$$

welche angiebt, wie gross die Kraft sein muss, wenn der Keil gleichförmig zurückweichen soll. Diese Kraft wird Null, wenn $\alpha = 2\varphi$, und negativ, wenn $\alpha < 2\varphi$ wird. Bei den oben angenommenen Zahlenwerthen ergäbe sich z. B. für letzteren Fall:

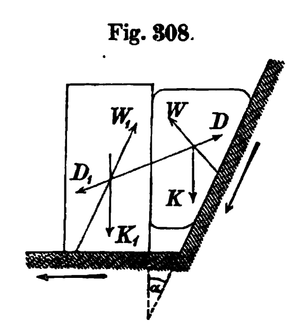
$$K = -70 \text{ Kil.},$$

d. h. um nach dem Eintreiben des Keiles denselben später wieder zurückzuziehen, dazu würde es einer von links nach rechts wirkenden Kraft von 70 Kil. bedürfen. (Die Gleichung 259 gilt jedoch für den vorliegenden Fall nur so lange, als α nicht kleiner als φ ist, weil andernfalls bei dem Zurückschieben des Keiles die Berührung zwischen der Säule und der verticalen Wand aufhören würde.)

Für den in Fig. 308 dargestellten Fall würde $\omega = \alpha$ und $\omega_1 = \alpha_1 = 90^0$ zu setzen sein; man erhält dann aus Gleichung 257):

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\cos 2\varphi} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha + \varphi)}.$$

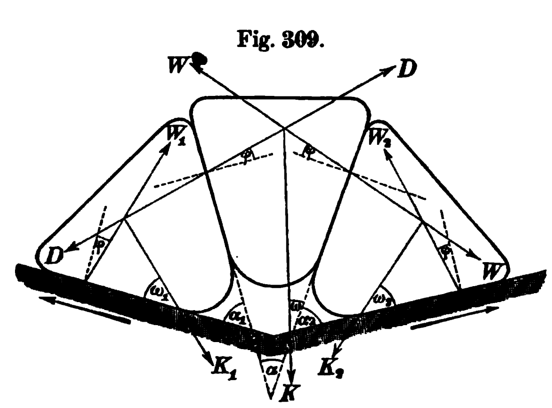
Fig. 308.



Wenn z. B. $\alpha = \varphi = 30^0$ ist, so wird $\frac{K}{K_1} = 2$; d. h. es müsste bei der angenommenen Grösse des Reibungscoefficienten $f = \text{tg}\, 30^0 = 0{,}58$ das Gewicht des parallelepipedischen Blocks mindestens halb so gross sein als das Gewicht des Keiles, wenn ersterer von letzterem nicht zur Seite geschoben werden soll.

In den Gleichgewichts-Bedingungen des in Fig. 304 dargestellten Keil-Systems ändert sich Nichts, wenn an der rechten Seite ebenfalls die feste Unterstützungsfläche ersetzt wird durch die Seitenfläche eines beweglichen (auf fester Ebene verschiebbaren) Keiles. Wenn bei dem in Fig. 309 dargestellten Keil-Systeme der Mittelkeil vorrückt, und die Seitenkeile zurückweichen, so wirken die Reibungswiderstände am Mittelkeile und am Seitenkeile links in demselben Sinne wie in Fig. 304. Folglich bleibt für das Verhältniss der beiden Kräfte K und K_1 die Gleichung 257) auch in diesem Falle noch gültig. Da ferner die Beziehungen zwischen Mittelkeil und Seitenkeil — abgesehen von der Verschiedenheit der gleichliegenden Winkel — an der rechten Seite genau dieselben sind wie an der linken Seite, so erhält man aus Gleichung 257) durch einfache Vertauschung der Buchstaben (d. h. durch Substitution von α_2 statt α_1, von ω_2 statt ω_1 und von $\alpha - \omega$ statt ω) für das Verhältniss $\frac{K}{K_2}$ die Gleichung:

Fig. 309.



$$260)\quad \frac{K}{K_2} = \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\sin(\alpha_2 - 2\varphi)} \cdot \frac{\cos(\omega_2 - \varphi)}{\cos(\alpha - \omega + \varphi)}.$$

Die beiden Gleichungen 257) und 260) enthalten die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, wenn die Verschiebungen der drei Keile (in dem durch die Pfeile angedeuteten Sinne) mit constanten Geschwindigkeiten erfolgen sollen, d. h. wenn ein anfangs vorhandener Bewegungszustand solcher Art unverändert sich fortsetzen soll. Sie gelten übrigens für jede beliebige Geschwindigkeit einer solchen Verschiebung, folglich auch noch für die Geschwindigkeiten Null. Das Erfülltsein jener Gleichungen bedingt daher unter Anderen auch die Fortdauer eines anfänglich vorhandenen Ruhezustandes.

§ 75.

Scheitrechtes Gewölbe.

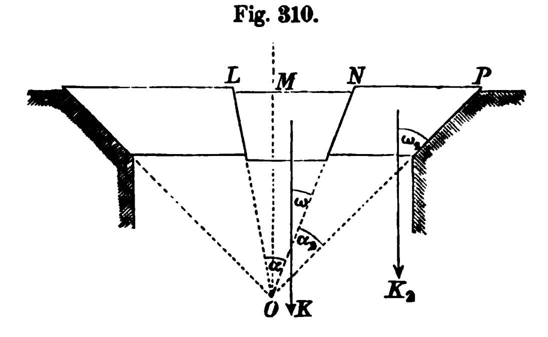
Setzt man $\varphi = 0$ in den obigen beiden Gleichungen, so erhält man die Bedingungen, unter welchen das System der drei Keile ganz ohne Reibung im Gleichgewicht sich halten würde. Die Gleichung 260) nimmt alsdann die Form an:

$$\frac{K}{K_2} = \frac{\sin\alpha\cos\omega_2}{\sin\alpha_2\cos(\alpha - \omega)}.$$

Wenn zugleich die Kräfte K und K_2 in den Gewichten der Keil-Stücke bestehen, so ist $\alpha_2 = \omega_2 - \omega$ zu setzen und man erhält die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{K}{K_2} = \frac{\sin[(\alpha - \omega) + \omega]\cos\omega_2}{\sin(\omega_2 - \omega)\cos(\alpha - \omega)} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \omega) + \operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\omega_2 - \operatorname{tg}\omega}.$$

Fig. 310.



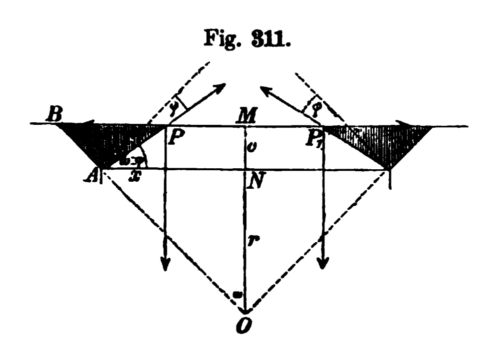
Bei einem scheitrechten Gewölbe (Fig. 310), dessen Fugen nach einem und demselben Punkte O convergiren, ist diese Bedingung unter allen Umständen erfüllt — wie auch immer die Grenzfugen der Gewölbestücke ausgewählt werden mögen. Denn die Gewichte K und K_2 sind resp. den Längen LN und NP proportional; es ist folglich:

$$\frac{K}{K_2} = \frac{LM + MN}{MP - MN} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \omega) + \operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\omega_2 - \operatorname{tg}\omega}.$$

Da auf gleiche Weise das Erfülltsein der anderen (auf das Mittelstück und das Endstück an der linken Seite sich beziehenden) Gleichgewichts-Bedingung

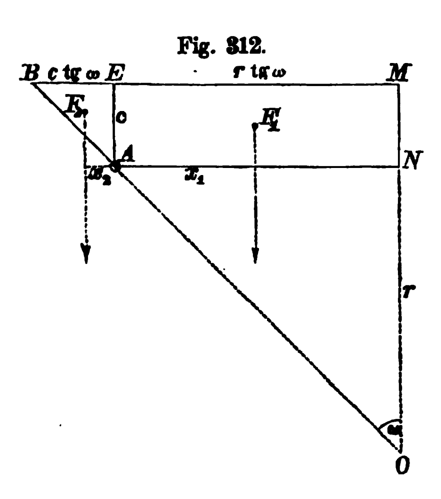
nachzuweisen ist, so folgt hieraus, dass bei einem solchen scheitrechten Gewölbe der Einsturz durch Gleiten auf die in Fig. 310 angedeutete Weise selbst dann nicht eintreten würde, wenn die Fugen-Flächen absolut glatt wären. Der etwaige Einsturz eines solchen Gewölbes ist daher immer mit einem Kippen der einzelnen Gewölbstücke verbunden, die Bedingungen der Stabilität sind demnach mittelst der in § 73 erklärten Methode zu bestimmen.

Fig. 311.



Betrachtet man zunächst jede der beiden Hälften als aus einem Stücke bestehend, so findet man durch Anwendung jener Methode, dass ein solches (von zwei auf festen Ebenen ruhenden einander gegenseitig stützenden Keilen gebildetes) symmetrisches Keil-System an der Grenze des Gleichgewichtes sich befindet, wenn die Schwerpunkte der beiden Keile resp. mit den Eckpunkten P und P_1 der in Fig. 311 schraffirten Flächen in denselben Verticalen liegen. Um diese Bedingung in Form einer Gleichung darzustellen, hat man den Abstand x der Verticalen des Schwerpunktes von dem Eckpunkte A das eine Mal durch den Reibungswinkel φ auszudrücken, das andere Mal nach der Lehre vom Schwerpunkte zu bestimmen, und die beiden auf solche Weise erhaltenen Ausdrücke einander gleich zu setzen. Aus Fig. 311 ergiebt sich für x die Gleichung:

Fig. 312.



$$261)\quad x = \frac{c}{\operatorname{tg}(\omega - \varphi)}.$$

Die zweite Gleichung erhält man aus Fig. 312, indem man (nach § 47) das Moment der ganzen Trapez-Fläche $ABMN$ gleich der algebraischen Summe der Momente der beiden Flächentheile setzt (nämlich des rechteckigen Theiles $F_1 = AMNE$ und des dreieckigen Theiles $F_2 = ABE$). Es ergiebt sich hieraus zunächst die Gleichung:

$$(F_1 + F_2)\, x = F_1\, x_1 - F_2\, x_2, \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{F_1\, x_1 - F_2\, x_2}{F_1 + F_2},$$

in welcher alsdann nach Fig. 312 folgende Werthe zu substituiren sind:

$$F_1 = c r \operatorname{tg} \omega, \qquad F_2 = \frac{c^2 \operatorname{tg} \omega}{2},$$

$$x_1 = \frac{r \operatorname{tg} \omega}{2}, \qquad x_2 = \frac{c \operatorname{tg} \omega}{3},$$

woraus sich für x der Werth ergiebt:

$$262) \quad x = \operatorname{tg} \omega \left(\frac{3r^2 - c^2}{6r + 3c}\right).$$

Durch Gleichsetzung der beiden Gleichungen 261) und 262) erhält man die Gleichung:

$$\frac{c}{\operatorname{tg}(\omega - \varphi)} = \operatorname{tg} \omega \left(\frac{3r^2 - c^2}{6r + 3c}\right), \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tg}(\omega - \varphi) \operatorname{tg} \omega = \frac{c(6r + 3c)}{3r^2 - c^2}.$$

Diese Gleichung nimmt, wenn Zähler und Nenner auf der rechten Seite durch c^2 dividirt und das Verhältniss $\frac{r}{c} = n$ gesetzt wird, die Form an:

$$263) \quad \operatorname{tg}(\omega - \varphi) \operatorname{tg} \omega = \frac{6n + 3}{3n^2 - 1}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich jede der drei Grössen n, φ, ω bestimmen, sobald die zwei anderen gegeben sind. Bezeichnet man abkürzungsweise den numerischen Werth der beiden in dieser Gleichung einander gleich gesetzten Grössen mit z, so lässt dieselbe sich auch darstellen durch folgende zwei Gleichungen:

$$264) \quad \operatorname{tg}(\omega - \varphi) \operatorname{tg} \omega = z \quad \text{und} \quad 265) \quad \frac{6n + 3}{3n^2 - 1} = z.$$

Diese letztere Gleichung nimmt, für n aufgelöst, die Form an:

$$266) \quad n = \frac{1}{z}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{z(z + 3)}{3}}\right].$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich aus den gegebenen Werthen von ω und φ der Werth von n berechnen, sobald darin für z der aus Gleichung 264) sich ergebende Werth substituirt wird. Setzt man ferner in Gleichung 264):

$$\operatorname{tg}(\omega - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \varphi} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi = f,$$

so nimmt dieselbe, für f aufgelöst, die Form an:

$$267) \quad f = \frac{\operatorname{tg} \omega^2 - z}{\operatorname{tg} \omega (1 + z)}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich der erforderliche Werth des Reibungscoefficienten f berechnen, sobald ω und n (folglich nach Gleichung 265) auch z) gegeben sind. Wenn man endlich Gleichung 267) für $\operatorname{tg} \omega$ auflöst, so erhält man die Gleichung:

$$268) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{f(1 + z)}{2} + \sqrt{z + \left(\frac{f(1 + z)}{2}\right)^2},$$

aus welcher ω berechnet werden kann, wenn f und n (folglich nach Gleichung 265) auch z) gegeben sind.

Setzt man in der letzteren Gleichung $f = 0$, so erhält man die Gleichung:

$$269) \quad \operatorname{tg} \omega = \sqrt{z},$$

aus welcher für einen gegebenen Werth von n der Winkel ω berechnet werden kann, den die Fuge am Widerlager höchstens mit der Verticalen einschliessen darf, wenn bei absolut glatten Fugenflächen noch Gleichgewicht möglich sein soll. Aus dieser Gleichung ergeben sich für die Grössen n und ω folgende zusammengehörige Werthe:

$n =$	2,5275	5	50	100	∞
$z =$	1	0,446	0,0404	0,0201	0
$\omega =$	45°	33° 45′	11° 22′	8° 5′	0°

Setzt man (dem Reibungscoefficienten für Mauerwerk ungefähr entsprechend) den Reibungswinkel $\varphi = 30°$, also: $f = \operatorname{tg} 30° = 0{,}577$, so ergeben sich aus den obigen Gleichungen folgende zusammengehörige Werthe für jene drei Grössen:

$n =$	2,5275	5	10	20	30	40	50	100	∞
$z =$	1	0,446	0,2107	0,1026	0,0678	0,0506	0,0404	0,0201	0
$\omega =$	60°	50° 20′	42° 50′	37° 35′	35° 25′	34° 15′	33° 30′	31° 50′	30°

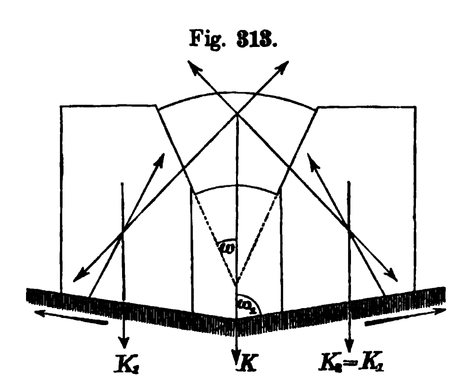
Welche Grösse auch immer der Reibungswinkel φ haben möge — sobald $\omega = 45° + \frac{\varphi}{2}$ ist, wird stets nach Gleichung 264) $z = 1$ (und nach Gleichung 265) $n = 2{,}5275$, d. h. wenn die Fuge am Widerlager den Winkel $45° + \frac{\varphi}{2}$ mit der Verticalen einschliesst, so muss unter allen Umständen die (in verticaler Richtung gemessene) Dicke des Gewölbes mindestens die Grösse haben: $c = \frac{r}{2{,}5275} = 0{,}396\, r$.

Die Werthe $z = 1$ und $\omega = 45° + \frac{\varphi}{2}$ bilden überhaupt die Grenzen, über welche hinaus die oben gefundenen Gleichungen nicht mehr zur Berechnung eines scheitrechten Gewölbes benutzt werden dürfen. Denn wenn man zur Vervollständigung der obigen Untersuchung die Winkel bestimmt, um welche bei den übrigen Fugen die Druckrichtung von der Normalen abweicht, so findet man, dass in solchen Fällen, wo ω grösser als $45° + \frac{\varphi}{2}$ ist, es nicht mehr die Widerlager-Fuge, sondern die um den Winkel $45° + \frac{\varphi}{2}$ geneigte Fuge ist, bei welcher die Abweichung der Druckrichtung von der Normalen und somit auch der zur Verhinderung des Gleitens erforderliche Reibungswinkel am grössten wird. Die hierdurch bedingte Beschränkung der Gültigkeit obiger Gleichungen kommt jedoch in Bezug auf praktische Anwendungen derselben kaum in Betracht, da bei wirklich ausgeführten Constructionen dieser Art solche Fälle, in denen ω grösser als 60° wäre, selten oder nie vorkommen.

Wenn bei dem in Fig. 309 dargestellten Keil-Systeme die Winkel auf der einen Seite den gleichliegenden Winkeln auf der anderen Seite gleich sind, so ergeben sich aus den beiden Gleichungen 257) und 260) gleiche Werthe für die beiden Kraft-

verhältnisse $\frac{K}{K_1}$ und $\frac{K}{K_2}$, und verschwindet überhaupt jeder Unterschied zwischen jenen beiden Gleichungen. Dieser Fall tritt z. B. dann ein, wenn durch die Richtungslinie der Kraft K die ganze Figur in zwei symmetrische Hälften zerlegt wird. In solchen Fällen lässt sich also die Bedingung des Gleichgewichtes in Bezug auf fortschreitende Verschiebung durch eine einzige Gleichung ausdrücken, und es ist dabei gleichgültig, ob die eine oder die andere von jenen beiden Gleichungen dazu benutzt wird.

Fig. 313.



Wenn ausserdem die Kräfte K, K_1, K_2 in den Gewichten der Keile bestehen, so ist in jenen Gleichungen $\alpha = 2\omega$ und $\alpha_1 = \omega_1 - \omega$ zu substituiren. Für den in Fig. 313 dargestellten Fall nimmt demnach die Gleichung 257) [oder auch die Gleichung 260)] die Form an:

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\sin(2\omega + 2\varphi)\cos(\omega_1 - \varphi)}{\sin(\omega_1 - \omega - 2\varphi)\cos(\omega + \varphi)} = \frac{2\sin(\omega + \varphi)\cos(\omega_1 - \varphi)}{\sin[(\omega_1 - \varphi) - (\omega + \varphi)]}$$

oder:

$$\frac{2K_1}{K} = \frac{\operatorname{tg}(\omega_1 - \varphi)}{\operatorname{tg}(\omega + \varphi)} - 1, \text{ also: } \frac{2K_1 + K}{K} = \frac{\operatorname{tg}(\omega_1 - \varphi)}{\operatorname{tg}(\omega + \varphi)},$$

und, wenn hierin $2K_1 + K = G$ gesetzt wird, so ergiebt sich die Gleichung:

$$270)\quad \frac{K}{G} = \frac{\operatorname{tg}(\omega + \varphi)}{\operatorname{tg}(\omega_1 - \varphi)},$$

in welcher K das Gewicht des mittleren Keiles und G das Gewicht des ganzen Keil-Systems bezeichnet. Aus dieser Gleichung lässt sich also der Grenzwerth K berechnen, welchen das Gewicht des Mittelkeiles nicht überschreiten darf, wenn durch das Gewicht desselben nicht die beiden andern Keile zur Seite geschoben werden sollen.

Für horizontale Lage der Unterstützungs-Ebenen ist $\omega_1 = 90^0$ zu substituiren, und wird:

$$\frac{K}{G} = \operatorname{tg}(\omega + \varphi)\operatorname{tg}\varphi.$$

Wenn man ferner beispielsweise $\omega = 15^0$ und $\varphi = 30^0$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{K}{G} = \operatorname{tg} 30^0 = 0{,}58.$$

In diesem Falle dürfte also das Gewicht des mittleren keilförmigen Blockes höchstens 58 Procent vom Gewichte des Ganzen betragen, wenn die beiden anderen Blöcke durch den Druck desselben nicht fortgeschoben werden sollen.

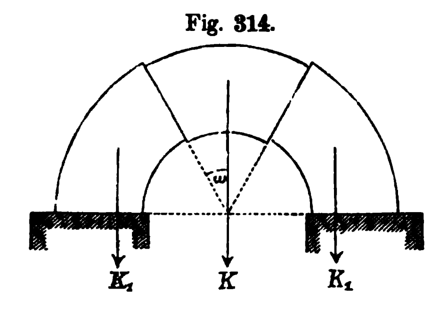
§ 76.

Kreis-Gewölbe.

Wenn die drei Keile die Formen von Sector-Stücken eines Kreisringes haben, so verhalten sich ihre Gewichte wie die zugehörigen Centri-Winkel. Für diesen Fall nimmt also die obige Gleichung die Form an:

$$271)\quad \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\operatorname{tg}(\omega + \varphi)}{\operatorname{tg}(\omega_1 - \varphi)}.$$

Fig. 314.



Setzt man in dieser Gleichung $\omega_1 = 90^0$, so erhält man für den auf horizontaler Grundebene ruhenden aus drei Stücken symmetrisch zusammengesetzten Halbkreisring (Fig. 314) die Bedingungsgleichung:

$$272)\quad \frac{\omega}{90} = \operatorname{tg}(\omega + \varphi) \operatorname{tg} \varphi.$$

Je nach der Grösse des Winkels ω ergeben sich aus dieser Gleichung*) verschiedene Werthe für den Reibungswinkel φ. Man erhält z. B. für:

$\omega =$	0^0	15^0	27^0	28^0	29^0	30^0	40^0	90^0
$\varphi =$	0^0	$15^0\,40'$	$17^0\,10'$	$17^0\,11'$	$17^0\,11'$	$17^0\,10'$	$16^0\,25'$	0^0

Der zum Gleichgewicht erforderliche Reibungscoefficient $f = \operatorname{tg}\varphi$ nimmt also den grössten Werth:

$$f_{max} = \operatorname{tg} 17^0\,11' = 0{,}309$$

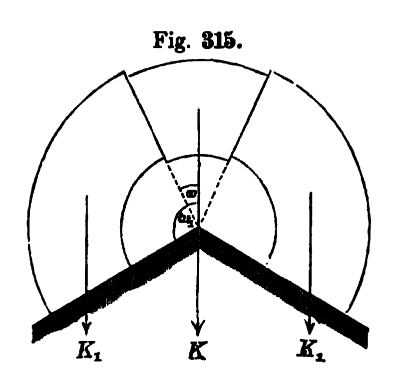
an, wenn ω zwischen 28 und 29 Grad beträgt. Hieraus folgt, dass bei einem unbelasteten Halbkreisgewölbe mit radialen Fugen nur

*) Durch Auflösung derselben für $\operatorname{tg}\varphi$ lässt sich die obige Gleichung auch auf die Form bringen:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\operatorname{tg}\omega}{2}\left(1 + \frac{\omega}{90}\right) + \sqrt{\frac{\omega}{90} + \left(\frac{\operatorname{tg}\omega}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{\omega}{90}\right)^2}.$$

dann Gleichgewicht möglich ist, wenn dasselbe aus einem Material besteht, dessen Reibungscoefficient mindestens die Grösse 0,309 hat; ferner dass bei einer Verminderung des Reibungscoefficienten unter diesen Werth herab zunächst in den um ungefähr 28,5 Grad gegen die Verticale geneigten Fugen das Gleiten eintreten würde, während bei den anderen Fugen kleinere Reibungscoefficienten schon ausreichen, um das Gleiten zu verhindern.

Fig. 315.



Die beiden Gleichungen 270) und 271) gelten auch für solche Fälle, in denen $\omega_1 > 90^0$ ist. Setzt man z. B. $\omega_1 = 120^0$ in Gleichung 271), so erhält man für den in Fig. 315 dargestellten Fall die Bedingungs-Gleichung:

$$273)\quad \frac{\omega}{120} = \frac{\operatorname{tg}(\omega + \varphi)}{\operatorname{tg}(120^0 - \varphi)}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich für ω und φ die zusammengehörigen Werthe:

$\omega =$	0°	15°	23°	24°	25°	26°	35°	90°
$\varphi =$	30°	35° 49′	36° 27′	36° 28′	36° 28′	36° 26′	35° 48′	16° 53′

Bei einem unbelasteten Kreisgewölbe, dessen halber Centri-Winkel 120° beträgt, müsste also der Reibungscoefficient mindestens die Grösse:

$$f_{max} = \operatorname{tg} 36^0\, 28' = 0{,}74$$

haben, wenn ein Gleiten nicht eintreten soll; und die Fugen, in welchen bei kleinerem Werthe des Reibungscoefficienten das Gleiten zunächst beginnen würde, bilden einen Winkel von ungefähr 24° mit der Verticalen.

Für ein Kreisgewölbe, dessen halber Centri-Winkel nur 60° beträgt, erhält man die Bedingungs-Gleichung:

$$274)\quad \frac{\omega}{60} = \frac{\operatorname{tg}(\omega + \varphi)}{\operatorname{tg}(60^0 - \varphi)},$$

aus welcher für ω und φ die zusammengehörigen Werthe sich ergeben:

$\omega =$	0°	15°	24°	25°	26°	30°	60°
$\varphi =$	0°	4° 45′	5° 23′	5° 23,5′	5° 23′	5° 18′	0°

Bei einem solchen Gewölbbogen reicht daher der Reibungscoefficient

$$f_{max} = \text{tg } 5^0\ 23{,}5' = 0{,}094$$

schon aus, um das Gleiten zu verhindern. Würde jedoch der wirkliche Reibungscoefficient kleiner als 0,094, so würde zunächst in den Fugen von 25° das Gleiten beginnen.

Bei einer Vergleichung der für $\omega_1 = 90^0$ und der für $\omega_1 = 60^0$ gefundenen Zahlenwerthe überzeugt man sich leicht, dass bei dem Halbkreisgewölbe ausser den Fugen von 28,5° es immer die horizontalen Fugen am Widerlager sind, in welchen gleichzeitig das Gleiten stattfindet, da für die Zwischenfugen — z. B. für die Fugen von 60° — als untere Begrenzungen der beiden Seiten-Keile ein kleinerer Reibungscoefficient schon ausreichen würde, um das Gleiten zu verhindern.

Die hier gefundenen Bedingungs-Gleichungen betreffen — wie im Eingange des § 74 ausdrücklich bemerkt wurde — ausschliesslich das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Verschiebungen der keilförmigen Gewölbstücke und bedingen den wirklichen Gleichgewichtszustand nur in den (vergleichsweise seltener vorkommenden) Fällen, in welchen die Ausdehnung der Fugenflächen oder die Dicke des Gewölbbogens so gross ist, dass eine Drehung der Gewölbstücke nicht in Frage kommt. Bei Gewölbconstructionen, wie sie in der Praxis vorkommen, pflegt die Dicke des Bogens meistens so klein zu sein, dass der etwaige Einsturz desselben fast immer mit einer Drehung der einzelnen Stücke verbunden ist. Die oben gefundenen Gleichungen bilden daher nur einen Theil der Gleichgewichts-Bedingungen, und darf aus dem Erfülltsein jener Gleichungen für sich allein noch keineswegs ein Schluss auf die Stabilität der Gewölbconstruction gezogen werden.

§ 77.

Keil-Presse.

Für den Fall, dass die beiden Kräfte K_1 resp. den festen Unterstützungsebenen parallel wirken — wie bei der in Fig. **316** dargestellten Keil-Presse die Gegendrücke der zusammengepressten Substanzen — ist $\omega_1 = 0$ und ausserdem (wegen symmetrischer Anordnung) $\alpha = 2\omega$ zu substituiren in der allgemeinen Gleichung 257), welche für diesen Fall die Form annimmt:

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\sin(2\omega + 2\varphi)\cos\varphi}{\cos(\omega + \varphi)\sin(\alpha_1 - 2\varphi)}, \text{ oder:}$$

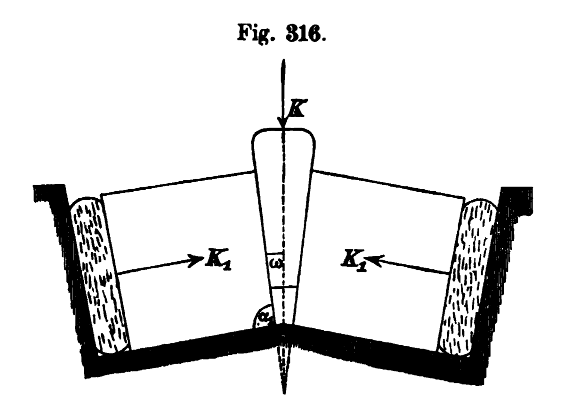
$$275)\quad \frac{K}{K_1} = \frac{2\sin(\omega + \varphi)\cos\varphi}{\sin(\alpha_1 - 2\varphi)}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich für jeden Werth des Winkels α_1 die zum Hervorbringen eines bestimmten Druckes K_1 erforderliche Kraft K berechnen.

Wenn man in obiger Gleichung $\alpha_1 = 90^\circ + \varphi$ substituirt, so erhält man für die in diesem Falle erforderliche Triebkraft $K = P$ die Gleichung:

$$276)\quad \frac{P}{K_1} = 2\sin(\omega + \varphi),$$

Fig. 316.



welche zeigt, dass das Verhältniss $\frac{P}{K_1}$ in diesem Falle genau übereinstimmt mit dem in Gleichung 255) für das Verhältniss $\frac{K}{D}$ gefundenen Werthe (sobald auch dort $\alpha = 2\omega$ substituirt wird). In diesem speciellen Falle wird also $K_1 = D$, d. h. es wird der von dem Mittelkeile auf den Seitenkeil übertragene Druck in unveränderter Richtung und Grösse auf die zusammenzupressende Substanz übertragen, ohne dass durch Reibung an der festen Unterstützungsebene Kraft verloren ginge. Die festen Unterstützungsebenen leisten in diesem Falle gar keinen Gegendruck und könnten daher ganz weggenommen werden, ohne dass der Gleichgewichtszustand dadurch gestört würde.

Setzt man ein anderes Mal $\alpha_1 = 90^\circ - \omega$ in der Gleichung 275), so erhält man für die bei horizontaler Lage der Unterstützungsebene erforderliche Triebkraft Q die Gleichung:

$$277)\quad \frac{Q}{K_1} = \frac{2\sin(\omega + \varphi)\cos\varphi}{\cos(\omega + 2\varphi)},$$

welche durch Gleichung 276) dividirt die Form annimmt:

$$278)\quad \frac{Q}{P} = \frac{\cos\varphi}{\cos(\omega + 2\varphi)}.$$

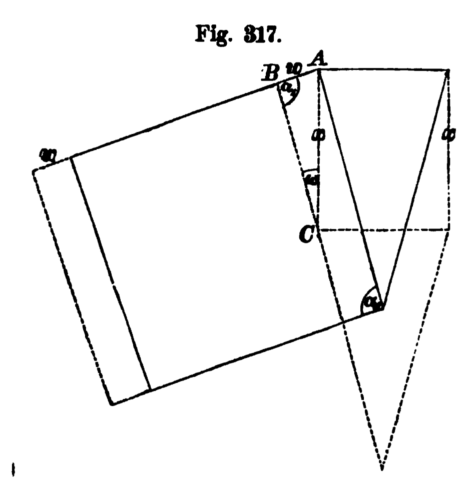
Setzt man beispielsweise $\varphi = 5^0\ 45'$ (also $\operatorname{tg}\varphi = f = 0{,}1$) und $\omega = 2^0\ 30'$, so wird:

$$\frac{P}{K_1} = 0{,}287,\quad \frac{Q}{K_1} = 0{,}294 \quad \text{und} \quad \frac{Q}{P} = 1{,}025.$$

Die zum Hervorbringen des Druckes K_1 erforderliche Triebkraft ist also bei horizontalen Gleitflächen um 2,5 Procent grösser als in dem Falle, wenn die Gleitflächen um $90^0 + 5^0\ 45' + 2^0\ 30'$ gegen die Verticale oder um $8^0\ 15'$ gegen die Horizontale geneigt sind.

Um die beiden verschiedenen Anordnungen ihrem mechanischen Werthe nach mit einander zu vergleichen, darf jedoch nicht lediglich die Kleinheit der zum Ueberwinden eines gegebenen Widerstandes erforderlichen Triebkraft K als Maassstab gewählt werden — denn eine Verkleinerung der Grösse K liesse sich auch durch eine Verkleinerung des Winkels ω erreichen — sondern es müssen die mechanischen Arbeiten mit einander verglichen werden, welche von der Triebkraft in jenen beiden Fällen verrichtet werden, um die gegebenen Widerstände K_1 längs einer gegebenen Strecke w zu überwinden.

Fig. 317.



Für das Verhältniss der Wegeslängen x und w, welche der vordringende Mittelkeil und die zurückweichenden Seitenkeile gleichzeitig zurücklegen, ergiebt sich aus dem Dreieck ABC (Fig. 317) der Werth:

$$279)\quad \frac{x}{w} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\omega}.$$

Wenn man die beiden Gleichungen 275) und 279) mit einander multiplicirt und durch zwei dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$280)\quad \frac{Kx}{2K_1 w} = \frac{\sin(\omega + \varphi)\cos\varphi\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - 2\varphi)\sin\omega}.$$

Auf der linken Seite steht im Zähler die von der Triebkraft K zu leistende Arbeit, und im Nenner die bei Ueberwindung der Widerstände K_1 producirte (Nutz-) Arbeit. Wenn man die letztere mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet, ferner mit $\mathfrak{A}_p$ die Arbeit, welche die Triebkraft zu verrichten hat, wenn die Gleitflächen um den Winkel $\omega + \varphi$ gegen die Horizontale geneigt sind und mit $\mathfrak{A}_q$ die bei horizontalen Gleitflächen von der Triebkraft zu verrichtende Arbeit, so erhält man aus Gleichung 280) nach Substitution der entsprechenden Werthe für α_1 die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{A}} = \frac{\sin(\omega + \varphi)\cos\varphi}{\sin\omega},$$

$$\frac{\mathfrak{A}_q}{\mathfrak{A}} = \frac{\sin(\omega + \varphi)\cos\varphi\cos\omega}{\sin\omega\cos(\omega + 2\varphi)},$$

und wenn man die letztere durch die erstere dividirt, so erhält man für das Verhältniss der in jenen beiden Fällen von der Triebkraft zu verrichtenden Arbeiten den Werth:

$$281)\quad \frac{\mathfrak{A}_q}{\mathfrak{A}_p} = \frac{\cos\omega}{\cos(\omega + 2\varphi)},$$

und speciell für die oben angenommenen Winkel $\omega = 2^0\,30'$ und $\varphi = 5^0\,45'$ den Werth:

$$\frac{\mathfrak{A}_q}{\mathfrak{A}_p} = \frac{0{,}999}{0{,}9703} = 1{,}03.$$

Die zum Hervorbringen einer vorgeschriebenen Arbeitsgrösse von der Triebkraft zu leistende Arbeit beträgt also (für die hier angenommenen Grössen der Winkel ω und φ) bei horizontalen Gleitflächen etwa 3 Procent mehr, als bei Flächen, welche um $8^0\,15'$ gegen die Horizontale geneigt sind.

§ 78.

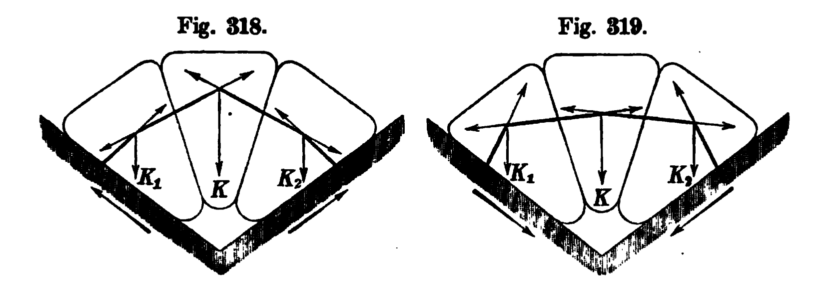
Druck- oder Stütz-Linien.

Die in § 74 gefundenen allgemeinen Gleichungen 257) und 260) geben in Bezug auf das ruhende Keil-System nur die Grenzwerthe an, über welche hinaus die Kraftverhältnisse $\frac{K}{K_1}$ und $\frac{K}{K_2}$ nicht wachsen können, ohne dass ein Vorrücken des Mittelkeils und ein Zurückweichen der Seitenkeile beginnt; ebenso, wenn darin $-\varphi$ statt $+\varphi$ substituirt wird, die Grenzen unter welche hinab jene Kraftverhältnisse nicht abnehmen

dürfen, ohne dass ein Zurückweichen des Mittelkeiles und ein Vorrücken der Seitenkeile eintritt. Die Gleichgewichts-Bedingungen des ruhenden Keil-Systems erfordern also nur, dass jene Kraftverhältnisse zwischen den Grenzen liegen, welche in dem einen und dem anderen Falle aus den obigen Gleichungen sich ergeben, und innerhalb dieser Grenzen giebt es unendlich viele verschiedene Werthe derselben, welche den Gleichgewichts-Bedingungen genügen.

Dasselbe gilt auch in Bezug auf die von jenen Kräften hervorgerufenen Gegendrücke, welche von den festen Ebenen auf die Keile, und von den letzteren auf einander gegenseitig übertragen werden. Nur in den beiden Grenzfällen ergeben sich bestimmte Richtungen und Grössen für diese Druckkräfte, insofern dieselben alsdann immer um den Reibungswinkel von den Normalen der Druckflächen abweichen müssen — in dem einen Grenzfalle wie in Fig. **318**, in dem anderen Falle wie in Fig. **319**. In jedem

Fig. 318. Fig. 319.

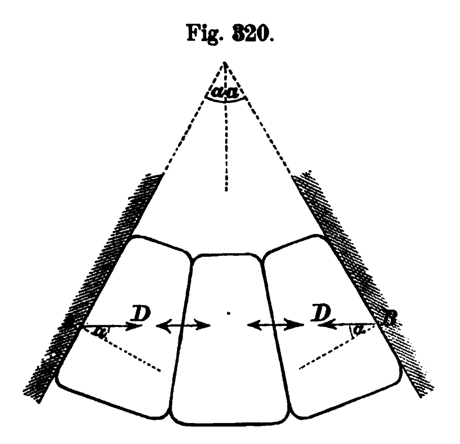


dieser beiden Fälle lässt sich zwischen den beiden Punkten A und B als Endpunkten nur auf eine Weise eine gebrochene Linie so legen, dass die Seiten derselben die Richtungslinien der einzelnen Druckkräfte darstellen. (Diese gebrochene Linie stellt zugleich die labile Gleichgewichtsform einer in den Punkten A und B unterstützten Stangenverbindung dar, deren drei Gelenkpunkte die Angriffspunkte der Kräfte K, K_1 und K_2 bilden; und die beiden allgemeinen Gleichungen des § 74 können daher auch als Gleichgewichts-Bedingungen einer solchen Verbindung von vier Stangen benutzt werden. Vergl. Fig. **229**.) In jedem Zwischenfalle dagegen — d. h. sobald die Grössen der beiden Kraftverhältnisse $\frac{K}{K_1}$ und $\frac{K}{K_2}$ innerhalb der oben angegebenen Grenzwerthe liegen — lässt sich zwischen den beiden Punkten

A und B bei genügender Länge der Fugen auf unendlich viele verschiedene Arten eine gebrochene Linie so legen, dass die Seiten derselben als Richtungslinien der einzelnen Druckkräfte gelten können. Die wirkliche Form dieser Druck- oder Stütz-Linie wird in jedem bestimmten Falle bedingt durch die Richtungen und Grössen der von den beiden festen Ebenen auf das Keil-System übertragenen Druckkräfte, hängt also ab von der Art und Weise, in welcher das Keil-System zwischen die beiden festen Ebenen hineingezwängt wurde.

Diese Unbestimmtheit wird um so grösser, je kleiner die Summe der Convergenzwinkel der drei Keile wird, und wenn die letztere kleiner ist als der doppelte Reibungswinkel, so können die Drücke D, D der festen Ebenen gegen das Keil-System unendlich gross werden, ohne dass eine Störung des Gleichgewichtes eintritt. Denn der Winkel α, um welchen die rechtwinkelig zur Halbirungslinie des Convergenzwinkels der beiden festen Ebenen gezogene Linie AB von den Normalen derselben abweicht, ist in diesem Falle kleiner als der Reibungswinkel (Fig. 320), und wenn die Drücke D, D in die Richtungslinie AB fallen, so halten dieselben für sich allein wirkend bei jeder beliebigen Grösse einander im Gleichgewicht, in welchem Falle die gerade Linie AB selbst die Druck-Linie bildet. Je grösser aber diese Drücke sind, d. h. je fester das Keil-System zwischen den beiden Wänden eingeklemmt sich befindet, um so mehr wird auch den sonstigen auf die Keile etwa wirkenden Kräften K, K_1, K_2 jede beliebige Grösse und Richtung gegeben werden können, ohne dass eine Störung des Gleichgewichtes durch sie hervorgebracht würde (vergl. Fig. 294).

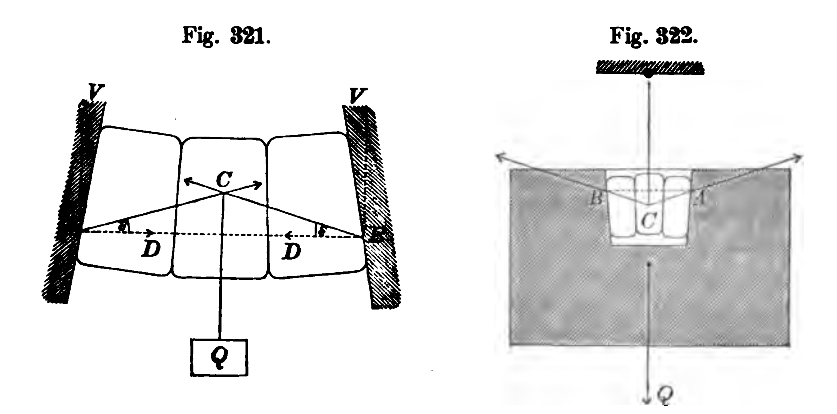
Fig. 320.



Wenn z. B. der mittlere von den drei (gewichtlos gedachten) Keilen mit einem Gewichte Q belastet wird, so nimmt zwar die Drucklinie eine von der horizontalen AB abweichende Form ACB an, insofern nunmehr zu dem horizontalen Gegendruck D noch

eine verticale Seitenkraft $V = \frac{1}{2} Q$ an jeder von beiden Unterstützungsstellen hinzutritt (Fig. 321). Diese Abweichung ist aber um so kleiner, je kleiner das Verhältniss $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{V}{D} = \frac{\frac{1}{2} Q}{D}$ ist, oder je grösser der Druck D im Verhältniss zur Grösse des angehängten Gewichtes war. Es ist also nur nöthig, beim Hineinzwängen des Keil-Systems zwischen die Wände einen hinreichend grossen Druck hervorzubringen — bevor noch das Gewicht Q zur Wirkung gelangte — um zu erreichen, dass die nachherige Abweichung der Drucklinie von der Horizontalen beliebig klein und innerhalb der durch den Reibungswinkel bedingten Grenzen bleibt. Bei diesem sowohl als bei dem umgekehrten in Fig. 322 dargestellten Falle

Fig. 321. Fig. 322.



ist demnach die Möglichkeit des Gleichgewichtes nur an die Bedingung geknüpft, dass die Winkel zwischen den äusseren Fugen und der Verticalen kleiner sein müssen als der Reibungswinkel.

Die Möglichkeit des Gleichgewichtes eines solchen zwischen zwei festen Wänden eingeklemmten mit Gewichten belasteten Keil-Systems ist dagegen vollkommen unabhängig von der Anzahl der Keilstücke oder von der Anzahl der Fugen. Wenn eine gerade Linie durch sämmtliche Fugen so hindurchgelegt werden kann, dass die Abweichung dieser Linie von der Normalen der einzelnen Fugen überall kleiner ist als der Reibungswinkel, so ist hinreichender Druck die einzige Bedingung, von welcher der Gleichgewichtszustand abhängt.

Der kleinste zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustan-

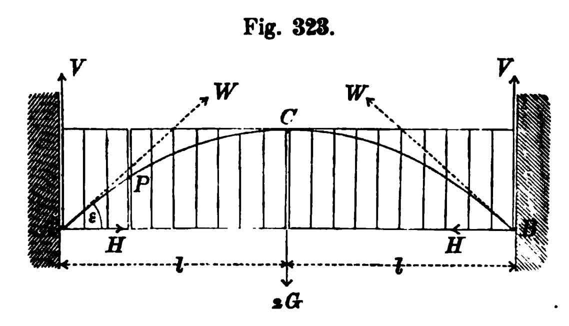
des noch ausreichende Druck wird in diesem Falle entweder durch die Grösse des Reibungswinkels oder durch die Länge der Fugen — durch die Lage von deren Endpunkten — bedingt. Denkt man sich die Horizontal-Drücke der Wände gegen das belastete Keil-System anfänglich unendlich gross — in welchem Falle die Drucklinie unter allen Umständen eine gerade Linie bildet — und nachher allmählich abnehmend so lange bis schliesslich eine Störung des Gleichgewichts eintritt, so findet man, dass auf zweierlei Weise die Grenze des Gleichgewichtszustandes erreicht werden kann; entweder dadurch, dass an einzelnen Stellen die Abweichung der Druck-Richtung von der Normalen der Fuge die Grösse des Reibungswinkels erreicht, oder auch dadurch: dass in einzelnen Fugen die Druck-Punkte bis an die oberen oder unteren Endpunkte der Fugen hinanrücken. Jedem dieser beiden Grenzfälle entspricht eine bestimmte Grösse des Horizontaldruckes, und der grössere von diesen beiden Werthen ist als das Minimum des zum Gleichgewicht erforderlichen Horizontaldruckes anzusehen.

§ 79.

Parabolische Stütz-Linie.

Um den kleinsten Horizontaldruck zu bestimmen, bei welchem ein zwischen verticalen Wänden eingeklemmtes System von Parallel-Platten noch im Gleichgewichtszustande sich befindet, hat man sich die beiden Hälften zunächst auf die in Fig. 323 angedeutete Art unterstützt zu denken, nämlich in dem oberen Endpunkte C der Mittel-Fuge einander gegenseitig stützend und in den unteren Endpunkten A und B der Aussen-Fugen von den verticalen Wänden gestützt.

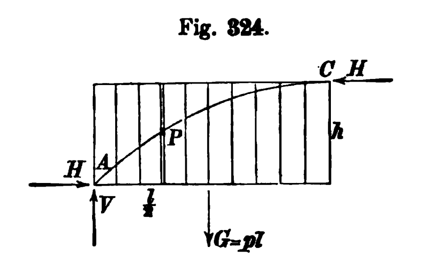
Fig. 323.



Bei dieser Art der Unterstützung ist jedenfalls der Druck in der Mittel-Fuge horizontal gerichtet. Denn wenn man für das Ganze die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den

Punkt B als Drehpunkt aufstellt, so erhält man für die verticale Seitenkraft des von dem Stützpunkte A geleisteten Gegendruckes die Gleichung: $0 = V.2l - 2Gl$ oder $V = G$, und da die Summe der auf die Hälfte AC wirkenden Verticalkräfte Null sein muss, so folgt hieraus, dass der in dem Punkte C wirkende Druck keine verticale Seitenkraft enthalten kann. Dieser Druck ist also horizontal gerichtet und gleich der horizontalen Seitenkraft H des von dem Stützpunkte A geleisteten Gegendruckes.

Fig. 324.



Wenn man ferner für die Hälfte AC (Fig. 324) die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Punkt A als Drehpunkt aufstellt, so erhält man die Gleichung:

$$282)\quad 0 = G \cdot \frac{l}{2} - H.h,$$

oder: $H = \frac{Gl}{2h}$.

Wenn die Gewichte der einzelnen Platten — wie vorausgesetzt werden soll — den Dicken derselben proportional sind, und das Gewicht einer Platte, deren Dicke gleich der Längeneinheit ist, mit p bezeichnet wird, so ist $G = pl$ zu setzen, und man erhält die Gleichung:

$$283)\quad H = \frac{pl^2}{2h}.$$

Um die Stelle P zu finden, in welcher irgend eine andere Fuge von der Stütz-Linie getroffen wird, hat man sich die beiden Platten-Gruppen AP und CP in dem Punkte P einander gegenseitig stützend zu denken und für das Stück CP die Gleichung der statischen Momente aufzustellen in Bezug auf den Punkt P als Drehpunkt; man erhält dann nach

Fig. 325.

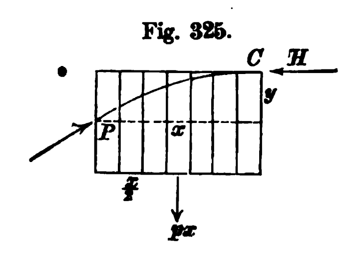


Fig. 325 die Gleichung:

$$284)\quad 0 = px\frac{x}{2} - H.y, \quad \text{oder:} \quad H = \frac{px^2}{2y}.$$

Die Gleichsetzung der beiden in den Gleichungen 283) und 284) gefundenen Werthe von H führt alsdann zu der Gleichung:

$$285) \quad \frac{y}{h} = \frac{x^2}{l^2},$$

welche ihrer Form nach genau übereinstimmt mit der für die parabolische Kettenlinie gefundenen Gleichung 189) und zeigt, dass die Punkte, in welchen die einzelnen Fugen von der Drucklinie geschnitten werden, in einer Parabel liegen, deren Scheitelpunkt mit dem Punkte C zusammenfällt.

Die Abweichungen der Druckrichtungen von den Normalen der Fugen (also hier von den Horizontalen) sind am grössten bei den Stützpunkten A und B. Der Winkel ε, welchen die Mittelkraft W der Seitenkräfte V und H mit der Horizontalen einschliesst, ist zu bestimmen aus der Gleichung:

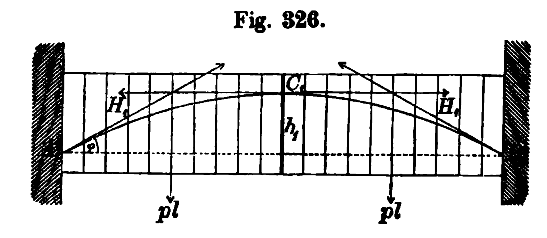
$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{V}{H} = \frac{p\,l}{H},$$

welche nach Substitution des in Gleichung 283) für H gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$286) \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\,h}{l}.$$

Dieser Werth ist zu vergleichen mit der Grösse des Reibungscoefficienten $f = \operatorname{tg} \varphi$. Wenn der Winkel ε kleiner ist (oder wenigstens nicht grösser) als der Reibungswinkel φ, so ist die in Gleichung 283) gefundene Grösse des Horizontaldruckes ausreichend. Wenn dagegen ε grösser ist als φ, so wird das Minimum des Horizontaldruckes durch die Grösse des Reibungswinkels bedingt. Die der Grenze des Gleichgewichts-Zustandes entsprechende Stütz-Linie $A_1\,C_1\,B_1$ (Fig. 326) hat alsdann eine kleinere Pfeilhöhe h_1, welche aus Gleichung 286) zu bestimmen ist, nachdem darin ε mit φ vertauscht wurde. Es ist also für diesen Fall zu setzen:

Fig. 326.



$$287) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\,h_1}{l}, \quad \text{oder:} \quad h_1 = \frac{l \operatorname{tg} \varphi}{2}.$$

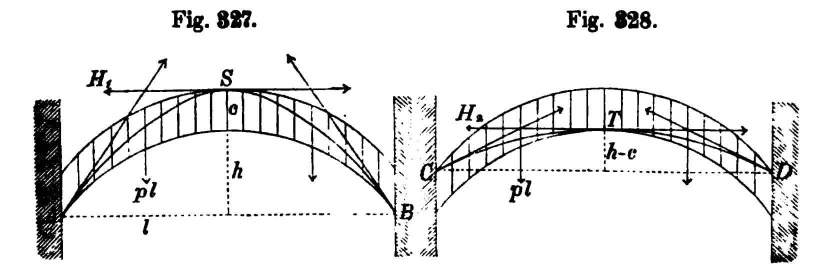
Dieser kleineren Pfeilhöhe entspricht ein grösserer Horizontaldruck H_1, für welchen nach Gleichung 283) der Werth sich ergiebt:

$$288)\quad H_1 = \frac{p\,l^2}{2\,h_1} = \frac{p\,l}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Wenn also das zwischen den beiden verticalen Wänden eingeklemmte Platten-System im Gleichgewicht sich befindet, so ist der wirkliche Horizontaldruck jedenfalls nicht kleiner als der grössere von den beiden Werthen $\frac{p\,l^2}{2h}$ und $\frac{p\,l}{\operatorname{tg}\varphi}$.

Die parabolische Form der Stütz-Linie wird ausschliesslich durch die gleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilte Belastung bedingt und ist im Uebrigen unabhängig von der Form der Linien, in welchen die Endpunkte der Fugen liegen. Die Durchschnittspunkte der Stütz-Linie mit den einzelnen Fugen bilden daher auch in dem Falle noch eine Parabel, wenn das Platten-System oben und unten krummlinig abgegrenzt ist, vorausgesetzt: dass die Fugen vertical gerichtet sind, und dass die Gewichte der Platten den Dicken derselben proportional sind (oder: dass die Fugen sämmtlich gleiche Länge haben). Wenn jedoch die Pfeilhöhen jener krummen Begrenzungslinien so gross (oder die Längen der Fugen so klein) sind, dass der tiefste Punkt der Mittelfuge höher liegt als die höchsten Punkte der Aussenfugen, so tritt hier der von dem vorigen abweichende Fall ein, dass nicht nur eine Verminderung, sondern auch eine Vergrösserung des Horizontaldruckes über eine gewisse Grenze hinaus eine Störung des Gleichgewichtes zur Folge hat.

Denkt man sich die beiden Hälften des Systems das eine Mal — wie in Fig. 327 angedeutet — in den tiefsten Punkten A



und B der Aussenfugen an die festen Wände, und in dem höchsten Punkte S der Mittelfuge an einander gegenseitig sich anlehnend, so erhält man nach Gleichung 283) für die Grösse des Horizontaldruckes entsprechend dieser Art der Unterstützung den Werth:

$$289)\quad H_1 = \frac{p\,l^2}{2\,(h+c)}.$$

Wenn man dagegen ein anderes Mal — wie in Fig. 328 angedeutet — den tiefsten Punkt T der Mittelfuge und die höchsten Punkte C und D der Aussenfugen als Stützpunkte betrachtet, so erhält man für den Horizontaldruck die Gleichung:

$$290)\quad H_2 = \frac{p\,l^2}{2\,(h-c)}.$$

Es ist ferner derjenige Horizontaldruck, bei welchem die Stütz-Linie an den Endpunkten um den Reibungswinkel φ von der Horizontalen abweichen würde, nach Gleichung 288):

$$291)\quad H_3 = \frac{p\,l}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Wenn also das Platten-System im Gleichgewichtszustande sich befindet, so ist der wirkliche Horizontaldruck jedenfalls nicht grösser als H_2 und nicht kleiner als der grössere von den beiden Werthen H_1 und H_3. Der Gleichgewichtszustand ist daher nur dann überhaupt möglich, wenn $H_2 \geqq H_3$ ist, oder wenn die Bedingung erfüllt ist:

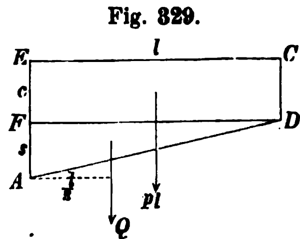
$$292)\quad \operatorname{tg}\varphi \geqq \frac{2\,(h-c)}{l}.$$

§ 80.

Stütz-Linie für ungleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilte Belastung.

Wenn die Länge der Fugen von der Mittte aus nach den Seiten hin gleichförmig zunimmt, so kann das Gewicht der einen Hälfte $AECD$ (Fig. 329) als aus zwei Theilen bestehend angesehen werden, deren Gewichte sich verhalten wie die Flächeninhalte des Rechtecks $FECD$ und des Dreiecks AFD. Wenn also $p\,l$ das Gewicht des ersteren ist, so ergiebt sich für das Gewicht des letzteren die Grösse:

Fig. 329.



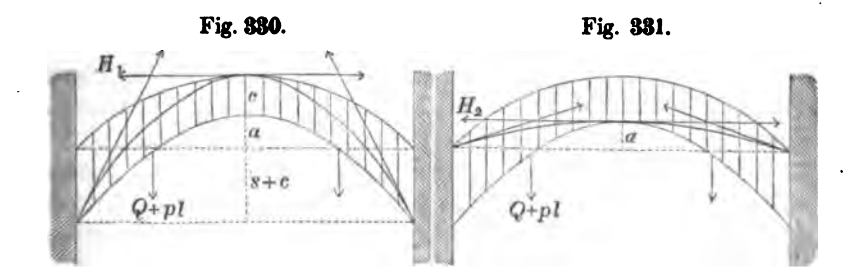
$$293)\quad Q = \frac{1}{2}\,\frac{s}{c}\,p\,l.$$

Das statische Moment des Gewichtes der ganzen Hälfte in Bezug auf den Punkt A ist also:

$$294)\quad \mathfrak{M} = \frac{p\,l^2}{2} + \frac{s}{c} \cdot \frac{p\,l^2}{6} = \frac{p\,l^2}{6}\left(3 + \frac{s}{c}\right).$$

Die Grösse dieses Momentes bleibt genau dieselbe, wenn das Platten-System — wie bei den in Fig. **330** und Fig. **331** darge-

Fig. **330**. Fig. **331**.



stellten Fällen — oben und unten krummlinig (statt geradlinig) abgegrenzt ist — vorausgesetzt, dass die Längen der Fugen dieselben Grössen behalten (folglich auch das Gesetz der Lastvertheilung dasselbe bleibt). Hiernach ergiebt sich für den kleinsten Horizontaldruck — entsprechend der in Fig. **330** dargestellten Form und Lage der Stütz-Linie — die Gleichung:

$$295)\quad H_1\,(s + a + 2\,c) = \mathfrak{M},$$

und für den grössten Horizontaldruck — entsprechend der in Fig. **331** dargestellten Lage der Stütz-Linie — die Gleichung:

$$296)\quad H_2\,a = \mathfrak{M},$$

endlich für denjenigen Horizontaldruck, bei welchem die Richtung des von der festen Wand ausgehenden totalen Gegendruckes um den Reibungswinkel φ von der Horizontalen abweicht, die Gleichung:

$$297)\quad \frac{Q + p\,l}{H_3} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Bei vorhandenem Gleichgewichtszustande liegt also der wirkliche Horizontaldruck jedenfalls zwischen folgenden zwei Grenzwerthen: den oberen bildet der aus Gleichung 296) zu bestimmende Werth:

$$298)\quad H_2 = \frac{p\,l^2}{6\,a}\left(3 + \frac{s}{c}\right),$$

den unteren Grenzwerth bildet der grössere von den beiden resp. aus den Gleichungen 295) und 297) zu bestimmenden Werthen:

$$299)\quad H_1 = \frac{p\,l^2}{6\,(s + a + 2\,c)}\left(3 + \frac{s}{c}\right) \text{ und}$$

$$300)\quad H_3 = \frac{p\,l}{\operatorname{tg}\varphi}\left(1 + \frac{s}{2\,c}\right).$$

Vorausgesetzt sind bei diesem, sowie auch bei dem vorigen Falle, solche Formen der Begrenzungscurven, bei welchen die verschiedenen Stütz-Linien überall in das Innere der von jenen beiden Curven eingeschlossenen Fläche hineinfallen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so hat im Uebrigen die Form jener Curven keinen Einfluss auf die Grenzwerthe des Horizontaldruckes.

Wenn irgend eine den Gleichgewichts-Bedingungen entsprechende — also zwischen den obigen Grenzen liegende — Grösse des Horizontaldruckes mit H bezeichnet und als eine gegebene Grösse angenommen wird, so lässt sich alsdann die Form derjenigen Stütz-Linie, welche dieser Grösse des Horizontaldruckes entspricht, auf folgende Weise ermitteln. Es kann zunächst die Pfeilhöhe h dieser Stütz-Linie bestimmt werden aus der Gleichung:

$$301)\quad Hh = \mathfrak{M} = \frac{p\,l^2}{6}\left(3 + \frac{s}{c}\right).$$

Um ferner die Lage des Punktes P zu finden, in welchem die in der Entfernung x von der Mitte liegende Fuge von der Stütz-Linie geschnitten wird, bildet man für das Stück PS (Fig. 332) die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Punkt P. Das Gewicht dieses Stückes setzt sich zusammen aus den beiden Theilen px und G, welcher letztere zu der ganzen ungleichförmig vertheilten Last Q sich verhält wie x^2 zu l^2; es ist also nach Gleichung 293):

Fig. 332.

$$G = Q \cdot \frac{x^2}{l^2} = \frac{p\,s}{2\,c\,l} \cdot x^2.$$

Die Gleichung der statischen Momente für das Stück PS ist demnach:

$$302)\quad Hy = \frac{p\,x^2}{2} + \frac{p\,s}{c\,l} \cdot \frac{x^3}{6}.$$

Wenn man diese letztere Gleichung dividirt durch Gleichung 301), so erhält man als Gleichung der gesuchten Stütz-Linie:

$$303)\quad \frac{y}{h} = \frac{(3\,c\,l + s\,x)\,x^2}{(3\,c + s)\,l^3}.$$

Eine Vergleichung derselben mit der früher gefundenen Gleichung 201) zeigt, dass auch in diesem Falle die Form der Stütz-Linie genau übereinstimmt mit der Gleichgewichtsform einer Kette, deren Belastung nach demselben Gesetze über die Horizontal-Projection vertheilt ist.

§ 81.

Stütz-Linien in Gewölben.

Auch bei nicht verticaler Fugen-Stellung kann das an den vorigen Beispielen erklärte Verfahren angewendet werden, um die einem bestimmt gegebenen Horizontaldrucke entsprechende Stütz-Linie ihrer Form und Lage nach zu bestimmen, und damit zugleich die Bedingungen der Möglichkeit des Gleichgewichtszustandes aufzufinden.

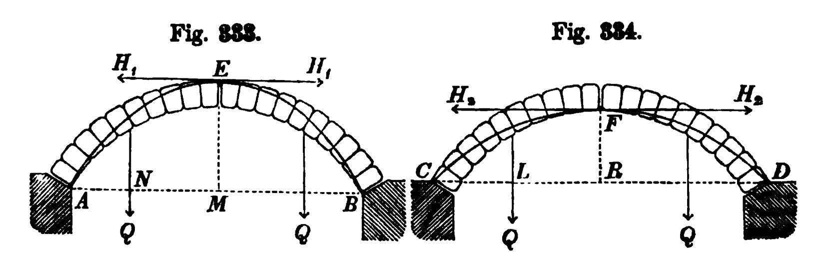
Der Gleichgewichtszustand eines von festen Widerlagern unterstützten, aus keilförmigen Stücken zusammengesetzten (auf beliebige Weise belasteten) Gewölbbogens ist an folgende zwei Bedingungen geknüpft:

Erstens: Es muss für den Horizontaldruck in der Scheitelfuge irgend eine solche Grösse und Lage nachweisbar sein, bei welcher die diesem Horizontaldruck entsprechende Stütz-Linie weder die äussere noch die innere Wölblinie irgendwo überschreitet.

Zweitens: Von den Winkeln, welche die bei Annahme dieser Stütz-Linie sich ergebenden Druckkräfte in den einzelnen Fugen mit den Normalen derselben einschliessen, darf zugleich keiner grösser sein als der Reibungswinkel.

Die letztere Bedingung betrifft die Sicherheit gegen Störung des Gleichgewichtes durch Gleiten der einzelnen Gewölbtheile, und da im § 76 bereits an mehreren Beispielen gezeigt wurde, auf welche Weise die zum Gleichgewichte erforderliche Grösse des Reibungswinkels bestimmt werden kann, so ist es hier — unter Voraussetzung einer genügenden Grösse des Reibungswinkels — nur noch nöthig, zu untersuchen, von welchen Umständen das Erfülltsein der ersteren Bedingung — betreffend Störung des Gleichgewichtes durch Umkippen der einzelnen Gewölbstücke — abhängt.

Um für den Horizontaldruck zunächst zwei vorläufige Grenzwerthe zu finden, zwischen denen der wirkliche Horizontaldruck des im Gleichgewichtszustande befindlichen Gewölbbogens jedenfalls liegen muss, hat man das eine Mal, wie in Fig. **333** angedeutet, den höchsten Punkt E der Scheitelfuge und die inneren Endpunkte A, B der Widerlagerfugen — das andere Mal, wie in Fig. **334** angedeutet, den tiefsten Punkt F der Scheitelfuge und



die äusseren Endpunkte C, D der Widerlagerfugen als Stützpunkte der beiden (symmetrisch vorausgesetzten) Gewölbhälften anzusehen, und beide Male für eine der beiden Gewölbhälften die Gleichung der statischen Momente aufzustellen in Bezug auf den Stützpunkt der Widerlagerfuge.

Für den unteren Grenzwerth H_1, entsprechend der Stütz-Linie AEB in Fig. **333**, erhält man die Gleichung:

$$304)\quad 0 = Q \,.\, \overline{AN} - H_1 \,.\, \overline{EM}, \quad \text{oder:} \quad H_1 = Q \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{EM}},$$

und für den oberen Grenzwerth H_2, entsprechend der Stütz-Linie CFD in Fig. **334**, erhält man die Gleichung:

$$305)\quad 0 = Q \,.\, \overline{CL} - H_2 \,.\, \overline{FR}, \quad \text{oder:} \quad H_2 = Q \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{FR}}.$$

Der wirkliche Horizontaldruck muss m i n d e s t e n s so gross sein als H_1, um zu verhindern, dass die beiden Gewölbhälften nach innen hin umkippen, und darf h ö c h s t e n s so gross sein als H_2, wenn dieselben nicht nach aussen hin umkippen sollen. Wenn jede der beiden Gewölbhälften aus einem ungetheilten Stücke bestände, so würden die beiden Grössen H_1 und H_2 zugleich die Grenzwerthe bilden, welche der Horizontaldruck w i r k l i c h erreichen dürfte, ohne das Gleichgewicht zu stören. Für den durch Fugen getheilten Gewölbbogen sind jedoch jene beiden Grössen nur in dem Falle als wirkliche Grenzwerthe des Horizontaldruckes

zu betrachten, wenn die Stütz-Linien, welche diesen Horizontaldrücken entsprechen, beide ganz in den zwischen der inneren und äusseren Wölblinie liegenden Flächenraum hineinfallen, was im Allgemeinen nicht der Fall sein wird. Es ist daher ferner zu untersuchen, um wie viel die Grenzwerthe des Horizontaldruckes einander näher rücken — oder welche andere Grenzwerthe an die Stellen der oben gefundenen treten — wenn die Bedingung hinzugefügt wird, dass die entsprechenden Stütz-Linien zugleich in das Innere jener Fläche hineinfallen sollen.

Um zunächst die Aenderung (Vergrösserung) zu bestimmen, welche der untere Grenzwerth H_1 durch Hinzufügung dieser Bedingung erleidet, hat man zu berücksichtigen, dass der im Scheitel wirkende Horizontaldruck nicht nur in Bezug auf die Widerlagerfuge, sondern auch in Bezug auf jede andere Fuge gross genug sein muss, um das Umkippen des oberhalb dieser Fuge liegenden Gewölbstückes nach innen zu verhindern. Für den kleinsten Werth, welcher in Bezug auf das Stück JE dieser Bedingung genügt, ergiebt sich aus Fig. 335 die Gleichung:

$$306) \quad H = G \cdot \frac{\overline{JN}}{\overline{EM}}.$$

Fig. 335.

E H N M J G C A

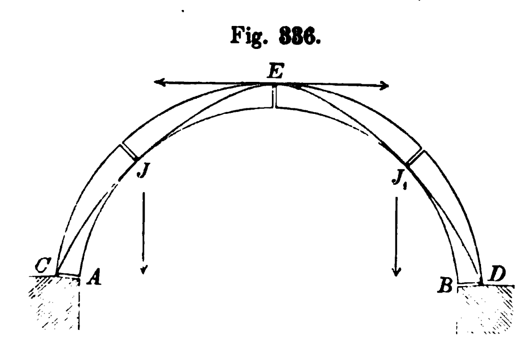
Wenn es sich zeigt, dass der auf solche Art zu bestimmende Werth von H in Bezug auf irgend eine der Zwischenfugen grösser wird als H_1, so erkennt man daraus, dass die dem Horizontaldrucke H_1 entsprechende Stütz-Linie AE (Fig. 333) stellenweise die innere Wölblinie überschritt. Damit dieses Ueberschreiten an keiner Stelle mehr stattfinde, hat man jenen Horizontaldruck zu vergrössern und zwar so lange, bis derselbe dem grössten aller Werthe gleich geworden ist, welche für die Grösse H in Bezug auf die einzelnen Zwischenfugen nach Gleichung 306) sich ergeben würden.

Diesem grössten Werthe H_{max} entspricht eine Stütz-Linie, welche die innere Wölblinie nicht mehr schneidet, sondern berührt und zwar eben bei derjenigen Zwischenfuge, für welche die Grösse H ihren grössten Werth annimmt.

Die Grösse H_{min} bildet den unteren (kleinsten) Grenzwerth des wirklichen Horizontaldruckes, und jene Zwischenfuge, für welche dieser Werth sich ergab, wird die Bruchfuge genannt (insofern bei abnehmendem Horizontaldrucke zuerst an dieser Stelle eine Störung des Gleichgewichtes, d. h. eine Drehung des oberen Gewölbtheiles um den inneren Endpunkt der Fuge erfolgen würde).

Soll der Gleichgewichtszustand überhaupt möglich sein, so darf ebendieselbe Stützlinie, welche die innere Wölblinie bei der Bruchfuge berührt, in ihrem weiteren Verlaufe zugleich nirgend die äussere Wölblinie überschreiten. Es darf also der zur Verhinderung des Umkippens nach innen erforderliche Horizontaldruck nicht grösser sein, als der kleinste Horizontaldruck, welcher in Bezug auf irgend eine andere Fuge schon ein Umkippen nach aussen hin bewirken würde. In der Regel wird es die Widerlagerfuge sein, in Bezug auf welche das Umkippen nach aussen hin am leichtesten möglich ist. Diesen Fall vorausgesetzt, würde das Gewölbe also an der Grenze der Stabilität sich befinden, wenn der in Bezug auf die Bruchfuge als erforderlich gefundene Horizontaldruck gerade gross genug wäre, um die ganze Gewölbhälfte um den äusseren Endpunkt der Widerlagefuge nach aussen hin umzukippen, in welchem Falle die jenem Horizontaldrucke entsprechende Stützlinie die Form $CJEJ_1D$ (Fig. 336) annehmen, und der etwaige Einsturz in der Weise erfolgen würde, dass die beiden Widerlagerfugen nebst der Scheitelfuge an der Innenseite, die beiden Bruchfugen aber an der Aussenseite anfangen sich zu öffnen. Die Stabilität ist dagegen gesichert (d. h. ein Ueberschuss derselben vorhanden), wenn jene Stützlinie — wie in Fig. 335 beispielsweise angedeutet — zwischen den Punkten A und C durch die Widerlagerfuge hindurchgeht. In diesem Falle giebt es mehr als eine Stützlinie für den Gewölbbogen, und unter allen diesen möglichen Stützlinien wird es eine geben, deren kleinster Abstand

Fig. 336.



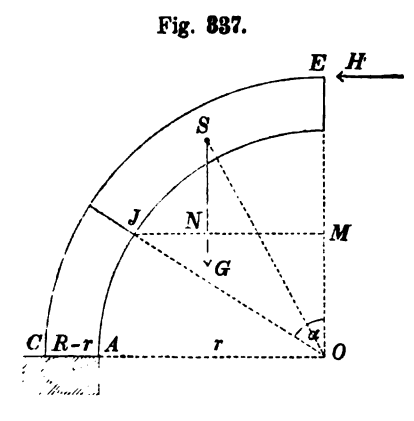
von den beiden Wölblinien grösser ist als bei den übrigen. Die Grösse dieses kleinsten Abstandes kann als Maass der Stabilität des Gewölbbogens gelten.

Um z. B. die Stabilität eines unbelasteten concentrischen Halbkreisgewölb-Bogens zu prüfen, hat man zunächst nach Gleichung 306) den unteren Grenzwerth des Horizontaldruckes zu bestimmen.

Der Hebelarm des Horizontaldruckes H in Bezug auf den Punkt J ist nach Fig. 337:

$$307)\quad EM = R - r\cos\alpha,$$

Fig. 337.



und der Hebelarm des Gewichtes G in Bezug auf denselben Punkt ist:

$$\overline{JN} = JM - NM$$
$$= r\sin\alpha - \overline{OS}\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Für die Grösse OS (als Schwerpunktsabstand der Fläche JE vom Kreismittelpunkte O) findet man nach der Lehre vom Schwerpunkte — indem man jene Fläche als Differenz zweier Sector-Flächen behandelt (s. Fig. 158 und Gleichung 160) — die Gleichung:

$$OS = \frac{2}{3}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha},$$

und nach Substitution dieses Werthes nimmt die vorige Gleichung die Form an:

$$308)\quad \overline{JN} = r\sin\alpha - \frac{4}{3}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right)\frac{(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2}{\alpha}.$$

Wenn ferner mit p das Gewicht des Gewölbbogens pro Flächeneinheit der Ringfläche bezeichnet wird, so ist:

$$309)\quad G = \frac{p(R^2 - r^2)\alpha}{2}.$$

Die Gleichung 306) nimmt nach Substitution der drei Werthe 307), 308), 309) die Form an:

$$H = \frac{p}{6}\left[\frac{3(R^2 - r^2)r\alpha\sin\alpha - 4(R^3 - r^3)(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2}{R - r\cos\alpha}\right]$$

oder: wenn darin $\frac{1-\cos\alpha}{2}$ statt $(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$ substituirt, und das Verhältniss $\frac{R}{r}$ mit n bezeichnet wird, die Form:

$$310)\quad H = \frac{pr^2}{6}\left[\frac{3(n^2 - 1)\alpha\sin\alpha - 2(n^3 - 1)(1 - \cos\alpha)}{n - \cos\alpha}\right].$$

In dieser Gleichung sind (nach Substitution des gegebenen Werthes der Zahl n) für den Winkel α probeweise die verschiedenen Werthe von 0° bis 90° zu substituiren: derjenige Werth von α, für welchen H am grössten wird, ist der Bruchwinkel, und der zugehörige Werth von H ist der untere Grenzwerth des Horizontaldruckes. Bei Ausführung dieser Rechnung findet man beispielsweise folgende zusammengehörige Werthe der drei Grössen n, α, H:

$n =$	1,30	1,25	1,20	1,15	1,10
$\alpha =$	62° 14′	61° 15′	59° 41′	57° 1′	53° 15′
$H =$	0,1433 pr^2	0,1285 pr^2	0,1114 pr^2	0,09176 pr^2	0,06754 pr^2:

Um den kleinsten Werth des Verhältnisses n zu finden, bei welchem noch Gleichgewicht möglich ist, hat man die auf solche Weise ermittelten Werthe von H zu vergleichen mit derjenigen Horizontalkraft K, welche in dem Punkte E angreifend dem Gewichte der ganzen Gewölbhälfte das Gleichgewicht halten würde in Bezug auf Drehung um den äusseren Endpunkt C der Widerlagerfuge.

Das statische Moment des Gewichtes der Gewölbhälfte in Bezug auf den Punkt C ist:

$$311)\quad \mathfrak{M} = pr^3 \left[\frac{\pi}{4} n (n^2 - 1) - \frac{1}{3}(n^3 - 1)\right],$$

und wenn man diese Grösse dem Producte $KR = Knr$ (als dem statischen Momente der Kraft K in Bezug auf denselben Punkt) gleichsetzt, so erhält man für K die Gleichung:

$$312)\quad K = pr^2 \left[\frac{\pi}{4}(n^2 - 1) - \frac{1}{3}\left(\frac{n^3 - 1}{n}\right)\right],$$

aus welcher für die beiden Grössen n und K z. B. folgende zusammengehörige Werthe sich ergeben:

$n =$	1,30	1,25	1,20	1,15	1,10
$K =$	0,235 pr^2	0,1876 pr^2	0,14335 pr^2	0,1023 pr^2	0,06463 pr^2.

Die Vergleichung der für H und K gefundenen Werthe zeigt, dass der gesuchte Werth von n zwischen 1,15 und 1,10 liegt, und bei weiterer Ausführung der Rechnung findet man, dass die Werthe von H und K einander gleich werden, wenn $n = 1,114$ ist, d. h. wenn:

$$R = 1,114\,r, \qquad \text{oder:}\quad R - r = \frac{2r}{17,544} \text{ ist.}$$

Das Gleichgewicht ist daher nur dann möglich, wenn die Dicke des Gewölbbogens mindestens den 17,544-ten Theil von dem inneren Durchmesser desselben beträgt.

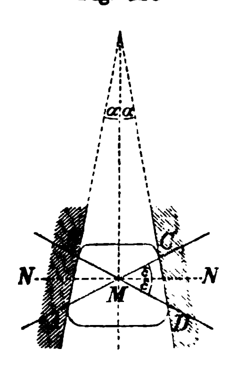
§ 82.

Frictions-Verbindungen.

Die Druckkräfte, welche auf die Seitenflächen eines zwischen zwei anderen Körpern eingeklemmten Keils von diesen Körpern

übertragen werden, können höchstens um den Reibungswinkel von den Normalen der Seitenflächen abweichen. Die Winkel, um welche eine rechtwinkelig zur Halbirungslinie des Convergenzwinkels der Seitenflächen gelegte gerade Linie NN von der Normalen der letzteren abweicht, sind dem halben Convergenzwinkel des Keiles gleich (Fig. 338). Wenn dieser halbe Convergenzwinkel α gerade gleich dem Reibungswinkel φ wäre, so würde also jene Normale NN die einzige mögliche Richtung für die Drucklinie bilden. Wenn dagegen α kleiner ist als φ, so ergiebt sich ein gewisser Spielraum für die möglichen Richtungen der Drucklinie, insofern dieselbe alsdann nach beiden Seiten hin um eine gewisse Grösse von der Richtung NN abweichen kann, ohne die durch den Reibungswinkel bedingten Grenzen zu überschreiten. Man findet den geometrischen Ort für alle Richtungen, welche (bei hinreichender Ausdehnung der Berührungsflächen) die Drucklinie möglicherweise annehmen kann, indem man den Winkel:

Fig. 338.



$$313)\quad \varepsilon = \varphi - \alpha$$

von der Normalen NN aus nach beiden Seiten hin abträgt. Die beiden auf solche Art gefundenen Richtungen AC und BD weichen resp. bei A und D um den Reibungswinkel φ von den Normalen der betreffenden Seitenflächen ab und bilden die Grenz-Richtungen, bis zu welchen die Drucklinie von der Richtung NN sich entfernen kann.

Es soll der Einfachheit wegen in Bezug auf den Punkt M, als Durchschnittspunkt der Halbirungslinie mit ihrer Normalen, eine solche Form und Lage des Keiles vorausgesetzt werden, bei welcher die in dem Punkte M einander durchkreuzenden Linien der grössten Abweichung die Berührungsflächen in ihren Grenzpunkten A, B, C, D treffen, der Kreuzungspunkt M kann alsdann abkürzungsweise der Mittelpunkt des Keiles genannt werden.

Die Construction des nach Gleichung 313) zu bestimmenden Winkels ε kann — in analoger Weise wie im § 70 die Construction des Reibungswinkels φ — benutzt werden zur geometrischen Veranschaulichung der Gleichgewichts-Bedingungen für ein belastetes Stangenpaar, welches auf die in Fig. 339 (als Aufriss)

und Fig. **340** (als Grundriss) angedeutete Art an zwei neben einander stehenden Vertical-Ständern aufgehängt ist mittelst keilförmiger zu beiden Seiten der Kreuzungsstellen eingeschobener Querstangen. Wenn man auf der Halbirungslinie des Kreuzungswinkels in den Mittelpunkten M und M_1 der Keil-Querschnitte Normalen errichtet und von diesen Normalen aus die Winkel ε abträgt, so bilden die auf solche Weise gefundenen Linien MO und M_1O die Grenz-Richtungen, bis zu welchen die Druckrichtungen W und W_1 von jenen Normalen abweichen können. Der Durchschnittspunkt O bildet daher den Grenzpunkt, bis zu welchem die Vertical-Ebene der Belastungen Q den Vertical-Ständern genähert werden kann, ohne dass ein Gleiten des Stangenpaares eintritt. (Die Stangen selbst sind hier wie früher als gewichtlos betrachtet.)

Fig. **339**.

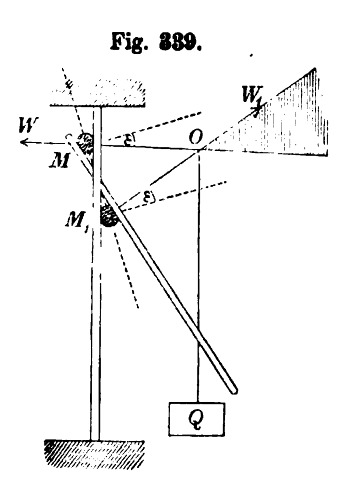
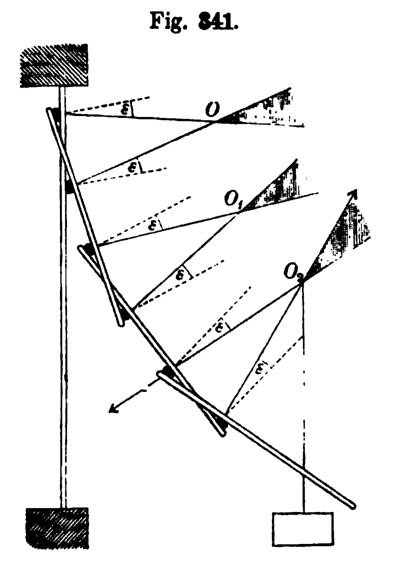


Fig. **340**.

Wenn an dem ersten beweglichen Stangenpaare ein zweites, und an diesem wiederum ein drittes Stangenpaar in gleicher Weise aufgehängt ist, so können die Gleichgewichts-Bedingungen durch Wiederholung des obigen Constructions-Verfahrens auf die in Fig. **341** angedeutete Art geometrisch dargestellt werden. Von den Durchschnittspunkten O, O_1, O_2 bildet der am weitesten rechts liegende den Grenzpunkt, bis zu welchem die Vertical-Ebene der Belastungen den Vertical-Ständern höchstens genähert werden darf, wenn an keiner Kreuzungsstelle ein Gleiten eintreten soll.

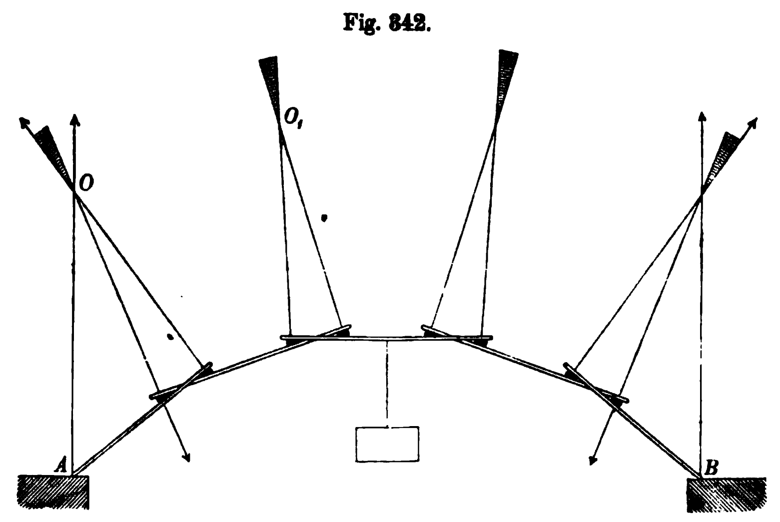
Das gleiche Constructions-Verfahren lässt sich auch auf den in Fig. **342** dargestellten Fall anwenden. Wenn von den verschiedenen — wie in dem vorigen Falle zu construirenden Durchschnittspunkten O, O_1 ... die am weitesten von der Mitte entfernt liegenden gerade in die Verticalen der Stützpunkte A, B

Fig. 341.



hineinfallen — wie in der Figur angegeben — so befindet sich das Stangen-System an der Grenze des Gleichgewichtszustandes. Je grösser die Längen der unteren Stangenpaare und je grösser in Folge dessen die Entfernungen der Stützpunkte von der Mitte sind, um so grösser wird die Sicherheit der Stabilität. Wenn dagegen die unteren Stangenpaare kürzer wären als in der Figur angegeben, so würde das Gleichgewicht nicht mehr möglich sein.

Fig. 342.



VIERZEHNTES CAPITEL.

Wirkung der Reibungswiderstände bei rotirenden Körpern.

§ 83.

Bedingungen der gleichförmigen Drehbewegung.

Nach der im § 39 gegebenen Erklärung befindet sich ein System von materiellen Punkten im Gleichgewichtszustande, wenn jeder einzelne materielle Punkt desselben im Gleichgewichtszustande sich befindet, d. h. wenn an jedem einzelnen materiellen Punkte die Mittelkraft sämmtlicher auf denselben wirkenden Kräfte Null ist. Jeder materielle Punkt eines gleichförmig um eine feste Achse sich drehenden Körpers bewegt sich gleichförmig längs der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser gleich der Entfernung des Punktes von der Drehachse ist. Bei einem in gleichförmiger Kreisbewegung begriffenen materiellen Punkte ist nach § 27 die Mittelkraft sämmtlicher wirkenden Kräfte unter allen Umständen gleich der Centripetal-Kraft (Gleichung 64), folglich von Null verschieden. Es befindet sich also in dem gleichförmig rotirenden Körper keiner von den ausserhalb der Drehachse liegenden materiellen Punkten im Gleichgewichtszustande, und darf daher nach der gegebenen Definition auch der ganze Körper nicht als ein im Gleichgewichtszustande befindliches System betrachtet werden — wenn auch die Drehbewegung eine gleichförmige ist.

Der Bewegungszustand des gleichförmig rotirenden Körpers kann indessen auch aufgefasst werden als relativer Ruhezustand in Bezug auf einen Raum, welcher die gleiche Drehbewegung ausführt. Es ist daher nur nöthig, nach der im § 38 gefundenen Regel an jedem einzelnen materiellen Punkte die Centrifugal-Kraft den sonstigen wirkenden Kräften noch hinzuzufügen, um zu erreichen, dass nunmehr auf jeden einzelnen materiellen Punkt, folglich auch auf den ganzen Körper, die Bedingungen des absoluten Gleichgewichtes angewendet werden dürfen.

Bei einem gleichförmig um eine bestimmte Achse sich drehenden Körper bilden die wirklich vorhandenen Kräfte mit den Centrifugal-Kräften der einzelnen materiellen Punkte zusammen ein Kräfte-

System, welches den allgmeinen Gleichgewichts-Bedingungen entspricht.

Die Centrifugal-Kräfte sind nach § 38 anzusehen als Kräfte, welche in den Richtungen der Drehungshalbmesser nach aussen wirken, ihre Richtungslinien schneiden die Drehachse, ihre statischen Momente in Bezug auf die Drehachse sind daher sämmtlich gleich Null. Denkt man sich die Drehachse des Körpers durch Widerstände fester Punkte — etwa durch Gegendrücke fester Zapfenlager — derartig festgehalten, dass nur von einer Art der Veränderung des Bewegungszustandes, nämlich von Aenderungen der Umdrehungsgeschwindigkeit, die Rede sein kann, so reducirt sich die Zahl der in Betracht kommenden Gleichgewichts-Bedingungen auf eine einzige, nämlich diejenige, welche ausdrückt, dass die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte in Bezug auf die Drehachse Null sein muss. Da nun die Centrifugal-Kräfte zu dieser Momenten-Summe keine Beiträge liefern, so ist in diesem Falle die Bedingung der Gleichförmigkeit der Drehbewegung identisch mit der Bedingung für die Fortdauer des absoluten Ruhezustandes, also ganz unabhängig von der Geschwindigkeit der Drehbewegung.

Was dagegen die von den festen Zapfenlagern geleisteten Gegendrücke betrifft, durch welche die Drehachse in unveränderlicher Lage erhalten wird, so wird deren Grösse im Allgemeinen durch die Grösse der Drehgeschwindigkeit wesentlich beeinflusst, insofern die zur Bestimmung jener Drücke anzuwendenden Gleichgewichts-Bedingungsgleichungen auch die Centrifugal-Kräfte enthalten und diese letzteren von der Drehgeschwindigkeit abhängen. Denkt man sich jedoch die Masse des Körpers um die Drehachse herum vollkommen symmetrisch vertheilt, in der Weise also, dass jedem einzelnen materiellen Punkte ein anderer von gleicher Masse in gleichem Abstande von der Drehachse gegenüberliegt, dessen Centrifugal-Kraft die des ersteren aufhebt, so bilden in diesem Falle die (je paarweise einander aufhebenden) sämmtlichen Centrifugal-Kräfte ein Kräfte-System, welches für sich allein schon den Gleichgewichts-Bedingungen genügt, und müssen daher die wirklich vorhandenen Kräfte für sich allein ebenfalls ein den Gleichgewichts-Bedingungen entsprechendes Kräfte-System bilden. Bei solcher Massenvertheilung sind demnach die Bedingungen des relativen Gleichgewichtes in jeder Beziehung identisch mit denen des absoluten Gleichgewichtes, folglich auch jene Gegendrücke

vollkommen unabhängig von der Drehgeschwindigkeit und ganz wie bei dem ruhenden Körper zu bestimmen.

Die Untersuchung des Einflusses der Centrifugal-Kräfte bei unsymmetrischer Massenvertheilung bleibt einem späteren Abschnitte vorbehalten. Bei den hier folgenden Untersuchungen werden ausschliesslich solche Fälle vorausgesetzt, in denen wegen Gleichgewichtes der Centrifugal-Kräfte es überhaupt nicht erforderlich ist, auf das Vorhandensein der Drehbewegung irgend Rücksicht zu nehmen.

§ 84.

Zapfenreibung.

Zwei auf einen festen Körper wirkende Kräftepaare halten einander im Gleichgewicht, wenn ihre Momente gleich, und ihre Drehungsrichtungen entgegengesetzt sind. Nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Erklärung wird also die Drehbewegung des rotirenden Körpers eine gleichförmige sein, wenn sämmtliche auf denselben wirkende Kräfte zwei Kräftepaare bilden von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehungsrichtungen. Umgekehrt: wenn ausser einem bestimmten Kräftepaare K, K noch andere Kräfte auf den rotirenden Körper wirken, so erfordert die Bedingung der Gleichförmigkeit der Drehbewegung, dass diese übrigen Kräfte zusammen ebenfalls ein Kräftepaar bilden von gleichem Momente und entgegengesetzter Drehungsrichtung.

Hiernach lässt sich das Moment $\mathfrak{M} = Kl$ des treibenden Kräftepaares bestimmen, welche gerade ausreicht, um die Drehbewegung einer horizontalen Welle vom Gewichte G trotz der Zapfenreibungswiderstände gleichförmig zu erhalten. Es soll angenommen werden, dass ausser den drei Kräften K, K, G nur noch diejenigen Kräfte wirken, welche von den cylindrischen Zapfenlagern auf die cylindrischen Oberflächen der Zapfen übertragen werden, und dass die letzteren ohne geklemmt zu sein (also mit einem gewissen beliebig klein zu denkenden Spielraume) in den Lagern sich drehen. Die Mittelkraft W der von den Zapfenlagern auf die Welle übertragenen Kräfte bildet eine zu jenen drei Kräften noch hinzukommende vierte wirkende Kraft und muss mit der Kraft G zusammen ein Kräftepaar bilden, folglich eben so gross sein als G und vertical aufwärts wirken.

Die Kraft W kann angesehen werden als die Mittelkraft aus dem normal gegen die Zapfenoberfläche, also in der Richtung

des Zapfenhalbmessers wirkenden Gegendrucke N und dem in tangentialer Richtung wirkenden Reibungswiderstande fN. Nach Cap. XIII weicht die Mittelkraft aus Normaldruck und Reibungswiderstand stets um den Reibungswinkel φ von der Richtung der Normalen ab, sobald — wie hier — ein wirkliches Gleiten stattfindet. Die Mittelkraft W wird also nur dann vertical aufwärts gerichtet sein, wenn die Berührung zwischen dem Zapfenlager und der Zapfenoberfläche an derjenigen Stelle P des Zapfenumfangs stattfindet, deren Halbmesser OP um den Reibungswinkel φ von der Verticalen abweicht (Fig. 343). Der Hebelarm des aus den beiden Kräften G und W ($= G$) bestehenden Kräftepaares ist also $\overline{OP}$. sin φ, und es ergiebt sich für das Moment $\mathfrak{M} = Kl$ des treibenden Kräftepaares die Gleichung:

Fig. 343.

$$314)\quad \mathfrak{M} = G \,.\, \varrho \,.\, \sin \varphi.$$

Das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Product wird das Moment des Zapfenreibungswiderstandes genannt. In der Regel ist der Reibungswinkel φ so klein, dass man den Unterschied zwischen sin φ und tg φ vernachlässigen und ohne Bedenken sin φ mit dem Reibungscoefficienten f vertauschen darf. Da der genaue Werth des Reibungscoefficienten ohnehin nicht zu ermitteln ist (§ 66), so kann das Moment des Zapfenreibungswiderstandes für die Praxis hinreichend genau bestimmt werden nach der Gleichung:

$$315)\quad \mathfrak{M} = f\, G\, \varrho.$$

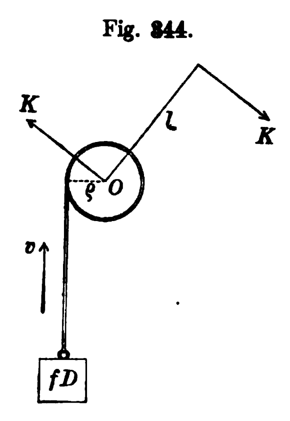
Dieser Vertauschung entspricht die Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen den Grössen der Kräfte N und G, also die Annahme, dass der normale Gegendruck N der Zapfenlager nur wenig verschieden ist von dem Gewichte der Welle. Wenn also dieser normale Gegendruck N — anstatt von dem Gewichte der Welle — von irgend einer anderen in gleicher Weise wirkenden Kraft D, welche der Zapfendruck genannt werden soll, hervorgerufen wird, so ergiebt sich in analoger Weise für das Moment des Zapfenreibungswiderstandes die Gleichung:

$$316)\quad \mathfrak{M} = f\, D\, \varrho.$$

Das Moment des Zapfenreibungswiderstandes ist gleich dem Producte der drei Factoren: Reibungscoefficient, Zapfendruck, Zapfenhalbmesser.

Man kann sich die Wirkung des Zapfenreibungswiderstandes veranschaulichen durch ein Gewicht fD, welches an einem um den Zapfen gewickelten Faden hängend von dem drehenden Kräftepaare hinaufgewunden wird (Fig. 344). Die Geschwindigkeit v, mit welcher dieses Gewicht steigt, ist gleich der Geschwindigkeit, mit welcher der Faden sich aufwickelt, also gleich der Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens. Die zum gleichförmigen Heben dieses Gewichtes in jeder Zeiteinheit erforderliche mechanische Arbeit ist also:

Fig. 344.



$$317)\quad \mathfrak{A} = fDv.$$

Ebenso gross ist auch die mechanische Arbeit, welche die zum Ueberwinden des Zapfenreibungswiderstandes erforderliche Drehkraft in jeder Zeiteinheit zu verrichten hat, oder die mechanische Arbeit, welche durch den Zapfenreibungswiderstand in jeder Zeiteinheit consumirt wird. Wenn die Geschwindigkeit v in Metern pro Secunde, und der Zapfendruck D in Kilogrammen ausgedrückt wird, so erhält man aus Gleichung 317) den Arbeitsverlust $\mathfrak{A}$ in „Meterkilogrammen pro Secunde". Bei Berechnung der Arbeitsleistungen der Maschinen pflegt man eine in jeder Secunde geleistete Arbeit von 75 Meterkilogrammen eine Pferdekraft zu nennen:

318) **1 Pferdekraft = 75 Meterkilogramm pro Secunde.**

Um also den Arbeitsverlust in Pferdekräften ausgedrückt zu erhalten, würde man die aus Gleichung 317) gefundene Zahl noch durch 75 zu dividiren haben.

Wenn z. B. der Zapfendruck $D = 10\,000$ Kil. und der Reibungscoefficient $f = 0{,}08$ wäre, so würde jenes in Fig. 344 den Zapfenreibungswiderstand repräsentirende Gewicht die Grösse haben:

$$fD = 0{,}08 \,.\, 10\,000 = 800 \text{ Kil.}$$

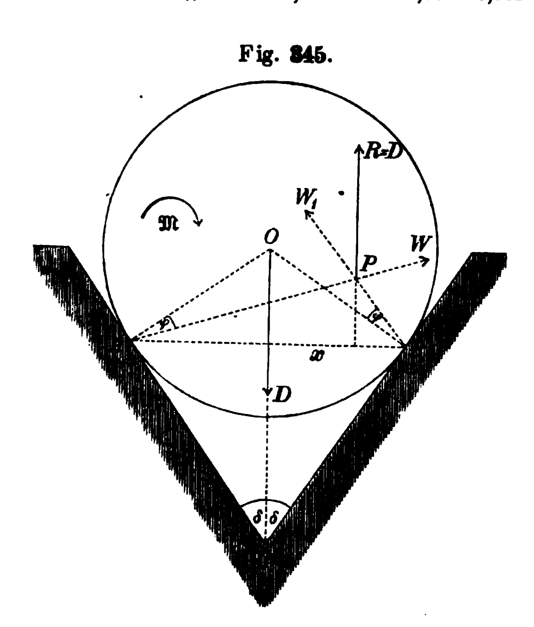
Wenn ferner der Zapfenhalbmesser $\varrho = 0^{\mathrm{m}},075$, und die Zahl der Umdrehungen pro Minute $n = 6$ beträgt, so ist die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens pro Secunde:

$$v = 2\varrho\pi \cdot \frac{n}{60} = 2 \cdot 0{,}075 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{6}{60} = 0^{m}{,}0471.$$

Die zum Ueberwinden des Zapfenreibungswiderstandes in jeder Secunde erforderliche mechanische Arbeit beträgt daher gerade so viel als diejenige mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um ein Gewicht von 800 Kil. in jeder Secunde um $0^{m},0471$ zu heben; es ist also:

$$\mathfrak{A} = 800 \cdot 0{,}0471 = 37^{mk}{,}68 = 0{,}502 \text{ Pferdekräfte.}$$

Fig. 345.



Bei keilnuthenförmigem Zapfenlager (Fig. 345) bildet die Mittelkraft R der an beiden Berührungsstellen A und B wirkenden Gegendrücke W und W_1 mit dem Zapfendrucke D zusammen dasjenige Kräftepaar, welches dem treibenden Kräftepaare als Widerstand entgegenwirkt. Man erhält also nach Fig. 345 für das Moment des Zapfenreibungs-Widerstandes die Gleichung:

$$319) \quad \mathfrak{M} = Dx.$$

Die beiden Gegendrücke W und W_1 weichen um den Reibungswinkel von den Halbmessern der Berührungsstellen ab; die Lage des Durchschnittspunktes P kann daher auf ähnliche Weise wie in Fig. 280 die des Punktes O bestimmt werden. Aus der in Fig. 346 angegebenen Construction erhält man die Gleichungen:

$$ME = x = r \sin 2\varphi, \quad \frac{\varrho}{2r} = \sin\delta,$$

und wenn man den hieraus für x sich ergebenden Werth:

$$320) \quad x = \varrho \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin\delta}$$

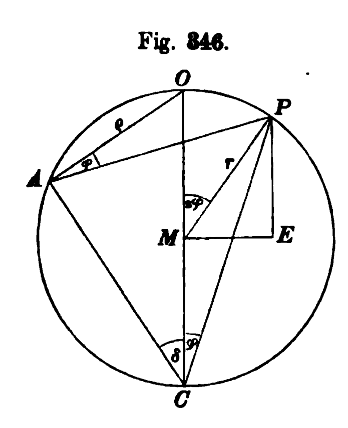
in Gleichung 319) substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$321) \quad \mathfrak{M} = D\varrho \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin\delta}.$$

Wenn der Reibungswinkel φ sehr klein ist, so kann man statt $\sin 2\varphi$ auch $2 \sin \varphi$ oder $2 \operatorname{tg} \varphi$ setzen, und für practische Anwendungen hinreichend genau das Moment des Zapfenreibungswiderstandes bestimmen nach der Gleichung:

$$322) \quad \mathfrak{M} = \frac{f}{\sin \delta} D \varrho,$$

Fig. 346.



welche nach der in Gleichung 234) eingeführten Bezeichnungsweise die Form annimmt:

$$323) \quad \mathfrak{M} = f_1 D \varrho.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die für cylindrische Zapfenlager gefundenen Gleichungen 316) und 317) auch für keilnuthenförmige Zapfenlager gelten, sobald in jenen Gleichungen statt des gewöhnlichen Reibungscoefficienten f der in § 69 für Bewegung in Keilnuthen gefundene Reibungscoefficient f_1 substituirt wird. Da f_1 immer grösser ist als f, so sind bei keilnuthenförmigen Zapfenlagern sowohl Moment als mechanische Arbeit der Zapfenreibung stets grösser als bei cylindrischen Lagern.

Wenn z. B. der Convergenzwinkel $2\delta = 60^0$, also $\sin \delta = \frac{1}{2}$ wäre, so würde $f_1 = 2f$, folglich sowohl Moment als mechanische Arbeit der Zapfenreibung gerade doppelt so gross als beim cylindrischen Zapfenlager sein. Für die im vorigen Zahlenbeispiele angenommenen Werthe $f = 0{,}08$, $D = 10\,000$ Kil., $\varrho = 0^m{,}075$, $n = 6$ erhielte man z. B.:

$$f_1 D = 1600 \text{ Kil. und } \mathfrak{A} = 75^{mk}{,}36 = 1{,}005 \text{ Pferdekräfte.}$$

Wenn der Zapfendruck D in der Richtung der Achse wirkt — statt rechtwinkelig zu derselben — und die ebene ringförmige Endfläche des Zapfens die Reibungsfläche bildet, so entwickelt sich an jedem einzelnen Theile dieser Fläche ein Reibungswiderstand von bestimmter Grösse, und das von dem treibenden Kräftepaare zu überwindende Moment der Zapfenreibung ist gleich der Summe der Momente aller dieser einzelnen Widerstände zu setzen (Fig. 347 und Fig. 348). Der Halbmesser R der äusseren Peripherie ist der grösste, und der Halbmesser r der inneren Peripherie ist der kleinste von den verschiedenen Hebelarmen, an welchen diese Reibungswiderstände wirken. Das gesuchte Moment $\mathfrak{M}$ muss also zwischen den Grenzwerthen fDR und fDr

liegen, welche man erhalten würde, wenn man als gemeinschaftlichen Hebelarm aller Reibungswiderstände das eine Mal den grössten Hebelarm R, das andere Mal den kleinsten Hebelarm r annimmt; es kann daher bestimmt werden nach der Gleichung:

$$324)\quad \mathfrak{M} = f D \varrho,$$

Fig. 347.

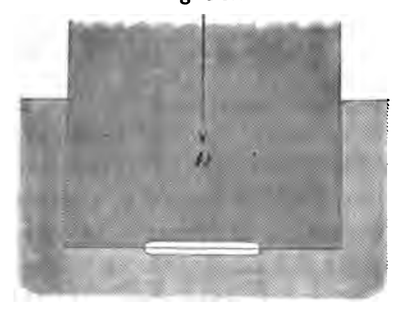
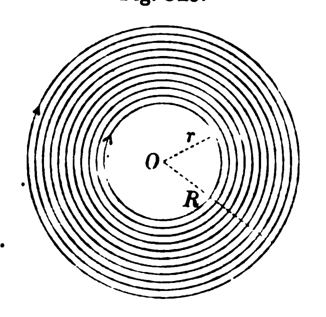


Fig. 348.



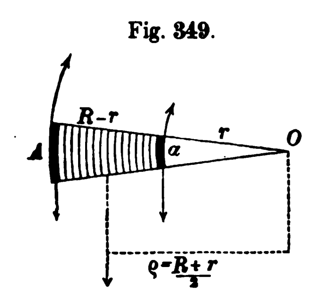
worin ϱ eine noch näher zu bestimmende zwischen R und r liegende Grösse bezeichnet, welche von der Art der Druckvertheilung abhängt.

Wäre der Druck gleichförmig über die ganze Ringfläche vertheilt, so würde die Abnutzung der reibenden Flächen eine ungleichförmige sein, weil die Geschwindigkeit des Gleitens an der äusseren Peripherie grösser ist als an der inneren. In Folge dieser ungleichförmigen Abnutzung würde der Druck an der äusseren Peripherie allmählich abnehmen, an der inneren Peripherie zunehmen, und diese Aenderung in der Druckvertheilung würde sich so lange fortsetzen, bis der Einfluss des Unterschiedes der Geschwindigkeiten durch den Einfluss des entstandenen Druckunterschiedes ausgeglichen wird. Sobald diese Ausgleichung eingetreten ist, wird die fernere Abnutzung überall gleichmässig stattfinden, und in der Druckvertheilung keine weitere Aenderung mehr erfolgen. Man darf annehmen, dass bei solcher Druckvertheilung die pro Flächeneinheit wirkenden Drücke im umgekehrten Verhältnisse der Geschwindigkeiten stehen, dass also zwei Flächentheilchen a und A gleichen Druck empfangen, wenn ihr Grössenverhältniss dem umgekehrten Verhältniss ihrer Entfernungen von der Drehachse gleich ist.

Denkt man sich die ganze Ringfläche auf die in Fig. 348 angedeutete Art zerlegt in unendlich schmale concentrische Ringe von gleichen Breiten, und aus diesem Ring-System den unendlich

kleinen Sector Fig. 349 herausgeschnitten, so findet man, dass die Mittelkraft von den beiden gleich grossen in den Flächentheilchen a und A wirkenden Reibungswiderständen den Abstand derselben halbirt, dass also diese beiden Reibungswiderstände gerade so wirken, wie wenn:

Fig. 349.



$$325)\quad \varrho = \frac{R+r}{2}$$

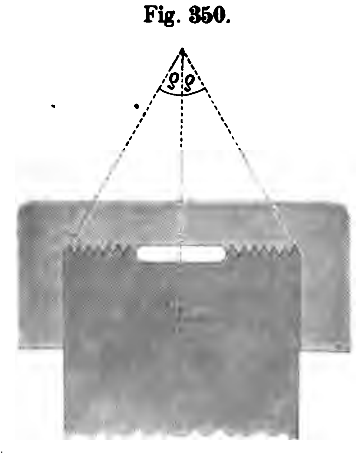
ihr gemeinschaftlicher Hebelarm wäre. Das Gleiche lässt sich in Bezug auf die übrigen Paare von Flächen-Elementen nicht nur dieses einen, sondern auch aller übrigen Sectoren nachweisen. Es wirken daher bei einem ringförmigen Stützzapfen die Reibungswiderstände gerade so, wie wenn der ganze Zapfendruck D auf eine Kreislinie sich concentrirte, deren Halbmesser dem arithmetischen Mittel des äusseren und inneren Halbmessers gleich ist. Das Moment des Zapfenreibungswiderstandes für einen solchen Stützzapfen ist also:

$$326)\quad \mathfrak{M} = fD\left(\frac{R+r}{2}\right).$$

Für den Fall, dass die Reibungsfläche eine volle Kreisfläche bildet, hat man $r = 0$ zu setzen, und erhält:

$$327)\quad \mathfrak{M} = fD\,\frac{R}{2}.$$

Fig. 350.



Wären die Reibungsflächen — wie in Fig. 350 angedeutet — mit concentrischen Keilnuthen vom Convergenzwinkel 2δ versehen, so würde statt des Reibungscoefficienten f der Reibungscoefficient für Keilnuthenflächen $f_1 = \frac{f}{\sin\delta}$ zu setzen sein, und man erhielte die Gleichung:

$$328)\quad \mathfrak{M} = f_1 \,.\, D \cdot \left(\frac{R+r}{2}\right).$$

Da nach § 69 die Grösse des Reibungswiderstandes unabhängig ist von der Anzahl der neben einander liegenden Keil-

nuthen, so würde diese Gleichung auch dann noch gültig bleiben, wenn die ganze Lagerfläche durch eine einzige Keilnuth gebildet würde. Denkt man sich alsdann die innere Wand dieser Keilnuth hinweggenommen, so erhält man die Form des konischen Stützzapfens, für welchen ebenfalls die obige Gleichung noch richtig bleibt.

Fig. 351.

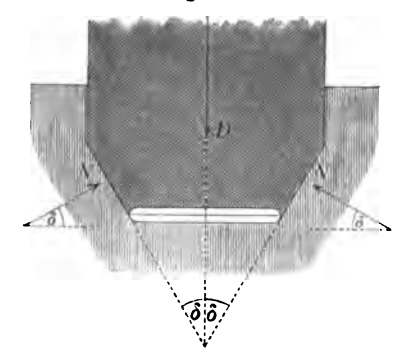
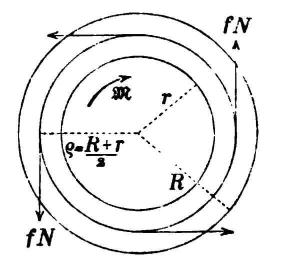


Fig. 352.



Um auf directem Wege jene Gleichung abzuleiten, würde man in Fig. 351 die algebraische Summe der in der Achsenrichtung wirkenden Kräfte, und in Fig. 352 die algebraische Summe der statischen Momente in Bezug auf die Drehachse gleich Null zu setzen haben, woraus sich die beiden Gleichungen ergeben:

329) $D = \Sigma(N \sin\delta) = \sin\delta\, \Sigma(N)$,

330) $\mathfrak{M} = \Sigma(f N \varrho) = f \varrho\, \Sigma(N)$.

Durch Elimination der Grösse $\Sigma(N)$ erhält man hieraus die Gleichung:

$$331)\quad \mathfrak{M} = \frac{f}{\sin\delta} D \varrho = f_1 D \left(\frac{R+r}{2}\right).$$

Dass auch hier die Reibungswiderstände gerade so wirken, wie wenn der Zapfendruck auf die mittlere Kreislinie vom Halbmesser $\frac{R+r}{2}$ sich concentrirte, lässt sich auf dieselbe Art, wie oben in Bezug auf den ebenflächig begrenzten Stützzapfen geschehen, nachweisen.

§ 85.

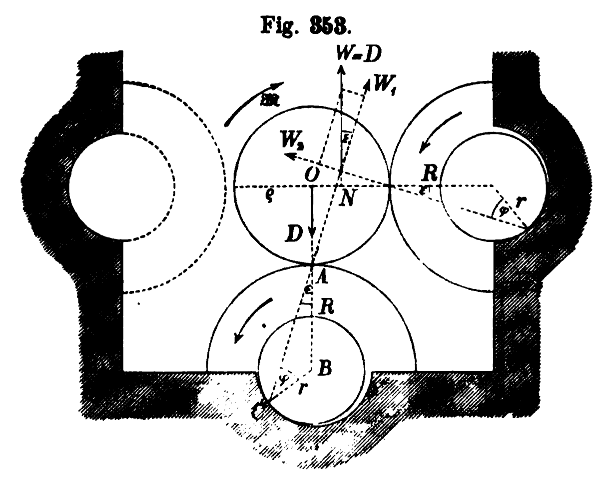
Frictionsrollen.

Die Mittelkraft W der beiden von den Frictionsrollen geleisteten Gegendrücke W_1, W_2 bildet mit dem Zapfendrucke D

zusammen dasjenige Kräfte-Paar, welches dem treibenden Kräfte-Paare $\mathfrak{M}$ entgegenwirkt; es ist also nach Fig. 353 zu setzen:

$$332)\quad \mathfrak{M} = W \,.\, \overline{ON}.$$

Fig. 353.



Statt des statischen Momentes der Mittelkraft W kann die Summe der statischen Momente ihrer beiden Seitenkräfte W_1, W_2 gesetzt werden, deren jede an dem Hebelarme $\varrho \sin \varepsilon$ wirkt, also ist:

$$333)\quad \mathfrak{M} = (W_1 + W_2)\, \varrho \sin \varepsilon.$$

Aus der in Fig. 353 angedeuteten Parallelogramm-Construction ergeben sich die Werthe $W_1 = D \cos \varepsilon$ und $W_2 = D \sin \varepsilon$, und nach Substitution derselben erhält man die Gleichung:

$$334)\quad \mathfrak{M} = D\, \varrho \sin \varepsilon\, (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon).$$

Zur Bestimmung des Winkels ε dient die aus dem Dreieck ABC sich ergebende Gleichung:

$$335)\quad \frac{r}{R} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} \quad \text{oder:} \quad \sin \varepsilon = \frac{r}{R} \sin \varphi.$$

Da ε kleiner ist als φ, so kann bei kleinen Reibungswinkeln der Factor $(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon)$, als wenig von Eins verschieden, vernachlässigt werden, und wenn man ausserdem f statt $\sin \varphi$ (also annähernd $\sin \varepsilon = f \frac{r}{R}$) setzt, so erhält man die Gleichung:

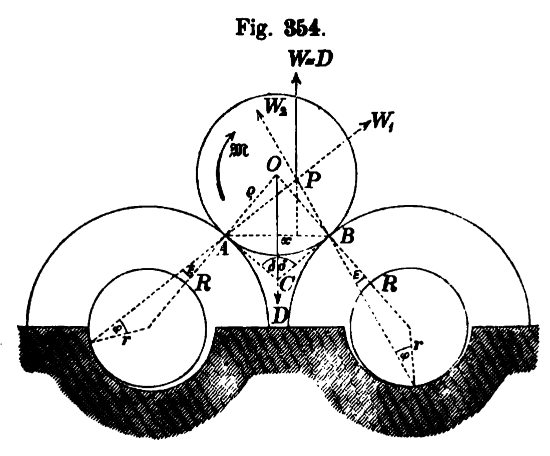
$$336)\quad \mathfrak{M} = f \frac{r}{R} D\, \varrho.$$

Die Vergleichung dieses Werthes mit dem in Gleichung 316) gefundenen zeigt, dass durch die Frictionsrollen die Wirkung der Zapfenreibungswiderstände vermindert wird im Verhältniss:

$$\frac{r}{R} = \frac{\text{Frictionsrollen-Zapfen-Halbmesser}}{\text{Frictionsrollen-Halbmesser}}.$$

Bei der in Fig. 354 dargestellten Lage der beiden Frictionsrollen ergiebt sich für das Moment des treibenden Kräfte-Paares die Gleichung:

Fig. 354.



337) $\mathfrak{M} = Dx.$

Der Hebelarm x ist auf dieselbe Weise wie in Fig. 346 zu bestimmen. Aus Gleichung 320) ergiebt sich — wenn darin φ mit ε vertauscht wird — der Werth:

338) $x = \varrho \frac{\sin 2\varepsilon}{2 \sin \delta},$

und nach Substitution desselben erhält man die Gleichung:

339) $\mathfrak{M} = D\varrho \frac{\sin 2\varepsilon}{2 \sin \delta},$

worin der Winkel ε wiederum nach Gleichung 335) bestimmt werden kann.

Die beiden Gleichungen 321) und 339) unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass in ersterer φ, in letzterer ε steht. Um also eine für praktische Anwendungen hinreichend genaue Gleichung zu erhalten, hat man nur in Gleichung 322) statt f den Werth $f \frac{r}{R}$ zu setzen, und erhält dann die Gleichung:

340) $\mathfrak{M} = \left(\frac{f}{\sin \delta}\right) \left(\frac{r}{R}\right) D\varrho,$

welche zeigt, dass auch bei der in Fig. 354 dargestellten Art der Anwendung von Frictionsrollen die Wirkung der Reibungswiderstände vermindert wird, sobald $\frac{1}{\sin \delta} \frac{r}{R}$ kleiner ist als Eins.

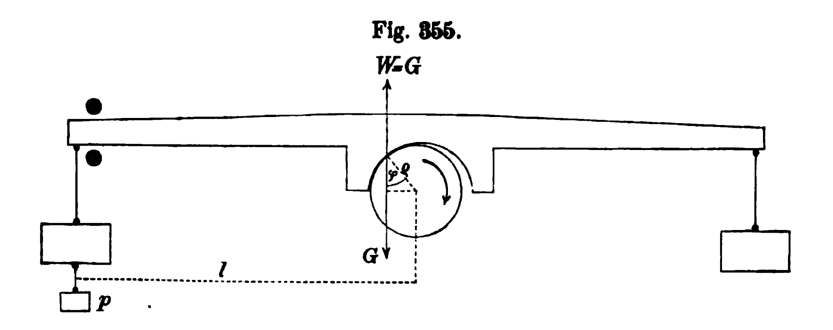
Wäre z. B. $2\delta = 60^\circ$ $\left(\text{also } \sin \delta = \frac{1}{2}\right)$ und $\frac{r}{R} = \frac{1}{10}$, so würde durch die Frictionsrollen sowohl das Moment als auch die mechanische Arbeit des Zapfenreibungswiderstandes auf den fünften Theil reducirt.

§ 86.

Hirn'sche Reibungswage.

Wenn der Gegendruck W des rotirenden Zapfens dem Totalgewichte G des belasteten Wagebalkens das Gleichgewicht halten soll, so muss die Richtungslinie der Kraft G durch die Berührungsstelle der beiden Körper hindurchgehen, also nach § 84 in der Entfernung $\varrho \sin \varphi$ am Mittelpunkte des Zapfenkreises vorbeigehen (Fig. 355). Bei symmetrischer Lastvertheilung würde

Fig. 355.



der Schwerpunkt des Ganzen in der Verticalen des Zapfenmittelpunktes liegen, und die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Gewichte in Bezug auf den Zapfenmittelpunkt gleich Null sein. Durch Hinzufügen eines Uebergewichtes p an der linken Seite lässt sich erreichen, dass der Schwerpunkt um die Grösse $\varrho \sin \varphi$ seitwärts rückt. Das statische Moment der Mittelkraft G ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente aller einzelnen Gewichte, und die letztere reducirt sich auf das statische Moment des Uebergewichtes p. Es ergiebt sich also nach Fig. 355 die Gleichung:

$$341)\quad p\,l = G\,\varrho \sin \varphi \quad \text{oder:} \quad \sin \varphi = \left(\frac{p}{G}\right)\left(\frac{l}{\varrho}\right),$$

aus welcher der Zapfenreibungs-Coefficient berechnet werden kann, wenn die Gewichte p und G durch directe Beobachtung bestimmt wurden. Wegen Kleinheit des Unterschiedes zwischen Sinus und Tangente des Reibungswinkels kann übrigens — wie schon im § 84 bemerkt — die Grösse $\sin \varphi$ ohne Bedenken mit dem Reibungscoefficienten selbst verwechselt werden.

Wäre z. B. $\varrho = 0^m{,}05$, $l = 1^m$ und $G = 1000$ Kil., $p = 0{,}5$ Kil. gefunden, so ergäbe sich für den Reibungscoefficienten der Werth:

$$f = \frac{0{,}5}{1000} \cdot \frac{1}{0{,}05} = 0{,}01.$$

§ 87.

Bewegung eines von rotirenden Cylindern unterstützten Körpers.

Gleichförmige Bewegung.

Um einen auf ruhender horizontaler Unterlage ruhenden Körper vom Gewichte G in Bewegung zu versetzen, dazu bedarf es einer Kraft, welche mindestens so gross als der dem Drucke G entsprechende Reibungswiderstand fG sein muss. Um dagegen einen auf bewegter Unterlage ruhenden Körper in Bewegung zu versetzen, dazu ist die kleinste Kraft schon ausreichend. Denn der ruhende Körper ist im letzteren Falle bereits in relativer gleitender Bewegung in Bezug auf seine Unterlage begriffen; die mit dem Gleiten verbundenen Reibungswiderstände sind also schon in voller Wirksamkeit und werden aufgehoben durch diejenigen Kräfte, welche den Körper ruhend erhalten. Wenn also die letzteren unverändert bleiben, so wird die geringste neu hinzukommende Kraft diesen Gleichgewichtszustand stören, folglich Bewegung hervorbringen müssen.

In solcher Situation befindet sich z. B. eine horizontale von zwei entgegengesetzt rotirenden horizontalen Cylindern unterstützte Stange, deren Schwerpunkt mitten zwischen den beiden Unterstützungsstellen liegt (Fig. 356). So lange die Stange im Ruhezustande sich befindet, halten die beiden Reibungswiderstände $f\frac{G}{2}$ einander gegenseitig im Gleichgewichte; es bedarf also in diesem Falle gar keiner äusseren Kräfte, um diesen Ruhezustand zu unterhalten. Wenn dagegen durch eine Horizontalkraft K die Stange parallel zur Richtung der Drehachsen mit der Geschwindigkeit v gleichförmig fortbewegt wird, so beschreiben die Berührungsstellen Schraubenlinien auf den rotirenden Cylinderflächen (Fig. 357). Die relative Geschwindigkeit w der Berührungsstelle in Bezug auf die cylindrische Unterstützungsfläche setzt sich (nach § 36) zusammen aus der wirklichen Geschwindigkeit v der Stange und der in entgegengesetzter Richtung genommenen Umfangsgeschwindigkeit c des Cylinders. Die Reibungswiderstände $f\frac{G}{2}$ wirken den rela-

tiven Bewegungsrichtungen entgegen, und für den Winkel ε, den dieselben mit der Stangenrichtung bilden, ergiebt sich aus den in Fig. 357 angedeuteten Parallelogrammen der Geschwindigkeiten die Gleichung:

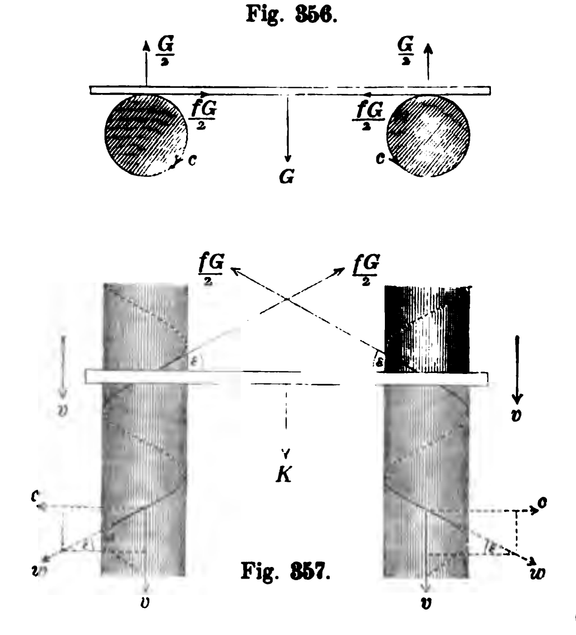


Fig. 356.

Fig. 357.

$$342)\quad \sin \varepsilon = \frac{v}{w} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + c^2}}.$$

Die beiden parallel zu den Drehachsen gerichteten Seitenkräfte $f\frac{G}{2}\sin\varepsilon$ bilden zusammengenommen den von der Kraft K zu überwindenden Widerstand. Die Bedingung der Gleichförmigkeit der fortschreitenden Bewegung ist also:

$$343)\quad K = fG \sin \varepsilon = fG \frac{v}{\sqrt{v^2 + c^2}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass K gleich Null wird, wenn $v = 0$ ist, und umgekehrt: dass v um so mehr der Grenze Null sich nähert, je kleiner die Kraft K ist. Wie klein aber auch die Kraft K sein möge: es wird immer eine Geschwindigkeit v geben, bei welcher diese Kraft ausreicht, um die Bewegung bei solcher Geschwindigkeit gleichförmig zu unterhalten.

Wenn die Kraft K — folglich auch das Verhältniss $\frac{fG}{K} = n$ — gegeben ist, und diejenige Geschwindigkeit v gesucht wird, welche die Stange haben muss, wenn die Bedingung des gleichförmigen Fortschreitens erfüllt sein soll, so ergiebt sich für dieselbe aus obiger Gleichung der Werth:

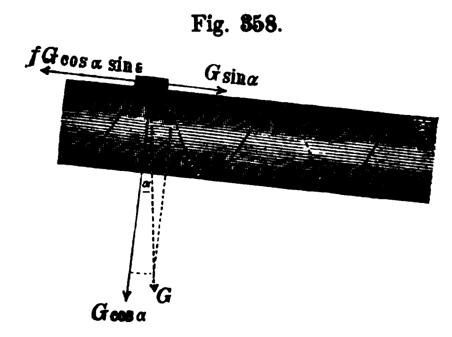
$$344)\quad v = \frac{c}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe für n und v:

$$n = 1 \qquad \frac{1}{0,8} \qquad \sqrt{2} \qquad \frac{1}{0,6} \qquad \infty,$$

$$v = \infty \qquad \frac{4}{3}c \qquad c \qquad \frac{3}{4}c \qquad 0.$$

Fig. 358.



Wie bei horizontaler Lage der Drehachsen die Horizontalkraft K, so wirkt bei geneigter Lage der Drehachsen die denselben parallele Seitenkraft $G \sin \alpha$ des Gewichtes (Fig. 358). Die Bedingung der gleichförmig fortschreitenden Bewegung ist für diesen Fall:

$$G \sin \alpha = f\, G \cos \alpha \,.\, \sin \varepsilon, \quad \text{oder:}$$

$$345) \quad \operatorname{tg} \alpha = f \sin \varepsilon = f \frac{v}{\sqrt{v^2 + c^2}}.$$

Setzt man hierin das Verhältniss $\frac{f\, G \cos \alpha}{G \sin \alpha} = \frac{f}{\operatorname{tg} \alpha} = n$, so erhält man durch Auflösung der Gleichung für v den Werth:

$$v = \frac{c}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

also wiederum denselben Werth, welcher für den vorigen Fall bereits gefunden wurde.

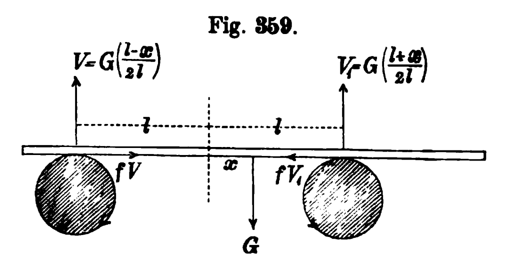
Es ergiebt sich aus dieser Gleichung, dass jedem Neigungswinkel α eine bestimmte Geschwindigkeit v entspricht. Die geringste Neigung der Drehachsen wird sich also durch eine fortschreitende Bewegung der Stange kundgeben. Ebenso wird ein mit unten angehängtem Gewichte belasteter Ring an einer einzelnen rotirenden Welle aufgehängt längs derselben allmählich fortrücken, wenn auch die Abweichung der Drehachse von der Horizontalen so klein ist, dass dieselbe der directen Beobachtung sich entzieht.

Schwingende Bewegung.

Wenn der Schwerpunkt der Stange dem einen Unterstützungspunkte näher liegt als dem anderen, so entstehen in Folge un-

gleichmässiger Druckvertheilung ungleiche Reibungswiderstände an den beiden Unterstützungsstellen, und der Ueberschuss des grösseren treibt die Stange nach ihrer Gleichgewichtslage zurück. Bei der Entfernung x von der Gleichgewichtslage hat dieser Ueberschuss nach Fig. 359 die Grösse:

Fig. 359.



$$346)\quad K=fV_1-fV=\frac{fG}{l}x.$$

Die zurücktreibende Kraft ist also proportional der Entfernung von der Gleichgewichtslage, folglich (nach § 28) die Bewegung der Stange eine hin und her schwingende.

Um die Dauer einer Schwingung zu berechnen, hat man (nach § 28) zunächst die Beschleunigung q bei der Entfernung $x=1$ zu bestimmen. Wenn mit M die Masse der Stange bezeichnet wird, so ist:

$$347)\quad q=\frac{fG}{Ml}\cdot 1=\frac{fg}{l}.$$

Wenn man diesen Werth in Gleichung 70) substituirt, so erhält man:

$$348)\quad t=\frac{\pi}{\sqrt{q}}=\pi\sqrt{\frac{l}{fg}}.$$

Die Schwingungsdauer ist also gleich der eines einfachen Pendels von der Länge $\frac{l}{f}$, (z. B. gleich der eines Pendels von der Länge $100\,.\,l$, wenn $f=0{,}01$ ist).

Vorausgesetzt ist bei dieser Berechnung, dass der Reibungscoefficient f unabhängig ist von der Geschwindigkeit des Gleitens, was (wie schon im § 66 erwähnt) der Wirklichkeit nicht ganz entspricht.

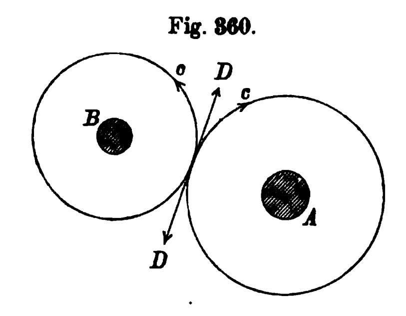
§ 88.

Prony'scher Zaum.

Die beiden gleichförmig umlaufenden Wellen A und B in Fig. 360 stehen durch ein Zahnräder-Paar mit einander in Verbindung; die Welle A ist die treibende, die Welle B die ge-

triebene. Die beiden Zahnräder übertragen an der Eingriffsstelle auf einander wechselseitig eine Druckkraft D, welche treibend auf die Welle B, dagegen als Widerstand auf die Welle A wirkt. Dieser Widerstand wirkt auf die Welle A wie ein Gewicht D, welches an einem um den Radkreis gewickelten Faden hängend mit der Umfangsgeschwindigkeit c hinaufgewunden wird. Die zum Aufwinden eines solchen Gewichtes pro Secunde erforderliche mechanische Arbeit ist:

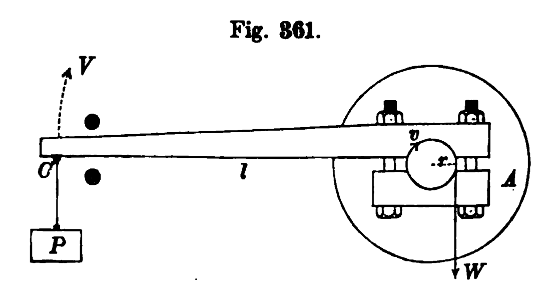
Fig. 360.



$$349)\quad \mathfrak{A} = Dc.$$

Ebenso gross ist die zum Treiben der Welle B erforderliche — d. h. die von der Welle A auf die Welle B pro Secunde übertragene — mechanische Arbeit. Die Grösse dieser Arbeit kann mittelst des in Fig. 361 dargestellten Prony'schen Zaums auf folgende Weise gemessen werden. Man setzt zunächst die beiden Zahnräder ausser Eingriff. Die von dem Widerstande D nunmehr befreite Welle A wird alsdann (bei gleich bleibendem Kraftzuflusse) rascher umlaufen als vorher. Die Zahl der Umdrehungen pro Minute wird von n bis auf n_1 zunehmen. Es wird an die Welle A dann der Zaum angelegt, und mittelst Anziehens der Schrauben bewirkt, dass die Umdrehungszahl wieder bis auf die Zahl n herabsinkt. Sobald die frühere Umdrehungsgeschwindigkeit wieder hergestellt ist, beträgt die jetzt durch Reibung pro Secunde verzehrte mechanische Arbeit gerade so viel wie früher die mittelst der Zahnräder auf die Welle B übertragene mechanische Arbeit.

Fig. 361.



Der mittelst des Zaumes hervorgebrachte Reibungswiderstand wirkt auf die Welle A wie ein Gewicht W, welches an einem um die Welle gewickelten Faden hängend mit der Umfangsgeschwin-

digkeit v an der linken Seite hinaufgewunden wird. Die hierzu erforderliche mechanische Arbeit ist:

$$350) \quad \mathfrak{A} = Wv.$$

Auf den Zaum wirkt der Reibungswiderstand rechts herum drehend wie ein in der Entfernung r vom Mittelpunkte aufgehängtes Gewicht W. Dieses Gewicht kann dadurch gemessen werden, dass man auf der linken Seite bei C so viel Gewicht P anhängt, als nöthig ist, um dem Gewichte W das Gleichgewicht und den Balken wagerecht schwebend zu halten. Nach der Gleichung des Hebels ist alsdann:

$$351) \quad Pl = Wr, \quad \text{oder:} \quad W = P \cdot \frac{l}{r}.$$

Wenn man diesen Werth für W in Gleichung 350) substituirt, so erhält man:

$$352) \quad \mathfrak{A} = P\left(\frac{l}{r}\, v\right).$$

Der eingeklammerte Factor bezeichnet die Peripherie-Geschwindigkeit, welche ein Kreis vom Halbmesser l besitzen würde, wenn derselbe an der Drehbewegung theilnähme. Wenn man diese Geschwindigkeit mit V bezeichnet, so erhält man die einfachere Gleichung:

$$353) \quad \mathfrak{A} = P \,.\, V.$$

Die gesuchte mechanische Arbeit ist also gleich dem gefundenen Gewichte P multiplicirt mit derjenigen Geschwindigkeit, welche der Aufhängepunkt besitzen würde, wenn der Zaum an der Drehbewegung theilnähme.

Vorausgesetzt ist hierbei, dass der Schwerpunkt des unbelasteten Zaumes in der Verticalen des Drehpunktes liegt. Wäre dies nicht der Fall, läge der Schwerpunkt z. B. links von der Drehachse, so würde in Gleichung 353) statt des Gewichtes P ein entsprechend grösseres Gewicht in Rechnung zu bringen sein.

Wenn z. B. die Umlaufszahl $n = 75$ (Umdrehungen pro Minute) wäre, und das an dem Hebelarme $l = 2^{m},5$ wirkende Gewicht $P = 100$ Kil. gefunden wäre, so ergäbe sich zunächst für die Geschwindigkeit V der Werth:

$$V = 2 l \pi \frac{n}{60} = 2 \,.\, 2{,}5 \,.\, 3{,}14 \cdot \frac{75}{60} = 19^{m},635,$$

und für die pro Secunde übertragene mechanische Arbeit nach Gleichung 353) die Grösse:

$$\mathfrak{A} = 100 \,.\, 19{,}635 = 1963^{mk},5 = 26{,}18 \text{ Pferdekräfte.}$$

§ 89.

Frictionsräder.

Von den beiden Wellen A und B in Fig. 362 soll A die treibende, B die getriebene sein: die Uebertragung der Drehbewegung soll durch die beiden auf den Wellen befestigten einander berührenden Scheiben vermittelt werden.

Fig. 362.

Den Gesammtwiderstand, welcher bei Umdrehung der getriebenen Welle B zu überwinden ist, kann man sich durch ein Gewicht W veranschaulichen, welches an einem um die Welle — oder eine mit der Welle umlaufende Trommel — gewickelten Faden hängend, bei Umdrehung derselben hinaufgewunden wird. Eine Kraft K, welche am Umfange der Scheibe vom Halbmesser R in tangentialer Richtung wirkend den am Hebelarme r wirkenden Widerstand W überwinden und die Welle B gleichförmig treiben soll, muss der Bedingung genügen:

$$354)\quad KR = Wr \qquad \text{oder:} \quad K = W\frac{r}{R}.$$

Wenn durch Kräfte, welche auf die Zapfenlager der beiden Wellen wirken, zwischen den beiden Scheiben an der Berührungsstelle ein Druck D hervorgebracht wird von solcher Grösse, dass der diesem Drucke entsprechende Reibungswiderstand fD die Grösse K erreicht oder überschreitet, so wird die Reibung zwischen den beiden Scheiben schon ausreichen, um zu bewirken, dass die Bewegung von der Welle A auf die Welle B übertragen wird, und dass die getriebene Scheibe mit derselben Peripheriegeschwindigkeit sich bewegt wie die treibende Scheibe. Für den unteren Grenzwerth des erforderlichen Druckes D ergiebt sich hiernach die Bedingung:

$$355)\quad fD = K \qquad \text{oder:} \quad D = \frac{K}{f},$$

oder nach Substitution des in Gleichung 354) für K gefundenen Werthes:

$$356)\quad D = \frac{Wr}{fR}.$$

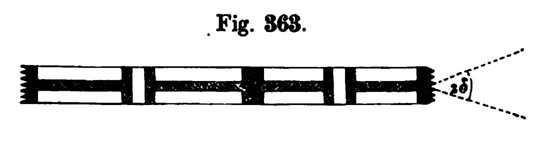
Wenn z. B. $W = 100$ Kil., $r = 0^m,15$, $R = 0^m,5$ ist, und als Reibungscoefficient für die beiden (gusseisernen) Frictionsscheiben $f = 0,20$ gesetzt wird, so erhält man:

$$D = \frac{100 \,.\, 0,15}{0,20 \,.\, 0,5} = 150 \text{ Kil.}$$

Bei einem Drucke, der weniger als 150 Kil. beträgt, würde ein Gleiten eintreten; bei grösserem Drucke aber würde ein Theil des Reibungswiderstandes schon ausreichen, um die erforderliche Triebkraft K auf die getriebene Scheibe zu übertragen.

Je kleiner der Reibungscoefficient f ist, um so grösser muss der Druck D sein, und um so grösser wird auch die durch diesen Druck entstehende Vermehrung der Zapfenreibung an den beiden Wellen. Nach § 69 hat das Anbringen von Keilnuthen an den Berührungsflächen dieselbe Wirkung wie eine Vergrösserung des Reibungscoefficienten im Verhältniss von f zu f_1 (Gleichung 234). Es ist also vortheilhaft, die Umfänge der Frictionsscheiben auf die in Fig. 363 angedeutete Weise mit Keilnuthen zu versehen, für welchen Fall statt f der Reibungscoefficient für Keilnuthen:

Fig. 363.



$$f_1 = \frac{f}{\sin \delta}$$

in Gleichung 356) zu substituiren sein würde, welche alsdann die Form annimmt:

$$357) \quad D = \sin \delta \, \frac{W r}{f R}.$$

Wenn z. B. der Convergenzwinkel der Keilnuthen $2\delta = 60^0$, also $\sin \delta = \frac{1}{2}$ wäre, so würde bei den im obigen Zahlenbeispiele angenommenen Werthen ein Druck von 75 Kil. (statt 150 Kil.) zur Uebertragung der Triebkraft schon ausreichen.

§ 90.

Reibung eines Fadens am Umfange eines Cylinders.

Der Gleichgewichtszustand des durch die spannenden Kräfte K und P ruhend gehaltenen vollkommen biegsamen Fadens (Fig. 364) würde keine Störung erleiden, wenn auf irgend eine Weise die Biegsamkeit desselben aufgehoben, und der Faden in eine feste Stange verwandelt würde. Es müssen daher die auf den Faden wirkenden Kräfte den allgemeinen Gleichgewichts-Bedin-

gungen in derselben Weise genügen, wie wenn der Faden ein fester Körper wäre.

Auf den Faden wirken ausser den Kräften K und P noch die radial gerichteten normalen Gegendrücke des rotirenden Cylinders nebst den ihnen entsprechenden tangential gerichteten Reibungswiderständen. Nach den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen muss die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher auf den Faden wirkenden Kräfte in Bezug auf die Achse O gleich Null sein. Es ist also nach Fig. 364:

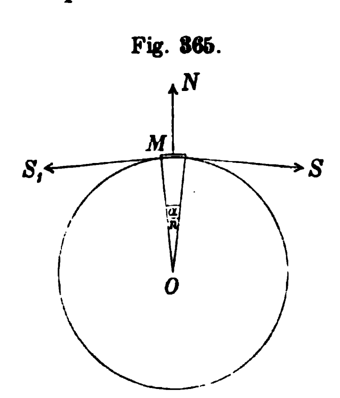
Fig. 364.

$$358)\quad 0 = Pr - Kr + \Sigma(fNr),$$

oder: $K - P = \Sigma(fN)$.

Um die an den einzelnen Berührungsstellen wirkenden Normaldrücke N und die zugehörigen Reibungswiderstände fN zu bestimmen, zerlegt man den ganzen vom Faden umspannten Bogen in n gleiche Theile, denkt sich an den Endpunkten eines solchen Bogentheiles den Faden durchschnitten und durch die an den Schnittstellen angebrachten Kräfte S und S_1 den Gleichgewichtszustand dieses Fadentheiles wieder hergestellt (Fig. 365). Wenn keine Reibung an diesem Fadentheile stattfände, so würde $S = S_1$ und:

Fig. 365.



$$N = 2S \sin\left(\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{n}\right)$$

gesetzt werden können. Je grösser die Zahl n angenommen wird, um so kleiner würde der Fehler sein, den man begeht, indem man (die Sinus-Zahl mit der Winkel-Zahl vertauschend):

$$N = S\,\frac{\alpha}{n}$$

setzt, und indem man annimmt, dass der Kraft S_1 ausser der Kraft S noch der jenem Normaldrucke entsprechende Reibungswiderstand:

$$fN = fS\frac{\alpha}{n}$$

entgegenwirkt. Hiernach würde man für die Spannung S_1 die Gleichung erhalten:

$$S_1 = S + fS\frac{\alpha}{n}^{*)} = S\left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right).$$

Der eingeklammerte Factor bezeichnet die Zahl, mit welcher man die an irgend einem Theilpunkte stattfindende Spannung zu multipliciren hat, um die Spannung in dem nächstfolgenden Theilpunkte zu erhalten.

Um also, von der Spannung P an der Stelle A ausgehend, die Spannung K an der Stelle B zu finden, hat man n-mal nach einander die Zahl P mit jenem Factor zu multipliciren, und erhält demnach für K die Gleichung:

$$359)\quad K = P\left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^n.$$

Je grösser die Zahl n angenommen wird, um so mehr wird diese Gleichung das wirkliche Verhältniss zwischen den Kräften K und P darstellen. Nach dem binomischen Lehrsatze ist:

$$\left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^n = 1 + f\alpha + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{(f\alpha)^2}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{(f\alpha)^3}{1.2.3} + \cdots$$

und wenn man in dieser Reihe $n = \infty$ setzt, so erhält man als Grenzwerth:

$$\lim\left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^n = 1 + f\alpha + \frac{(f\alpha)^2}{1.2} + \frac{(f\alpha)^3}{1.2.3} + \cdots = e^{f\alpha},$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systems bezeichnet ($e = 2{,}71828\ldots$). Hiernach erhält man für K die Gleichung:

$$360)\quad K = Pe^{f\alpha},$$

*) Nach der Bezeichnungsweise der Differenzial-Rechnung würde diese Gleichung die Form annehmen:

$$S_1 - S = dS = fS\,d\alpha, \quad \text{oder:} \quad \frac{dS}{S} = f\,d\alpha,$$

und durch Integration derselben erhält man:

$$\int_P^K \frac{dS}{S} = f\int_0^\alpha d\alpha, \quad \text{oder:} \quad \lg K - \lg P = f\alpha = \lg\left(\frac{K}{P}\right), \quad \text{also:}$$

$$\frac{K}{P} = e^{f\alpha}.$$

welche zeigt, dass das dem Gleichgewichtszustande entsprechende Verhältniss der Kräfte K und P nur von den Grössen α und f abhängt, dagegen unabhängig ist von dem Halbmesser des Cylinders.

Auf den rotirenden Cylinder wirken die Reibungswiderstände fN in entgegengesetztem Sinne, also der Drehbewegung desselben entgegen. Als statisches Moment der zum gleichförmigen Drehen des Cylinders erforderlichen Kraft in Bezug auf die Drehachse erhält man demnach:

$$\mathfrak{M} = \Sigma\,(fN)\,r,$$

oder nach Gleichung 358), wenn darin für K der gefundene Werth substituirt wird:

$$361)\quad \mathfrak{M} = (K - P)\,r = Pr\,(e^{f\alpha} - 1).$$

Die beiden Gleichungen 360) und 361) gelten für jede beliebige Geschwindigkeit der Drehbewegung, folglich auch noch für die Geschwindigkeit Null, oder für den Ruhezustand des Cylinders. Für letzteren Fall bezeichnet die Gleichung 360) den Grenzwerth, welchen die Kraft K nicht überschreiten darf, wenn der durch den Widerstand P zurückgehaltene Faden nicht längs der ruhenden Cylinderfläche gleiten soll; und die Gleichung 361) bezeichnet für diesen Fall den Grenzwerth, welchen eine auf den Cylinder wirkende Drehkraft nicht überschreiten darf, wenn derselbe nicht in Drehbewegung versetzt werden soll.

Für den Fall, dass die Drehbewegung des Cylinders in der entgegengesetzten Richtung stattfindet, würde in den obigen Gleichungen entweder K mit P zu vertauschen, oder $-f$ statt $+f$ zu substituiren sein, insofern alsdann die Reibungswiderstände auf jeden der beiden Körper in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung wirken. Es kann daher der Gleichung 360) auch die allgemeinere Form gegeben werden:

$$362\quad K = Pe^{\pm f\alpha},$$

in welcher das Plus-Zeichen gilt, wenn die Reibung der Kraft K entgegen, das Minus-Zeichen, wenn die Reibung im Sinne der Kraft K wirkt.

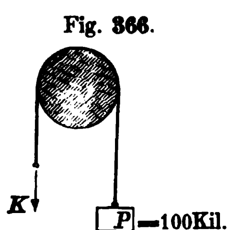
Wenn z. B. als Reibungscoefficient für einen hanfenen Faden auf hölzernem Cylinder $f = 0{,}4$ gesetzt wird, so erhält man für den in Fig. 366 dargestellten Fall, in welchem $\alpha = \pi$ ist, nach Gleichung 360):

$$K = 100 \,.\, e^{0{,}4\,.\,3{,}14} = 100 \,.\, 3{,}51 = 351 \text{ Kil.}$$

Denkt man sich den Cylinder unbeweglich festgehalten und die Zugkraft K

allmählich zunehmend, so wird das Gleiten des Fadens und das Hinaufziehen des Gewichtes P beginnen in dem Augenblicke, wo die Zugkraft K die Grösse von 351 Kil. überschreitet. Ebenso gross würde auch die zum gleichförmigen Hinaufziehen des Gewichtes P erforderliche Zugkraft K während der Bewegung sein müssen. Soll dagegen die Kraft K nur das Gleiten des Fadens oder das Hinabsinken des Gewichtes P verhindern, so würde der untere Grenzwerth der hierzu erforderlichen Kraft zu bestimmen sein nach der Gleichung:

Fig. 366.



$$K = 100 \cdot e^{-0,4 \cdot 3,14} = \frac{100}{3,51} = 28,5 \text{ Kil.}$$

Ebenso gross würde die Kraft K auch während des Hinabgleitens des Gewichtes P sein müssen, wenn dieses Hinabsinken gleichförmig erfolgen soll. Für den ruhenden Faden ist also die Fortdauer des Ruhezustandes an die Bedingung geknüpft: dass die Kraft K nicht grösser als 351 Kil. und nicht kleiner als 28,5 Kil. sein darf.

Setzt man in Gleichung 360) — statt der Grössen selbst — die natürlichen Logarithmen derselben einander gleich, so erhält man die Gleichung:

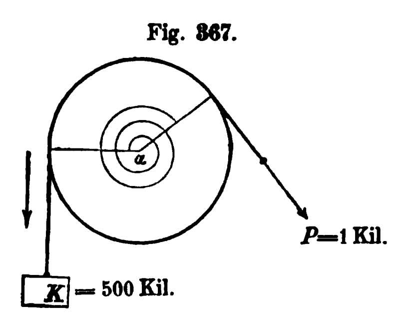
$$363)\quad \lg K = \lg P + f\alpha \qquad \text{oder:}\quad \alpha = \frac{1}{f} \lg \left(\frac{K}{P}\right),$$

aus welcher der Winkel α bestimmt werden kann, wenn die Kräfte K und P gegeben sind.

Wenn z. B. $K = 500$ Kil., $P = 1$ Kil., $f = 0,4$ gegeben ist, so erhält man aus dieser Gleichung:

$$\alpha = \frac{1}{0,4} \cdot \lg 500 = \frac{6,2146}{0,4} = 15,5365,$$

Fig. 367.



d. h. wenn bei dem in Fig. 367 dargestellten Falle die an dem einen Ende des um einen unbeweglichen Cylinder gewickelten Fadens wirkende Kraft $P = 1$ Kil. ausreichen soll, um das Hinabsinken des an dem anderen Ende hängenden Gewichtes $K = 500$ Kil. zu verhindern, so muss der zu dem vom Faden umspannten Bogen gehörige Winkel mindestens die Grösse 15,5365 haben. Wenn statt dessen die Anzahl n der erforderlichen Umwindungen berechnet werden sollte, so würde man zu setzen haben:

$$n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{15,5365}{6,28} = 2,474.$$

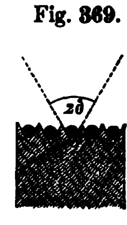
Die gefundenen Gleichungen können auch auf den Fall angewendet werden, in welchem die Cylinderfläche mit einer Keil-

nuth versehen ist, an deren Seitenwände die runde Schnur sich anlegt (Fig. 368). Es ist nur nöthig, für diesen Fall statt f den Reibungscoefficienten für Keilnuthen (§ 69, Gleichung 234):

$$f_1 = \frac{f}{\sin\delta}$$

Fig. 368.

Fig. 369.



in Gleichung 362) zu substituiren, welche alsdann die Form annimmt:

$$364)\quad K = Pe^{\pm\frac{f\alpha}{\sin\delta}}.$$

Nach § 69 macht es hierbei keinen Unterschied, ob eine Keilnuth, oder mehrere neben einander liegende Keilnuthen die Reibungsflächen bildeten. Die Gleichung 364) gilt daher auch für den (in Fig. 369 dargestellten) Fall, wenn die Schnur aus mehrfach neben einander in Keilnuthen liegenden Theilen besteht.

Wenn bei dem in Fig. 366 dargestellten Falle die Cylinderfläche mit Keilnuthen vom Convergenzwinkel $2\delta = 60^0$ versehen wäre, so würde $\frac{f}{\sin\delta} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8$ statt f zu substituiren sein, und man erhielte als Grenzwerthe der Kraft K statt der gefundenen Werthe:

$$K = 100 \,.\, e^{\pm 0,8\,.\,3,14} = \begin{cases} 1230 \text{ Kil.} \\ 8,13 \text{ Kil.} \end{cases}$$

Unter gleicher Voraussetzung würde man bei dem in Bezug auf Fig. 367 berechneten Zahlenbeispiele für α einen Werth erhalten:

$$\alpha = \frac{\sin\delta}{f} \cdot \lg\left(\frac{K}{P}\right) = \frac{0,5}{0,4} \lg 500 = 7,768,$$

der nur halb so gross ist als der oben gefundene.

§ 91.

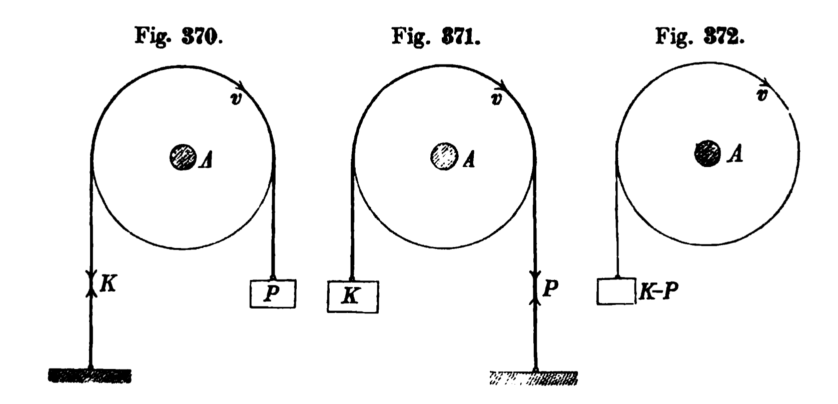
Bremsband.

(Differenzial-Bremse.)

Das Umlegen eines gespannten Bandes um eine Triebwelle (oder eine auf derselben befestigte Scheibe) erzeugt einen Reibungswiderstand, welcher die Drehbewegung derselben in ähnlicher Weise verzögert, wie das Anlegen des in § 88 beschriebenen Prony'schen Zaumes. Es kann daher bei der Messung der mechanischen Arbeit, welche von einer treibenden Welle A auf die getriebene Welle B übertragen wird, statt des Prony'schen

Zaumes auch ein einfaches Bremsband benutzt werden, um die Bewegung der Triebwelle durch Reibung zu verzögern, wobei im Uebrigen dasselbe Verfahren anzuwenden ist, welches in § 88 mit Bezug auf Fig. **360** bereits beschrieben wurde.

Um die erforderliche Spannung hervorzubringen, befestigt man das eine Ende des Bremsbandes an einem festen Punkte und belastet das andere Ende mit Gewichten so lange, bis durch die erzeugte Reibung die normale Drehgeschwindigkeit der Triebwelle wieder hergestellt ist. Diesen Versuch hat man zwei Mal auf verschiedene Arten auszuführen: das eine Mal auf die in Fig. **370** dargestellte Art, indem man dasjenige Ende direct belastet, bei welchem die Reibung und das angehängte Gewicht in gleichem Sinne auf das Bremsband wirken, das andere Mal auf die in Fig. **371** dargestellte Art, bei welcher Reibung und Gewicht in



entgegengesetztem Sinne wirken. Jede von den beiden spannenden Kräften K und P, welche auf die Enden des Bremsbandes wirken müssen, um die erforderliche Reibung hervorzubringen, kann auf diese Weise durch directe Messung bestimmt werden.

Nach Gleichung 361) wirken die von den spannenden Kräften K und P hervorgebrachten Reibungswiderstände auf die rotirende Scheibe gerade so wie ein Gewicht $K - P$, welches an einem um die Scheibe gewickelten Faden hängend hinaufgewunden wird mit einer Geschwindigkeit v gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe (Fig. **372**). Zum Heben dieses Gewichtes würde pro Secunde die mechanische Arbeit erforderlich sein:

$$365)\quad \mathfrak{A} = (K - P)\, v.$$

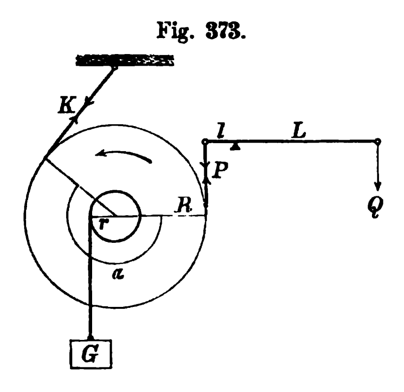
Ebenso gross ist auch die gesuchte mechanische Arbeit, welche vor Anstellung des Versuches von der treibenden Welle A auf die getriebene Welle B übertragen wurde (Fig. **360**).

Wenn z. B. bei normaler Umlaufszahl der Triebwelle die Umfangsgeschwindigkeit der Bremsscheibe $v = 2^m,5$ ist, und bei den Bremsversuchen $P = 100$ Kil., $K = 250$ Kil. gefunden wurde, so ist die gesuchte mechanische Arbeit:

$$\mathfrak{A} = (250 - 100)\,2,5 = 375^{mk} = 5 \text{ Pferdekräfte}.$$

Wenn an einem um die Welle A (oder eine auf derselben befestigte Trommel) gewickelten Faden ein Gewicht G hängt, so würde die Wirkung dieses Gewichtes im Hervorbringen einer beschleunigten Drehbewegung bestehen, und die Last G würde in beschleunigter Bewegung vertical abwärts sinken. Soll durch ein Bremsband diese Beschleunigung verhindert, also entweder ein gleichförmiges Sinken der Last, oder — bei einmal vorhandenem Ruhezustande — eine Fortdauer des Ruhezustandes bewirkt werden, so muss das Moment des am Umfange der Bremsscheibe wirkenden Reibungswiderstandes $K - P$ dem Momente der Last G gleich sein. Nach Fig. **373** ist also die Gleichgewichts-Bedingung für die Welle A:

Fig. **373**.



$$366)\quad Gr = (K - P)\,R.$$

Wenn man hierin für K den in Gleichung 360) gefundenen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$367)\quad G = P\frac{R}{r}\left(e^{f\alpha} - 1\right).$$

Als Gleichgewichts-Bedingung des Hebels, durch welchen die Kraft P auf das Bremsband übertragen wird, erhält man nach Fig. **373** die Gleichung $Pl = QL$ oder:

$$368)\quad Q = P\frac{l}{L},$$

und wenn man diese letztere durch Gleichung 367) dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$369)\quad \frac{Q}{G} = \frac{l}{L}\,\frac{r}{R}\left(\frac{1}{e^{f\alpha} - 1}\right).$$

Wenn z. B. der von dem Bremsbande umspannte Bogen zwei Drittel des ganzen Umfanges beträgt, so würde $\alpha = \frac{2}{3} \cdot 2\pi = 4{,}19$ zu setzen sein; und wenn ferner $f = 0{,}2$, $\frac{l}{L} = \frac{1}{20}$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$ gesetzt wird, so erhält man:

$$\frac{Q}{G} = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{e^{0{,}2 \cdot 4{,}19} - 1}\right) = \frac{1}{104{,}8}.$$

Um also einer Last $G = 1048$ Kil. das Gleichgewicht zu halten, würde am Ende des Bremshebels eine Kraft $Q = 10$ Kil. angebracht werden müssen.

Die grössere von den beiden spannenden Kräften K und P ist allemal diejenige, welche der Umfangsgeschwindigkeit der Bremsscheibe entgegen wirkt. Es ist also hinsichtlich der Wirkung einer solchen Bremsvorrichtung am vortheilhaftesten, mit dem Bremshebel dasjenige Ende des Bremsbandes in directe Verbindung zu setzen, an welchem die hervorgebrachte Zugkraft in der Richtung der Umfangsgeschwindigkeit wirkt. Nach Gleichung 360) würde z. B. im vorliegenden Falle für das Verhältniss der beiden Spannungen der Werth sich ergeben:

$$\frac{K}{P} = e^{f\alpha} = 2{,}31.$$

Wenn also statt der in Fig. 373 dargestellten Anordnung die entgegengesetzte gewählt wäre (nämlich diejenige, bei welcher das stärker gespannte Ende des Bandes mit dem Bremshebel verbunden wäre), so würde unter sonst gleichen Umständen eine 2,31 mal grössere Kraft $Q = 23{,}1$ Kil. am Endpunkte des Bremshebels angebracht werden müssen.

Differenzial-Bremse.

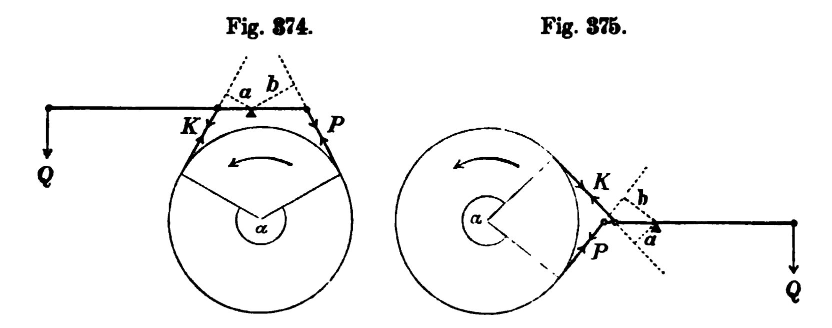
Bei der in Fig. 373 dargestellten Anordnung ist es der Widerstand eines festen Punktes, welcher zum Hervorbringen der grösseren von den beiden Spannungen K und P benutzt wird, und die kleinere Spannung bildet diejenige Kraft, welche der Drehung des Bremshebels als Widerstand entgegenwirkt. Eine Steigerung der Wirksamkeit des Apparates kann man dadurch erreichen, dass man statt dessen beide Enden des Bremsbandes mit dem beweglichen Hebel verbindet und dabei den Befestigungspunkt für das stärker gespannte Ende so wählt, dass die von demselben auf den Bremshebel übertragene Kraft fördernd auf die Drehung desselben einwirkt (Fig. 374 und Fig. 375). Wenn das Verhältniss der Hebelarme der beiden Kräfte K und P so gewählt wird, dass $Ka = Pb$ wird, oder:

$$370)\quad \frac{b}{a} = \frac{K}{P} = e^{f\alpha},$$

so halten die Kräfte K und P für sich allein schon den Bremshebel im Gleichgewicht, und für die dritte Kraft Q ergiebt sich

demnach die Grösse Null, d. h. die kleinste am Ende des Bremshebels angebrachte Kraft würde in diesem Falle schon ausreichen, um beliebig grosse Spannungen in dem Bremsbande hervorzu-

Fig. 374. Fig. 375.



bringen und die Beschleunigung der Bremsscheibe zu verhindern — wie gross auch immer das Moment der auf dieselbe wirkenden Drehkraft sein möge.

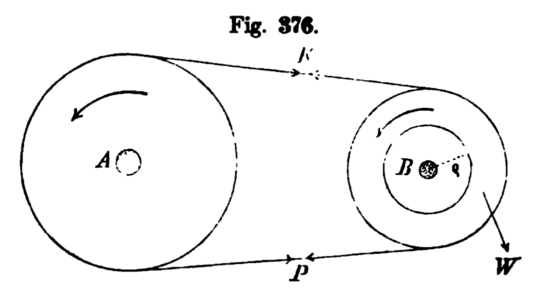
Bei den oben angenommenen Zahlenwerthen $\alpha = \frac{2}{3} \cdot 2\pi$ und $f = 0,2$ würde z. B. für das Verhältniss der Hebelarme die Grösse $\frac{b}{a} = 2,31$ zu wählen sein, um den genannten Zweck zu erreichen.

§ 92.

Riemenscheiben.

Von den beiden Wellen A und B in Fig. 376 ist A die treibende, B die getriebene; mittelst eines die beiden Scheiben umspannenden Frictionsbandes (Riemens) wird die gleichförmige Drehbewegung von der einen auf die andere Welle übertragen — zugleich aber auch eine gewisse mechanische Arbeit, insofern ein der Umdrehung der getriebenen Welle am Hebelarme ϱ entgegen wirkender Widerstand W dabei zu überwinden ist. Es sollen die Spannungen K und P bestimmt werden, welche in den

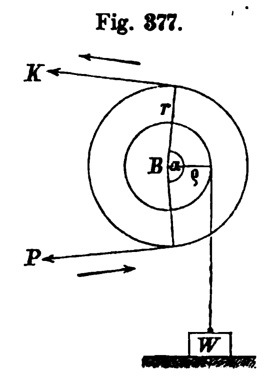
Fig. 376.



beiden Theilen des Bandes mindestens vorhanden sein müssen, wenn dasselbe, ohne an den Scheibenumfängen zu gleiten, die Drehbewegung mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit von der einen auf die andere Scheibe übertragen soll. Vorausgesetzt wird vorläufig, dass der Scheibendurchmesser — folglich auch der Winkel des von dem Bande umspannten Bogens — an der getriebenen Welle kleiner ist als an der treibenden, woraus folgt, dass bei gleicher Grösse der Reibungscoefficienten ein etwaiges Gleiten immer nur am Umfange der getriebenen Scheibe stattfinden wird.

Die Wirkung des Widerstandes W kann man sich veranschaulichen durch ein gleich grosses Gewicht, welches an einem um die Trommel vom Halbmesser ϱ gewickelten Faden hängend bei Umdrehung der Welle B hinaufgezogen wird. Denkt man sich dieses Gewicht einstweilen von einer festen Unterlage unterstützt und die Spannungen anfänglich so klein, dass das mit der treibenden Scheibe umlaufende Band längs des Umfanges der getriebenen Scheibe gleitet, ohne die Welle B zu drehen und das Gewicht W dabei zu heben (Fig. 377), so findet man (nach § 90, Gleichung 360), dass während dieses Gleitens die Kräfte K und P beständig der Bedingung entsprechen müssen:

Fig. 377.



$$K = Pe^{f\alpha}.$$

Denkt man sich alsdann die Spannung in dem Bande allmählich vergrössert — etwa durch Druckkräfte, welche die Zapfenlager der beiden Wellen von einander abwärts nach aussen drängen — so wird die Differenz der beiden Spannungen:

$$371)\quad K - P = P(e^{f\alpha} - 1)$$

ebenfalls zunehmen, weil von den beiden Factoren auf der rechten Seite der erstere zunimmt, während der andere unverändert bleibt. So lange das statische Moment dieser Spannungsdifferenz noch kleiner ist als das Widerstandsmoment $W\varrho$, wird der Ruhezustand der Welle B fortdauern (nach Gleichung 361), und erst in dem Augenblicke, wenn:

$$372)\quad (K - P)\,r = W\varrho$$

wird, beginnt die Welle sich zu drehen, wobei das Gewicht W gehoben wird.

Sobald die Umfangsgeschwindigkeit der getriebenen Scheibe der Geschwindigkeit des Bandes gleich geworden ist, hört das Gleiten desselben auf, und die Drehung der Welle B wird eine gleichförmige. Während vorher mit dem Wachsen der Spannungen auch die Differenz derselben zunahm, würde nunmehr bei etwaiger fernerer Zunahme der Spannungen ihre Differenz nicht weiter zunehmen, weil die Bedingung der gleichförmigen Drehbewegung erfordert, dass das Moment der Spannungsdifferenz stets gleich dem Widerstandsmomente bleibt; die Zunahme würde vielmehr zu gleichen Theilen auf die beiden Spannungen K und P sich vertheilen. Während der gleichförmigen Bewegung der beiden Wellen sind also in den beiden Riementheilen die Spannungen $K + \Delta$ und $P + \Delta$ vorhanden, worin K und P die in den Gleichungen 371) und 372) angegebenen Bedeutungen haben, und Δ die in Folge jener Spannungsvermehrung noch hinzugekommene Spannungsgrösse bezeichnet.

Die aus der Verbindung obiger beiden Gleichungen sich ergebenden Werthe:

$$373)\quad P = W\frac{\varrho}{r}\left(\frac{1}{e^{fa} - 1}\right),\qquad 374)\quad K = W\frac{\varrho}{r}\left(\frac{e^{fa}}{e^{fa} - 1}\right)$$

bilden demnach die unteren Grenzwerthe für die Spannungen, welche in den beiden Riementheilen während der Bewegung vorhanden sein müssen. Wenn bei eintretendem Ruhezustande der beiden Wellen die Spannungsunterschiede sich ausgleichen, so wird die alsdann gleichförmig über die ganze Länge des Riemens vertheilte Spannung wenig verschieden sein von dem arithmetischen Mittel der grössten und kleinsten Spannungen, welche während der Bewegung eingetreten waren. Es kann daher die Grösse:

$$375)\quad S = \frac{K + P}{2} = \frac{W}{2}\,\frac{\varrho}{r}\left(\frac{e^{fa} + 1}{e^{fa} - 1}\right)$$

angesehen werden als der untere Grenzwerth für diejenige Spannung, welche vor Eintritt der Bewegung dem Riemen beim Auflegen ertheilt werden musste.

Wäre der Scheibendurchmesser — folglich auch der Winkel des vom Riemen umspannten Bogens — an der treibenden Welle kleiner als an der getriebenen, so würde die oben gefundene Spannung noch nicht ausreichen, um das Gleiten des Riemens an der treibenden Scheibe zu verhindern. In diesem Falle müsste viel-

mehr die Spannung P des schwächer gespannten Theiles noch so weit vergrössert werden, bis die nach Substitution des kleineren Winkels α_1 (statt α) aus Gleichung 371) zu berechnende Spannungsdifferenz die in Gleichung 372) als erforderlich gefundene Grösse erreicht. Hieraus ergiebt sich, dass es nur nöthig ist, mit dem Buchstaben α in den Gleichungen 373), 374), 375) stets den kleineren von den beiden Winkeln zu bezeichnen, um zu erreichen, dass die Gleichungen für beide Fälle gültig sind.

Wenn der Widerstand W nicht direct gegeben wäre, sondern statt dessen die pro Secunde übertragene mechanische Arbeit und die Umlaufsgeschwindigkeit der getriebenen Welle, so würde durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für die mechanische Arbeit:

$$W \,.\, 2\varrho\pi \cdot \frac{n}{60} = N \,.\, 75,$$

in denen n die Umdrehungszahl pro Minute, und N die Anzahl der übertragenen Pferdekräfte bezeichnet, das Widerstandsmoment:

$$376)\quad W\varrho = \frac{N}{n} \cdot \frac{60 \,.\, 75}{2\pi}$$

zu bestimmen und der gefundene Werth alsdann in Gleichung 375) zu substituiren sein.

Wenn z. B. $N = 2$, $n = 80$, $r = 0^m{,}4$ $\alpha = \pi$, und (als Reibungscoefficient für lederne Riemen auf gusseisernen Riemenscheiben) $f = 0{,}28$ gesetzt wird, so ergiebt sich zunächst für das Widerstandsmoment der Werth:

$$W\varrho = \frac{2 \,.\, 60 \,.\, 75}{80 \,.\, 2 \,.\, 3{,}14} = 17{,}91,$$

und nach Substitution dieses Werthes in Gleichung 375) erhält man als unteren Grenzwerth der erforderlichen mittleren Spannung:

$$S = \frac{17{,}91}{2 \,.\, 0{,}4} \cdot \left(\frac{e^{0{,}28 \,.\, 3{,}14} + 1}{e^{0{,}28 \,.\, 3{,}14} - 1}\right) = 54{,}15 \text{ Kil.}$$

Bei dieser mittleren Spannung würden während der Bewegung in den beiden Riementheilen die Spannungen entstehen nach Gleichung 373) und Gleichung 374):

$$P = \frac{17{,}91}{0{,}4\,(2{,}41 - 1)} = 31{,}8 \text{ Kil.}$$

$$K = \frac{17{,}91 \,.\, 2{,}41}{0{,}4 \,.\, (2{,}41 - 1)} = 76{,}5 \text{ Kil.}$$

Je grösser der Reibungscoefficient f ist, um so kleiner wird die erforderliche Spannung des Riemens, und da durch den gespannten Riemen die beiden Wellen gegen ihre Zapfenlager gedrängt, folglich die Zapfenreibungswiderstände dadurch vermehrt

werden, so ist das Princip der Keilnuthen auch hier mit Vortheil anzuwenden (vergl. § 89). Wenn die cylindrischen Scheiben durch Keilnuthenräder, und die flachen Riemen durch runde Schnüre ersetzt werden (s. Fig. **368** und **369**), so ergeben sich für die erforderlichen Spannungen kleinere Werthe, welche man erhält, indem man statt des Reibungscoefficienten f den Reibungscoefficienten für Keilnuthen:

$$f_1 = \frac{f}{\sin\delta}$$

in den oben gefundenen Gleichungen substituirt. Für diesen Fall würden also die erforderlichen Spannungen aus folgenden Gleichungen zu berechnen sein:

$$377)\quad P = \frac{W\varrho}{r\left(e^{\frac{f\alpha}{\sin\delta}} - 1\right)},\qquad 378)\quad K = \frac{W\varrho\, e^{\frac{f\alpha}{\sin\delta}}}{r\left(e^{\frac{f\alpha}{\sin\delta}} - 1\right)},$$

$$379)\quad S = \frac{W\varrho}{2r}\left(\frac{e^{\frac{f\alpha}{\sin\delta}} + 1}{e^{\frac{f\alpha}{\sin\delta}} - 1}\right).$$

Wenn z. B. der Convergenzwinkel 2δ der Keilnuthen 60 Grad betrüge, so würde bei den oben angenommenen Zahlenwerthen $\frac{f}{\sin\delta} = \frac{0,28}{0,5} = 0,56$ (statt $f = 0,28$) zu setzen sein, und es würden für die erforderlichen Spannungsgrössen statt der oben gefundenen die folgenden kleineren Werthe sich ergeben:

$$P = \frac{17,91}{0,4\,(5,8 - 1)} = 9,3 \text{ Kil.},\qquad K = \frac{17,91\,.\,5,8}{0,4\,(5,8 - 1)} = 54,1 \text{ Kil.}$$

$$S = \frac{K + P}{2} = \frac{9,3 + 54,1}{2} = 31,7 \text{ Kil.}$$

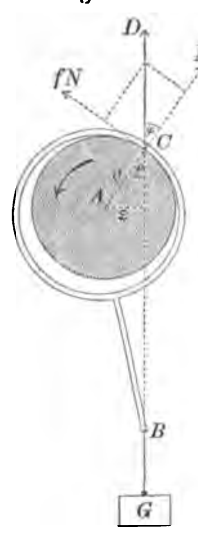
§ 93.

Ketten- und Seil-Biegungswiderstände.

Auf den in Fig. **378** dargestellten an einem rotirenden Zapfen in seiner Gleichgewichtslage hängenden belasteten Ring wirken zwei Kräfte, nämlich erstens: das an dem Punkte B (einer mit dem Ringe zu einem Körper vereinigten Stange) angehängte Gewicht G, zweitens der von dem rotirenden Zapfen geleistete Gegendruck D. Diese letztere Kraft ist anzusehen als die Mittelkraft

von dem rechtwinkelig zur Zapfenoberfläche gerichteten Gegendrucke N und dem tangential gerichteten Reibungswiderstande fN, weicht also um den Reibungswinkel φ von der Richtung des radial wirkenden Normaldruckes ab. Hieraus folgt, dass die Berührung zwischen Zapfen und Ring an derjenigen Stelle C des Zapfenumfanges stattfinden muss, deren Halbmesser AC um den Winkel φ von der Verticalen abweicht. Die Horizontal-Entfernung dieses Punktes vom Zapfenmittelpunkte hat nach Fig. 378 die Grösse:

Fig. 378.



$$380)\quad \varepsilon = \varrho \,.\, \sin \varphi.$$

Die Gleichgewichts-Bedingung des Ringes erfordert, dass die Verticale des Belastungspunktes ebenfalls um die Grösse ε von der Verticalen des Zapfenmittelpunktes abweicht. Diese Grösse ist unabhängig von der Drehgeschwindigkeit des Zapfens; es wird also die in Fig. 378 dargestellte Lage des Ringes auch dann noch eine Gleichgewichtslage sein, wenn die Drehgeschwindigkeit sehr klein oder auch Null ist.

Denkt man sich an den beiden Enden A und A_1 eines gleicharmigen horizontalen Hebels Zapfen befestigt und an jedem dieser Zapfen auf die eben beschriebene Art einen belasteten Ring in seiner Gleichgewichtslage aufgehängt — in derjenigen nämlich, welche einer Drehung des Zapfens nach links herum entsprechen würde — so findet man als Gleichgewichts-Bedingung des Hebels AOA_1 nach Fig. 379 die Gleichung:

Fig. 379.

$$K(a - \varepsilon) = W(a + \varepsilon)$$

oder:

$$\frac{K}{W} = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{a}}{1 - \frac{\varepsilon}{a}}.$$

Wenn man in der letzten Gleichung auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit $1 + \frac{\varepsilon}{a}$ multiplicirt, so erhält man:

$$\frac{K}{W} = \frac{1 + 2\frac{\varepsilon}{a} + \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2}.$$

In dieser Gleichung würde für ε der gefundene Werth $\varrho \sin \varphi$ zu substituiren sein. Für den hier vorauszusetzenden Fall indessen, wenn die Grössen ϱ und φ beide sehr klein sind, kann im Zähler und Nenner das Glied $\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2$ weggelassen, und annähernd gesetzt werden:

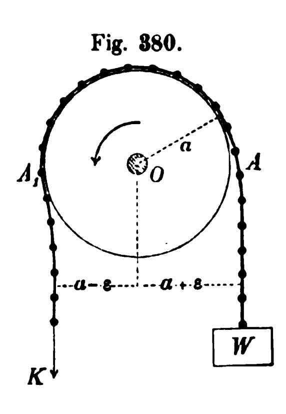
$$\frac{K}{W} = 1 + 2\frac{\varepsilon}{a}.$$

Ausserdem kann für diesen Fall $\operatorname{tg} \varphi$ statt $\sin \varphi$, also $\varepsilon = f\varrho$ gesetzt werden: man erhält also die Gleichung:

$$381)\quad \frac{K}{W} = 1 + 2f\frac{\varrho}{a}.$$

Annähernd kann diese Gleichung auch als gültig angesehen werden für das Verhältniss von Kraft zu Widerstand bei der in Fig. 380 dargestellten Kette, welche um eine in gleichförmiger Drehung begriffene Rolle umlaufend an dem einen Ende mit dem Gewichte W belastet ist und durch eine am anderen Ende vertical abwärts wirkende Zugkraft K in gleichförmiger Bewegung erhalten wird. Diese Kette ist aus einzelnen Stangen zusammengesetzt, welche durch Gelenkbolzen mit einander verbunden sind. An den Stellen A und A_1, wo die Kette resp. aus der geradlinig ausgestreckten in die gekrümmte Form und aus der gekrümmten wiederum in die geradlinige Form übergeht, findet eine Reibung der Bolzen in den Gelenken statt, und diese Reibung wirkt an beiden Stellen einer Krümmungsveränderung der Kette entgegen. In Folge dessen wird der Hebelarm der Last W stets etwas grösser, der Hebelarm der Kraft K stets etwas kleiner sein als ohne diesen Widerstand der Fall sein würde, und wenn die Drehgeschwindigkeit der Rolle so klein ist, dass die Wirkung der Centrifugal-Kräfte vernachlässigt werden darf, so können diese Aenderungen der Hebelarme auf dieselbe Weise wie in Fig. 379

Fig. 380.



bestimmt werden. Wenn also mit a der um die halbe Dicke der Kette vermehrte Rollen-Halbmesser, mit δ die Dicke der Gelenkbolzen bezeichnet (also $2\varrho = \delta$ gesetzt) wird, und der bei Umdrehung der Rolle zu überwindende Zapfenreibungswiderstand vorläufig unberücksichtigt gelassen wird, so ergiebt sich nach Gleichung 381) für die zum gleichförmigen Hinaufziehen der Last erforderliche Kraft die Gleichung:

$$382)\quad K = W + f\frac{\delta}{a}W.$$

Wären die Reibungswiderstände in den Gelenken nicht vorhanden, so würde $K = W$ sein müssen. Es bezeichnet also das zweite Glied auf der rechten Seite diejenige Grösse, um welche die Zugkraft vermehrt werden muss, um ausser dem Widerstande W noch den Biegungswiderstand der Kette zu überwinden. Dieser Biegungswiderstand hat demnach die Grösse:

$$383)\quad \mathfrak{B} = f\frac{\delta}{a}W.$$

Wenn z. B. das Verhältniss $\frac{\delta}{a} = 0,1$, und als Reibungscoefficient der Gelenkbolzen $f = 0,15$ gesetzt wird, so ergiebt sich für den Biegungswiderstand die Grösse:

$$\mathfrak{B} = 0,15 \,.\, 0,1 \,.\, W = 0,015\, W.$$

Es würde also der Biegungswiderstand in diesem Falle dieselbe Wirkung haben, wie eine Vergrösserung der angehängten Last um 1,5 Procent.

Auf ähnliche Weise, wie bei der Kette die Reibung in den Gelenken — so erzeugt bei geflochtenen Seilen die Reibung zwischen den einzelnen Litzen oder Drähten einen Biegungswiderstand, durch welchen auf die in Fig. **380** angedeutete Art das Verhältniss der Hebelarme von Kraft und Last modificirt wird. Die Grösse des Seil-Biegungswiderstandes kann jedoch nicht durch Rechnung, sondern nur durch directe Versuche ermittelt werden und hängt natürlich wesentlich von der Beschaffenheit des Seiles ab. Annäherungsweise ist der Seilbiegungswiderstand dem Quadrate der Seildicke proportional zu setzen und (nach Redtenbacher) zu bestimmen nach der Formel:

$$384)\quad \mathfrak{B} = 13\frac{\delta^2}{a}W,$$

in welcher δ die Seildicke und a den Rollenhalbmeser (in Metern ausgedrückt) bezeichnen.

Hiernach würde z. B. bei einer Seildicke $\delta = 0^m,02$ und einem Rollenhalbmesser $a = 0^m,1$ der Biegungswiderstand die Grösse haben:

$$\mathfrak{B} = 13 \cdot \frac{0{,}02^2}{0{,}1}\, W = 0{,}052\, W,$$

also wie eine Lastvermehrung um 5,2 Procent wirken.*)

§ 94.

Widerstandscoefficienten für Ketten- und Seil-Rollen.

Wie die Wirkung des Biegungswiderstandes aufgefasst werden kann als eine Vermehrung der hinaufzuziehenden Last um eine Grösse $\mathfrak{B}$, deren Bestimmung im vorigen Paragraphen erklärt wurde: so kann auch die Wirkung des bei Umdrehung der Rolle zu überwindenden Zapfenreibungswiderstandes aufgefasst werden als eine Vermehrung der Last um eine gewisse Grösse $\mathfrak{Z}$, welche auf folgende Weise zu bestimmen ist.

Wäre die Kette vollkommen biegsam, so hätte die Kraft K neben dem Widerstande W nur den Zapfenreibungswiderstand zu überwinden, und würde für die zum gleichförmigen Hinaufziehen der Last W erforderliche Zugkraft K die Gleichung sich ergeben (nach Fig. 381):

$$Ka = Wa + f(K + W)\, r, \qquad \text{oder:} \quad \frac{K}{W} = \frac{1 + f\dfrac{r}{a}}{1 - f\dfrac{r}{a}}.$$

Da die Grösse $f\dfrac{r}{a}$ in der Regel sehr klein sein wird, so kann

---

*) Nach Weisbach's Versuchen ist für getheerte Hanfseile von 1,6 Zoll Dicke bei Rollenhalbmessern von 2 bis 3 Fuss zu setzen (auf Metermaass reducirt):

$$\mathfrak{B} = 1{,}5 \text{ Kil.} + \frac{0{,}005\,65}{a} \cdot W,$$

für neue und ungetheerte Hanfseile von $\frac{3}{4}$ Zoll Dicke bei einem Rollenhalbmesser von 10,5 Zoll:

$$\mathfrak{B} = 0{,}086 \text{ Kil.} + \frac{0{,}001\,64}{a} \cdot W,$$

für Drahtseile von $\frac{3}{8}$ Zoll Dicke (bestehend aus 16 Drähten von je $\frac{1}{8}$ Zoll Dicke) bei Rollenhalbmessern von 2 bis 3 Fuss:

$$\mathfrak{B} = 0{,}49 \text{ Kil.} + \frac{0{,}002\,38}{a} \cdot W,$$

für frisch getheerte Drahtseile (mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile) von 7 Linien Dicke (bestehend aus 4 mal 4 Drähten von je 1,2 Linien Dicke):

$$\mathfrak{B} = 0{,}57 \text{ Kil.} + \frac{0{,}000\,694}{a} \cdot W.$$

— wie in dem analogen Falle des vorigen Paragraphen mit Bezug auf Gleichung 381) erklärt wurde — statt dessen annähernd gesetzt werden:

Fig. 381.

$$\frac{K}{W} = 1 + 2f\frac{r}{a},$$

oder wenn der Durchmesser des Rollenzapfens $2r = d$ gesetzt wird:

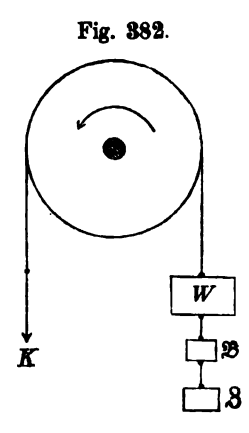
$$385)\quad K = W + f\frac{d}{a}W.$$

In dieser Gleichung bezeichnet das zweite Glied auf der rechten Seite die gesuchte Grösse $\mathfrak{Z}$, um welche die Last vermehrt werden müsste, wenn die Wirkung dieses hinzugefügten Lasttheiles mit der Wirkung des Zapfenreibungswiderstandes übereinstimmen sollte. Es ist also zu setzen:

$$386)\quad \mathfrak{Z} = f\frac{d}{a}W.$$

Hiernach kann man sich die vereinigte Wirkung der Biegungs- und Zapfenreibungs-Widerstände auf die in Fig. 382 dargestellte Weise veranschaulichen, indem man sich zu der Last W noch die beiden Gewichte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{Z}$ hinzugefügt denkt, und nunmehr die erforderliche Kraft K bestimmt — wie wenn die Kette vollkommen biegsam und der Rollenzapfen vollkommen glatt wäre — nach der Gleichung:

Fig. 382.



$$387)\quad K = W + \mathfrak{B} + \mathfrak{Z}.$$

Nach Substitution der beiden in Gleichung 383) und 386) gefundenen Werthe erhält man die Gleichung:

$$388)\quad K = W\left(1 + f_1\frac{\delta}{a} + f\frac{d}{a}\right),$$

in welcher der Reibungscoefficient der Kettenbolzen zum Unterschiede vom Zapfenreibungs-Coefficienten mit f_1 bezeichnet und die Rolle selbst als gewichtlos angenommen ist.

Der eingeklammerte Factor auf der rechten Seite bezeichnet diejenige Zahl, mit welcher man den Widerstand W zu multipliciren hat, um die Grösse der erforderlichen Zugkraft K zu er-

halten, und soll der **Widerstandscoefficient** genannt werden. Für Kettenrollen kann demnach der Widerstandscoefficient berechnet werden aus der Gleichung:

$$389)\quad \mu = 1 + f_1 \frac{\delta}{a} + f \frac{d}{a}.$$

Wenn z. B. die Dicke der Gelenkbolzen der Kette $\delta = 0^m,01$, der Rollenhalbmesser $a = 0^m,1$, der Durchmesser des Rollenzapfens $d = 0^m,015$, und als Reibungscoefficient sowohl für die Gelenkbolzen als für den Rollenzapfen $f = 0,15 = f_1$ gesetzt wird, so ergiebt sich für den Widerstandscoefficienten der Werth:

$$\mu = 1 + 0,15 \cdot \frac{0,01}{0,1} + 0,15 \cdot \frac{0,015}{0,1} = 1,0375.$$

Es würde also in diesem Falle die erforderliche Zugkraft K um 3,75 Procent grösser sein müssen als der Widerstand W.

Auf gleiche Weise erhält man als Widerstandscoefficienten für Seilrollen — indem man den Factor $f_1 \frac{\delta}{a}$ im zweiten Gliede vertauscht mit dem in Gleichung 384) angegebenen Werthe $13 \frac{\delta^2}{a}$ — die Grösse:

$$390)\quad \mu = 1 + 13 \frac{\delta^2}{a} + f \frac{d}{a}.$$

Wenn z. B. die Seildicke $\delta = 0^m,02$, der Rollenhalbmesser $a = 0^m,08$, der Durchmesser des Rollenzapfens $d = 0^m,024$, und der Zapfenreibungscoefficient $f = 0,15$ gesetzt wird, so erhält man als Widerstandscoefficienten:

$$\mu = 1 + 13 \cdot \frac{0,02^2}{0,08} + 0,15 \cdot \frac{0,024}{0,08} = 1 + 0,065 + 0,045 = 1,11.$$

Der zu überwindende Widerstand würde in diesem Falle durch den Seilbiegungswiderstand um 6,5 Procent, durch den Zapfenreibungswiderstand um 4,5 Procent, im Ganzen also um 11 Procent vergrössert, d. h. zum gleichförmigen Hinaufziehen eines Gewichtes von 100 Kil. würde eine Zugkraft von 111 Kil. erforderlich sein.

FÜNFZEHNTES CAPITEL.

Wirkung der Kräfte bei zusammengesetzter rotirender und fortschreitender Bewegung des Körpers.

§ 95.

Gleichgförmigkeits-Bedingungen für die zusammengesetzte rotirende und fortschreitende Bewegung.

Die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen eines Systems von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten gelten nicht nur für ein ruhendes, sondern auch für ein in gleichförmiger geradlinig fortschreitender Bewegung begriffenes System. Es bleiben daher die in § 83 gefundenen Bedingungen der gleichförmigen Drehbewegung auch dann noch gültig, wenn die Drehachse des rotirenden Körpers eine gleichförmige geradlinig fortschreitende Bewegung ausführt.

Eine solche zusammengesetzte Bewegung des Körpers kann aufgefasst werden als relativer Ruhezustand in Bezug auf einen Raum, welcher dieselbe gleichförmige Drehbewegung und gleichzeitig dieselbe gleichförmig fortschreitende Bewegung ausführt. Da die Beschleunigung dieser letzteren Null ist, so sind die nach den Gesetzen der relativen Bewegung an den einzelnen materiellen Punkten hinzuzufügenden Kräfte genau dieselben, welche in § 83 für die gleichförmige Drehbewegung *allein* gefunden wurden — nämlich die Centrifugal-Kräfte.

Wenn also — wie auch hier vorausgesetzt werden soll — wegen symmetrischer Massenvertheilung in Bezug auf die fortschreitende Drehachse der Einfluss der Centrifugal-Kräfte verschwindet, so gelten für die Gleichförmigkeit dieser zusammengesetzten Bewegung genau dieselben Bedingungen, welche in § 43 für das ruhende System gefunden wurden. Es müssen daher unter anderen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

Erstens: die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte in Bezug auf die Drehachse muss gleich Null sein.

Zweitens: die algebraische Summe der bei rechtwinkeliger Zerlegung in die Richtung der fortschreitenden Bewegung fallenden Seitenkräfte muss gleich Null sein.

Die erstere von diesen beiden Bedingungen bezieht sich auf die Gleichförmigkeit der Drehbewegung, die letztere auf die Gleichförmigkeit der fortschreitenden Bewegung.

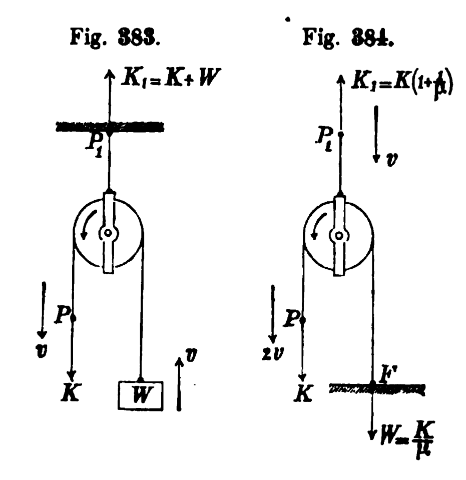
§ 96.

Rollen und Flaschenzüge.

Während die Last W von der Kraft K mittelst des um die Rolle laufenden Seiles gleichförmig hinaufgezogen wird, hat das (einstweilen unbeweglich vorausgesetzte) Zapfenlager der Rolle den Gegendruck:

$$391)\quad K_1 = K + W$$

zu leisten, um die fortschreitende Bewegung der Rollenachse zu verhindern. Dieser Gegendruck lässt sich auch dadurch hervorbringen, dass das Zapfenlager der Rolle (oder das die Rollen-Achse enthaltende Gehäuse) an einem Faden aufgehängt wird, der oben an einem festen Punkte P_1 befestigt ist (Fig. 383). In diesem Faden wird alsdann eine Spannung von derselben Grösse K_1 stattfinden — abgesehen von dem Gewichte des Rollengehäuses, welches ebenso wie das der Rolle als verhältnissmässig klein vorausgesetzt wird und unberücksichtigt bleiben soll —. Nach Gleichung 388) ist die zum gleichförmigen Hinaufziehen der Last W erforderliche Zugkraft:



$$392)\quad K = \mu \, . \, W,$$

worin μ als Widerstandscoefficient die in Gleichung 390) angegebene Bedeutung hat. Wenn man den hieraus für W sich ergebenden Werth $W = \frac{K}{\mu}$ in Gleichung 391) substituirt, so erhält man als Spannung des oberen Fadens:

$$393)\quad K_1 = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Nach § 95 wird diese Gleichung auch dann noch gültig bleiben, wenn der ganze Raum, in welchem der Vorgang stattfindet (und

in welchem der Befestigungspunkt P_1 relativ unbeweglich ist), eine gleichförmig fortschreitende Bewegung ausführt mit einer Geschwindigkeit, welche der vertical aufwärts gerichteten Geschwindigkeit v der aufsteigenden Last W gleich und entgegengesetzt ist. Durch das Hinzukommen dieser Bewegung erhält der Angriffspunkt P der Kraft K die Geschwindigkeit $2v$, und wird die absolute Geschwindigkeit der Last W auf Null reducirt. Es kann also dieselbe Spannung, welche vorher durch die angehängte Last W in dem rechts herabhängenden Fadentheile erzeugt wurde, nunmehr auch dadurch hervorgebracht werden, dass das untere Ende dieses Fadens an einem festen Punkte F befestigt wird (Fig. **384**).

Der obere Faden, welcher vorher im Ruhezustande sich befand, bewegt sich jetzt mit der Geschwindigkeit v abwärts, während seine Spannung die in Gleichung 393) angegebene Grösse behält. Der obere Endpunkt desselben P_1 wird also bei dieser Anordnung mittelbar durch die Kraft K gleichförmig abwärts gezogen, und die an diesem Punkte angreifende Kraft K_1 dabei als Widerstand überwunden, d. h. es wird eine Zugkraft von der Grösse K_1 auf den Punkt P_1 übertragen. Eine Vergleichung dieser indirecten Wirkung mit derjenigen, welche die Kraft K bei unmittelbarer Wirkung auf diesen Punkt hervorbringen würde, zeigt, dass bei dieser Anordnung die übertragene Zugkraft auf das $1 + \frac{1}{\mu}$-fache gesteigert wird dadurch, dass unter Vermittelung der beweglichen Rolle der Widerstand des festen Punktes F gezwungen wird, zu der auf den Punkt P_1 übertragenen Kraft einen Beitrag von der Grösse $W = \frac{K}{\mu}$ zu liefern.

Wenn dasselbe Verfahren, durch welches auf die in Fig. **384** angegebene Art die mittelbare Wirkung der angewendeten Zugkraft K auf die Grösse K_1 gesteigert wurde, in Bezug auf die Kraft K_1 wiederum angewendet wird (Fig. **385**), so ergiebt sich für die Spannung des oberhalb der zweiten Rolle befindlichen Fadens nach Gleichung 393) durch entsprechende Vertauschung der Indices die Gleichung:

$$394)\quad K_2 = K_1\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2$$

und für die Spannung des an dem festen Punkte F_1 befestigten Fadens die Gleichung:

$$395)\quad W_1 = \frac{K_1}{\mu} = \frac{K}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Wenn allgemein mit n die Anzahl der angewendeten Rollen bezeichnet wird, so ergeben sich auf analoge Weise durch fortgesetzte Wiederholung der obigen Berechnung die allgemeinen Gleichungen:

Fig. 385.

396) $K_n = K\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n$ und

397) $W_{n-1} = \frac{K}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{n-1}$.

Wenn z. B. als Mittelwerth des nach § 94 zu berechnenden Widerstandscoefficienten $\mu = 1{,}1$ gesetzt wird, so erhält man für die in Fig. 385 angegebene Rollen-Anzahl die Werthe:

$$K_3 = K\left(1+\frac{1}{1{,}1}\right)^3 = 6{,}96\,K.$$

$$W_2 = \frac{K}{1{,}1}\left(1+\frac{1}{1{,}1}\right)^2 = 3{,}31\,K.$$

Während der Angriffspunkt der Zugkraft K mit der Geschwindigkeit v abwärts gezogen wird, steigt die Last W_2 mit der Geschwindigkeit $\frac{v}{4}$. Es wird also von der Zugkraft K die Nutzarbeit $W_2 \cdot \frac{v}{4}$ hervorgebracht, während die unmittelbar von derselben verrichtete Arbeit gleich Kv ist; das Verhältniss der beiden Arbeitsgrössen ist:

Fig. 386.

$$\frac{W_2 \cdot \frac{v}{4}}{Kv} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3{,}31\,.\,K}{K} = 0{,}8275,$$

der Nutzeffect beträgt also 82,75 Procent der aufgewendeten Arbeit, und 17,25 Procent derselben werden durch Reibungs- und Biegungs-Widerstände verzehrt.

Wenn man in den gefundenen allgemeinen Gleichungen die Zahl μ vertauscht mit der Zahl $\frac{1}{\mu}$, so gelten dieselben für eine Bewegung des ganzen Systems in entgegengesetztem Sinne (Fig. 386), bei welcher an jeder einzelnen Rolle „Kraft“ und „Widerstand“ ihre Bedeutung gegen einander austauschen. Man erhält also für diesen Fall die Gleichungen:

398) $K_n = K(1+\mu)^n$,

399) $W_{n-1} = \mu K(1+\mu)^{n-1}$.

Bei der in Fig. 386 angenommenen Rollenzahl ergiebt sich z. B. (wenn wiederum $\mu = 1,1$ gesetzt wird), für die zum Heben der Last K erforderliche Zugkraft K_3 der Werth:

$$K_3 = K(1 + 1,1)^3 = 9,261\, K.$$

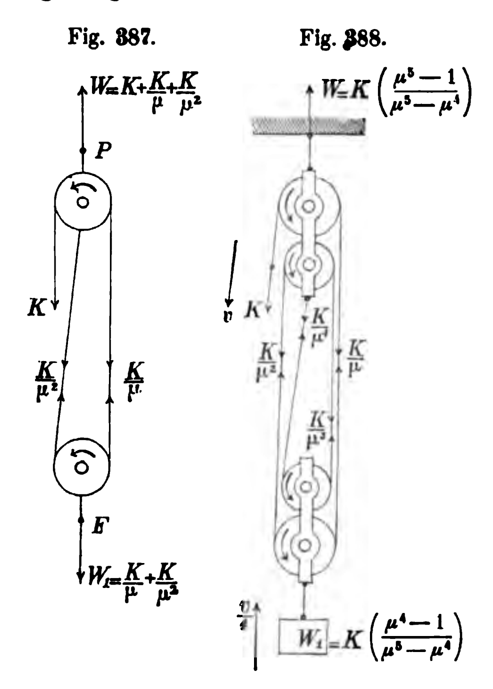
Das Verhältniss der von diesen beiden Kräften pro Zeiteinheit verrichteten mechanischen Arbeiten ist:

$$\frac{Kv}{K_3 \cdot \frac{v}{8}} = \frac{8}{9,261} = 0,864.$$

Es werden also in diesem Falle 86,4 Procent der aufgewendeten Arbeit zum Heben der Last, und 13,6 Procent zum Ueberwinden der Reibungs- und Biegungs-Widerstände verwendet.

Wenn man bei der in Fig. 384 dargestellten Anordnung, anstatt das untere Ende des an der rechten Seite befindlichen Fadens an dem Punkte F zu befestigen, den Faden um eine daselbst angehängte Rolle herumführt und das Ende desselben alsdann mit dem Gehäuse der oberen Rolle verbindet, so entsteht die in Fig. 387 dargestellte Anordnung (bei welcher die Entfernung der beiden Rollen so gross vorausgesetzt wird, dass die Abweichung der Faden-Richtungen vom Parallelismus vernachlässigt werden kann). Die Spannungen der beiden Fadentheile rechts und links neben der unteren Rolle verhalten sich bei der in der Figur angedeuteten Bewegungsrichtung wie Kraft und Widerstand zu einander; es muss folglich die Spannung an der rechten Seite μ-mal so gross sein als die andere, woraus sich für letztere der Werth $\frac{K}{\mu^2}$ ergiebt. Für die an den Punkten P und F hervorgebrachten Kraftwirkungen erhält man alsdann die in der Figur angegebenen Werthe.

Fig. 387. Fig. 388.



Auf analoge Weise findet man für den in Fig. **388** dargestellten Flaschenzug, indem man — von dem freien Ende des Fadens ausgehend, den Lauf desselben verfolgend — die Spannung irgend eines Fadentheiles durch μ dividirt, die Spannung des nächstfolgenden Fadentheiles, worauf dann die auf die Rollengehäuse ausgeübten Kraftwirkungen W und W_1 resp. gleich zu setzen sind den Summen der Spannungen sämmtlicher Fadentheile, welche mit dem betreffenden Rollen-Systeme in directer Verbindung stehen. Hiernach erhält man für die auf das obere Rollengehäuse ausgeübte Zugkraft die Gleichung:

$$W = \left(K + \frac{K}{\mu} + \frac{K}{\mu^2} + \frac{K}{\mu^3} + \frac{K}{\mu^4}\right)$$

(in welcher für den Widerstands-Coefficienten μ ein dem mittleren Durchmesser der verschiedenen Rollen entsprechender Werth zu setzen sein würde). Indem man alsdann dem für W gefundenen Ausdrucke die Form giebt:

$$400)\quad W = \frac{K}{\mu^4}(\mu^4 + \mu^3 + \mu^2 + \mu + 1) = \frac{K}{\mu^4}\left(\frac{\mu^5 - 1}{\mu - 1}\right) = K\left(\frac{\mu^5 - 1}{\mu^5 - \mu^4}\right),$$

findet man leicht das allgemeine Gesetz, nach welchem das Verhältniss der beiden Kräfte W und K mit der Anzahl der in jedem Gehäuse befindlichen Rollen sich ändert. Wenn die Zahl der in jedem Gehäuse befindlichen Rollen n statt 2 betrüge, so würde zu setzen sein:

$$401)\quad W = K\left(\frac{\mu^{2n+1} - 1}{\mu^{2n+1} - \mu^{2n}}\right).$$

Für das untere Rollen-System ist die Spannungssumme der mit den Rollen in directer Verbindung stehenden Fadentheile um die Spannung K kleiner als für das obere; also ist:

$$402)\quad W_1 = W - K = K\left(\frac{\mu^{2n} - 1}{\mu^{2n+1} - \mu^{2n}}\right).$$

Die beiden allgemeinen Gleichungen 401) und 402) gelten auch für die in Fig. **389** dargestellte Anordnung, bei welcher die in jedem der beiden Rollengehäuse befindlichen Rollen nicht unter- und übereinander, sondern vor- und hintereinander liegend angeordnet sind in der Weise, dass von jedem der beiden Rollen-Systeme nur die vornliegende in der Figur sichtbar erscheint.

Wenn z. B. die Zahl der Rollen in jedem Gehäuse 4 beträgt, und wieder $\mu = 1,1$ gesetzt wird, so ergeben sich die Werthe:

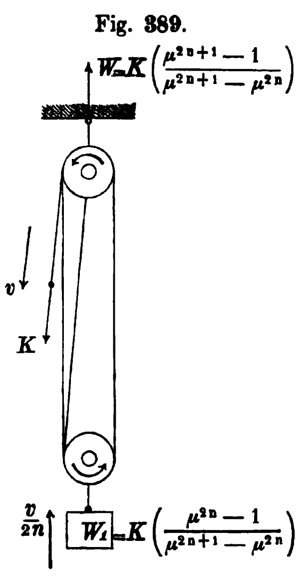


Fig. 389.

$$W = K\left(\frac{1,1^9 - 1}{1,1^9 - 1,1^8}\right) = 6,346\,K.$$

$$W_1 = W - K = 5,346\,K.$$

Wenn das obere Rollengehäuse an einem festen Punkte aufgehängt ist, und der an dem unteren Rollengehäuse wirkende Widerstand W_1 durch eine angehängte Last gebildet wird, so beträgt die Geschwindigkeit des Aufsteigens dieser Last den 8-ten Theil von der Geschwindigkeit v, mit welcher das freie Ende des Seiles durch die Kraft K abwärts bewegt wird. Das Verhältniss der beiden mechanischen Arbeiten ist demnach:

$$\frac{W_1 \cdot \frac{v}{8}}{Kv} = \frac{5,346}{8} = 0,668.$$

Es wird also bei dieser Anordnung etwa ein Drittel der Total-Arbeit auf Ueberwindung der Reibungs- und Seilbiegungs-Widerstände verwendet.

Wäre statt dessen das untere Rollengehäuse das befestigte und das obere das bewegliche, so würde das Geschwindigkeits-Verhältniss der Angriffspunkte von Widerstand und Kraft gleich $\frac{1}{9}$ sein, und für das Verhältniss der mechanischen Arbeiten der Werth sich ergeben:

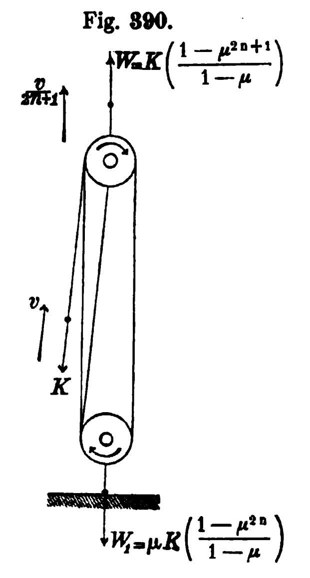


Fig. 390.

$$\frac{W_1 \cdot \frac{v}{9}}{Kv} = \frac{6,346}{9} = 0,705.$$

Bei der letzteren Anordnung würde also der Arbeitsverlust nur 29,5 Procent betragen.

Für den in Fig. 390 dargestellten Fall, bei welchem die an dem oberen Rollengehäuse wirkende Kraft W die bewegende Kraft, und die am freien Ende des Seiles angreifende Kraft K den zu überwindenden Widerstand bildet, bei welchem also die Bewegung des ganzen Systems in einem dem vorigen entgegengesetzten Sinne erfolgt, hat man in den gefundenen allgemeinen Gleichungen die Zahl μ mit der Zahl $\frac{1}{\mu}$ zu vertauschen und erhält dann die Gleichungen:

$$403)\quad W = K\left\{\frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{\mu}\right)^{2n}}\right\} = K\left(\frac{1-\mu^{2n+1}}{1-\mu}\right).$$

$$404)\quad W_1 = W - K = \mu K\left(\frac{1-\mu^{2n}}{1-\mu}\right).$$

Wenn auch hier wieder $\mu = 1{,}1$ und $n = 4$ gesetzt wird, so ergiebt sich für die zum Ueberwinden des Widerstandes K erforderliche Zugkraft W der Werth:

$$W = K\left(\frac{1-1{,}1^9}{1-1{,}1}\right) = 13{,}58\,K,$$

und das Verhältniss der beiden mechanischen Arbeiten beträgt in diesem Falle:

$$\frac{Kv}{W \cdot \frac{v}{9}} = \frac{9}{13{,}58} = 0{,}663.$$

Für den am unteren Rollengehäuse wirkenden Widerstand ergiebt sich der Werth:

$$W_1 = W - K = 12{,}58\,K.$$

Wenn das untere Rollengehäuse statt des oberen das bewegliche wäre, so würde das Verhältniss der Geschwindigkeiten gleich $\frac{1}{8}$ sein und das Verhältniss der beiden mechanischen Arbeiten betrüge:

$$\frac{Kv}{W_1 \cdot \frac{v}{8}} = \frac{8}{12{,}48} = 0{,}636.$$

Der Arbeitsverlust würde also bei der ersteren Anordnung 33,7 Procent, bei der letzteren 36,4 Procent betragen.

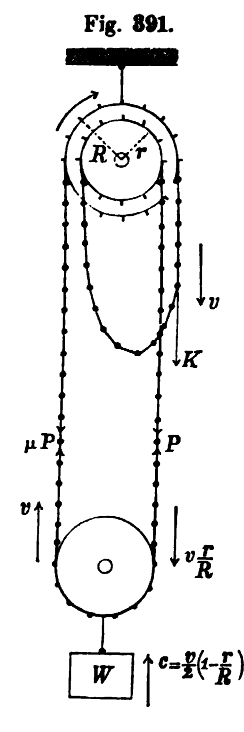
§ 97.

Differenzial-Flaschenzug.

Die oberen beiden Rollen bilden zusammen **ein** Stück und drehen sich um eine gemeinschaftliche feste Drehachse O (Fig. 391). Jede der beiden Rollen ist am Umfange mit Zähnen oder Stegen versehen, durch welche ein Gleiten der Kette längs des Rollen-Umfanges verhindert wird. Während diese Doppel-Rolle in der Richtung des Pfeiles **ein** Mal um ihre Achse sich dreht, wird **links** an der grösseren Rolle ein Kettenstück von der Länge $2R\pi$ **aufgewickelt** und **rechts** an der kleineren Rolle ein Stück von der Länge $2r\pi$ **abgewickelt**, im Ganzen also die Länge der beiden verticalen Kettentheile, an welchen die untere Rolle nebst der Last W hängt, um die Grösse $2\,(R - r)\,\pi$ verkürzt, wovon auf jeden der beiden Theile die Hälfte kommt. Während also der Angriffspunkt der Kraft K die Strecke $2R\pi$ zurücklegt, wird

die Last W um die Strecke $(R - r)\pi$ gehoben; das Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten ist daher:

Fig. 391.



$$\frac{v}{c} = \frac{2R\pi}{(R-r)\pi},$$

woraus sich für die Geschwindigkeit der aufsteigenden Last die Grösse ergiebt:

$$405) \quad c = \frac{v}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Wären bei der Bewegung keine Reibungs- und Biegungs-Widerstände zu überwinden, so würde in jedem der beiden Kettentheile, welche zusammen die Last W tragen, die Spannung $\frac{W}{2}$ stattfinden, und aus der Gleichung der statischen Momente in Bezug auf die obere Drehachse O:

$$0 = KR + \frac{W}{2}r - \frac{W}{2}R$$

würde für das Verhältniss von Kraft zu Last der Werth sich ergeben:

$$406) \quad \frac{K}{W} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Durch die in Wirklichkeit vorhandenen Reibungs- und Biegungs-Widerstände wird jedoch ein Unterschied in den Spannungen der beiden links und rechts neben der unteren Rolle befindlichen Kettentheile bedingt. Bei der angenommenen Drehungsrichtung der unteren Rolle wirkt die Spannung rechts als Widerstand, und die Spannung links als Kraft, welche diesen Widerstand zu überwinden hat. Es muss also die letztere das μ-fache der ersteren betragen, wenn mit μ der nach § 94 zu bestimmende Widerstandscoefficient für Ketten-Rollen bezeichnet wird. Die Summe dieser beiden Spannungen muss gleich der Last W sein, also ist:

$$407) \quad W = P(1 + \mu).$$

Wenn der Halbmesser der unteren Rolle gleich dem arithmetischen Mittel von den Halbmessern der beiden oberen Rollen ist, so kann für den Widerstandscoefficienten, welcher bei der Bewegung des oberen Rollen-Systems in Rechnung zu bringen ist, dieselbe Grösse wie für die untere Rolle angenommen werden. Am oberen Rollen-Systeme wirkt die Spannung μP als Wider-

stand, und die beiden Kräfte K und P an der rechten Seite haben gemeinschaftlich diesen Widerstand zu überwinden. Es ist also die Momenten-Summe der beiden letzteren dem μ-fachen des Momentes der ersteren gleich zu setzen, woraus sich die Gleichung ergiebt:

$$KR + Pr = \mu \cdot \mu PR, \quad \text{oder:} \quad K = P\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right).$$

Wenn man die letztere Gleichung durch Gleichung 407) dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$408) \quad \frac{K}{W} = \frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1 + \mu}.$$

Setzt man als mittleren Werth des Widerstandscoefficienten für Ketten-Rollen $\mu = 1{,}05$ und das Verhältniss $\frac{r}{R} = \frac{10}{11}$, so erhält man:

$$\frac{K}{W} = \frac{1{,}05^2 - \frac{10}{11}}{1 + 1{,}05} = 0{,}0943.$$

Nach Gleichung 405) ist in diesem Falle $c = \frac{v}{22}$; das Verhältniss der beiden mechanischen Arbeiten ist daher:

$$\frac{Wc}{Kv} = \frac{1}{22 \cdot 0{,}0943} = 0{,}482.$$

Der Nutzeffect beträgt also 48,2 Procent.

Wenn man in Gleichung 408) die Zahl μ vertauscht mit der Zahl $\frac{1}{\mu}$, so erhält man die Gleichung:

$$409) \quad \frac{K}{W} = \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)^2 - \frac{r}{R}}{1 + \frac{1}{\mu}}.$$

Diese letztere Gleichung gilt für eine Bewegung des ganzen Systems im entgegengesetzten Sinne, bei welcher die Kraft K als Widerstand und die Last W als treibende Kraft wirkt. Setzt man in dieser Gleichung $K = 0$, so erhält man die Bedingung:

$$410) \quad \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{r}{R},$$

welche erfüllt sein muss, wenn die der Last W das Gleichgewicht haltende Kraft K die Grösse Null haben soll. Damit also durch die Last W keine rückgängige Bewegung des sich selbst über-

lassenen Apparates hervorgebracht werde, muss die Bedingung erfüllt sein:

$$411)\quad \frac{r}{R} \geqq \frac{1}{\mu^2}.$$

Für den oben angenommenen Werth $\mu = 1,05$ erhielte man z. B. die Bedingung:

$$\frac{r}{R} \geqq \frac{1}{1,1025},$$

d. h. es müsste der Halbmesser der kleineren Rolle mindestens etwa $\frac{10}{11}$ des Halbmessers der grösseren Rolle betragen, wenn ein Zurücksinken der gehobenen Last verhindert werden soll.

§ 98.

Bedingungen der gleichförmigen Schrauben-Bewegung.

Wenn ein Körper gleichzeitig zwei gleichförmige Bewegungen ausführt, von denen die eine in einer Drehung um eine bestimmte Drehachse, die andere in einer fortschreitenden Bewegung längs dieser Achse besteht, so bewegt sich jeder Punkt des Körpers gleichförmig längs einer Schraubenlinie, und die so zusammengesetzte Bewegung des Körpers bildet eine gleichförmige Schraubenbewegung.

Fig. 392.

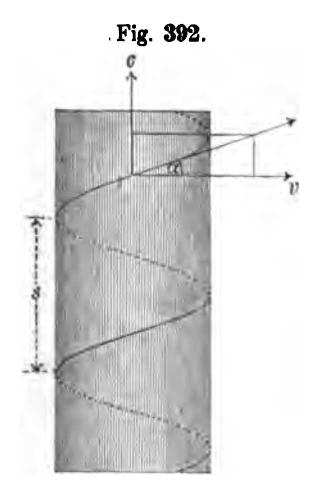
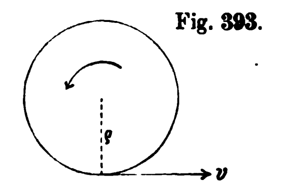


Fig. 393.



Die Geschwindigkeit irgend eines Punktes setzt sich zusammen aus der allen Punkten des Körpers gemeinschaftlichen Geschwindigkeit c der gleichförmig fortschreitenden Bewegung und einer rechtwinkelig dazu gerichteten (seinem Abstande von der Drehachse proportionalen) Peripherie-Geschwindigkeit v, welche der Punkt vermöge der gleichförmigen Drehbewegung besitzt (Fig. 392 und Fig. 393). Wenn t die Zeit ist, in welcher der Körper eine Umdrehung ausführt, und s die Strecke, welche der Körper während dieser Zeit in der Achsen-Richtung zurücklegt, so ergeben sich für die beiden Geschwindigkeiten eines in der Entfernung ϱ von der Drehachse befindlichen Punktes die Gleichungen:

412) $s = ct$, oder: $c = \frac{s}{t}$.

413) $2\varrho\pi = vt$, oder: $v = \frac{2\varrho\pi}{t}$.

Nach der in Fig. 392 angedeuteten Parallelogramm-Construction bildet das Verhältniss dieser beiden Geschwindigkeiten:

414) $\frac{c}{v} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{s}{2\varrho\pi}$

das Steigungsverhältniss der von diesem Punkte beschriebenen Schraubenlinie.

Für irgend einen anderen in der Entfernung ϱ_1 von der Drehachse befindlichen Punkt erhält man in gleicher Weise als Steigungsverhältniss der von diesem Punkte beschriebenen Schraubenlinie:

415) $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{s}{2\varrho_1\pi}$.

Die von den einzelnen Punkten des Körpers beschriebenen Schraubenlinien haben sämmtlich dieselbe Steigung s; die Steigungsverhältnisse dieser Schraubenlinien sind dagegen verschieden je nach den Entfernungen der Punkte von der Drehachse.

Die Schraubenbewegung des Körpers ist eine gleichförmige, wenn jede der beiden einzelnen Bewegungen gleichförmig ist. Nach § 95 ist daher die Gleichförmigkeit der Schraubenbewegung (unter anderen) an folgende zwei Bedingungen geknüpft:

Erstens, damit die Drehbewegung gleichförmig erfolge, muss die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher auf den Körper wirkenden Kräfte in Bezug auf die Achse der Schraubenbewegung Null sein.

Zweitens, damit die fortschreitende Bewegung gleichförmig erfolge, muss die algebraische Summe sämmtlicher parallel zur Schrauben-Achse gerichteten Seitenkräfte Null sein.

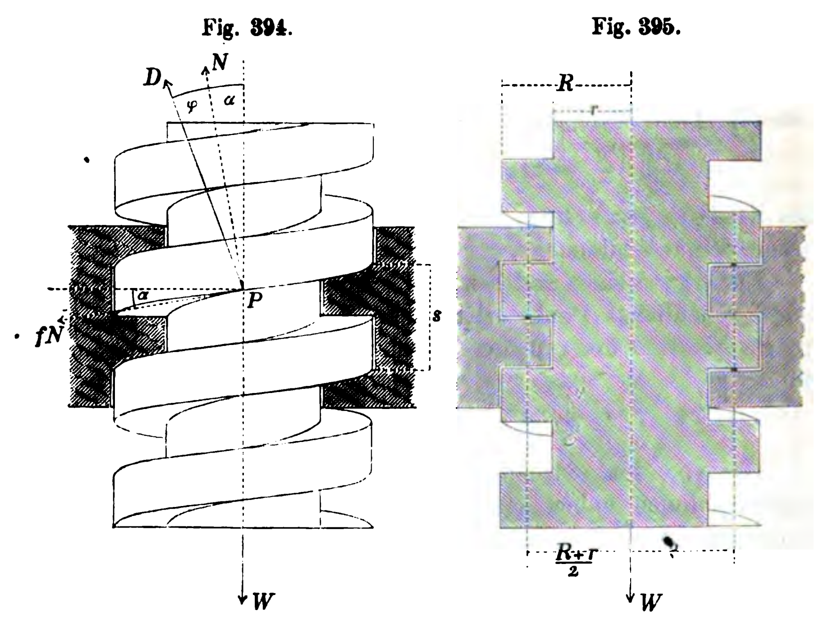
§ 99.

Flachgängige Schraube.

Es soll das Moment $\mathfrak{M} = Kl$ desjenigen Kräftepaares berechnet werden, welches erforderlich ist, um die von festliegender Schrauben-Mutter umschlossene flachgängige Schraube (Fig. 394) gleichförmig hinaufzuschrauben und den in der Achsenrichtung wirkenden gegebenen Widerstand W dabei zu überwinden.

Auf die bewegliche Schraube wirken ausser dem Widerstande W und den beiden Kräften K des treibenden Kräftepaares nur

Fig. 394. Fig. 395.



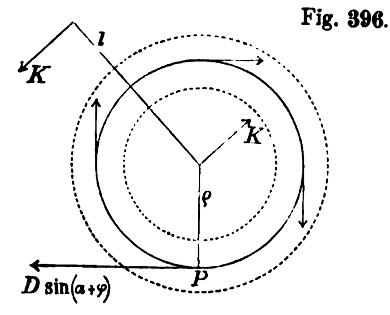


Fig. 396. noch die von der unbeweglichen Schraubenmutter auf sie übertragenen Gegendrücke, deren Angriffspunkte die Berührungsstellen der beiden Körper sind. Die Stellen, in welchen die **untere** Fläche des beweglichen Schraubengewindeganges unterstützt wird von der **oberen** Fläche des unbeweglichen Ganges, sollen — wie in Fig. 395 angedeutet — auf einer mittleren Schraubenlinie vom Halbmesser $\varrho = \frac{R+r}{2}$ stetig vertheilt liegen. Diese mittlere Schraubenlinie bildet die **ausschliessliche** Berührungslinie der beiden Körper, enthält folglich die Angriffspunkte **sämmtlicher** Gegendrücke. Das Steigungsverhältniss tg α dieser mittleren Schraubenlinie kann nach der gewählten Bezeichnungsweise unmittelbar aus Gleichung 414) bestimmt und soll hier als gegeben angenommen werden.

An irgend einer Stelle P dieser mittleren Schraubenlinie wird von Seiten der Schraubenmutter auf die bewegliche Schraube ein Druck D übertragen, welcher angesehen werden kann als die Mittelkraft aus dem rechtwinkelig zur Berührungsfläche gerichteten Drucke N und einem der Richtung des Gleitens entgegenwirkenden Reibungswiderstande fN. Der Normaldruck N wirkt in verticaler Ebene rechtwinkelig zur mittleren Schraubenlinie, bildet also den Winkel α mit der verticalen Achsenrichtung der Schraube. Der Reibungswiderstand fN wirkt längs der mittleren Schraubenlinie tangential abwärts, bildet also den Winkel α mit der Horizontalen. Da ein wirkliches Gleiten stattfindet, so weicht (nach § 67) die Mittelkraft aus Normaldruck und Reibungswiderstand um den Reibungswinkel φ von der Richtung des Normaldruckes ab. Die Kraft D bildet also den Winkel $\alpha + \varphi$ mit der Verticalen. Dasselbe gilt von den an allen übrigen Berührungsstellen auf die Schraube übertragenen Gegendrücken.

Das statische Moment des Druckes D in Bezug auf die Achse der Schraube erhält man aus Fig. **396**, indem man dessen horizontale Seitenkraft $D \sin(\alpha + \varphi)$ mit dem Hebelarme ϱ multiplicirt. Wenn die Drehbewegung der Schraube eine gleichförmige sein soll, so muss das Moment $\mathfrak{M}$ des treibenden Kräftepaares gleich der Summe der statischen Momente aller Drücke D sein; es ist also:

$$416) \quad \mathfrak{M} = \Sigma\,[D \sin(\alpha + \varphi)\,\varrho].$$

Die verticale Seitenkraft des Druckes D ist $D \cos(\alpha + \varphi)$. Wenn die fortschreitende Bewegung der Schraube eine gleichförmige sein soll, so muss die Summe aller dieser vertical aufwärts wirkenden Drücke gleich dem vertical abwärts wirkenden Widerstande W sein, also ist:

$$417) \quad W = \Sigma\,[D \cos(\alpha + \varphi)].$$

In Gleichung 416) kann die Grösse $\varrho \sin(\alpha + \varphi)$ als gemeinschaftlicher Factor aller Summen-Glieder auch vor das Summationszeichen gesetzt werden; ebenso in Gleichung 417) die Grösse $\cos(\alpha + \varphi)$. Die beiden Gleichungen nehmen alsdann die folgenden Formen an:

$$\mathfrak{M} = \varrho \sin(\alpha + \varphi)\, \Sigma(D),$$
$$W = \cos(\alpha + \varphi)\, \Sigma(D),$$

und wenn man die erstere durch die letztere dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$418)\quad \frac{\mathfrak{M}}{W} = \varrho \operatorname{tg}(\alpha + \varphi), \text{ oder: } Kl = W\varrho \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Setzt man in dieser Gleichung $-\varphi$ statt $+\varphi$, so erhält man die Gleichgewichtsbedingung für die entgegengesetzte Bewegung, bei welcher die Schraube in dem festliegenden Muttergewinde gleichförmig abwärts geschraubt wird. In diesem Falle wirken die Reibungswiderstände in entgegengesetzter Richtung, und weichen daher die Gegendrücke D um den Winkel $\alpha - \varphi$ von der Achsenrichtung ab; die Gleichung:

$$419)\quad Kl = W\varrho \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

zeigt also: wie gross das Kräftepaar sein muss, um eine Beschleunigung dieser abwärts gerichteten Schraubenbewegung zu verhindern. Wenn $\alpha = \varphi$ ist, so wird für diese Bewegungsrichtung $Kl = 0$; d. h. wenn der Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie gleich dem Reibungswinkel ist, so bedarf es gar keiner Drehkraft, um eine Beschleunigung dieser Bewegung zu verhindern; die einmal vorhandene Bewegung wird sich gleichförmig fortsetzen — wie gross auch immer die in der Achsenrichtung wirkende Kraft W sein möge. Wenn ferner α kleiner ist als φ, so ergiebt sich aus Gleichung 419) ein negativer Werth für das Moment Kl; d. h. in diesem Falle würde ein entgegengesetzt herum drehendes — also im Sinne der Drehbewegung wirkendes — Kräftepaar erforderlich sein, um die abwärts gerichtete Schraubenbewegung gleichförmig zu erhalten.

Die Gleichgewichts-Bedingung der flachgängigen Schraube lässt sich hiernach in einer für beide Bewegungsrichtungen gemeinschaftlich geltenden Form darstellen durch die Gleichung:

$$420)\quad Kl = W\varrho \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi),$$

in welcher das obere Vorzeichen auf den Fall sich bezieht, in welchem die fortschreitende Bewegung der Richtung der Kraft W entgegengesetzt ist, das untere dagegen auf den Fall, in welchem die fortschreitende Bewegung in der Richtung der Kraft W erfolgt.

Die Bedingungen der gleichförmigen Bewegung sind unabhängig von der Grösse der Geschwindigkeit; die gefundenen Gleichungen gelten daher auch für die Geschwindigkeit Null oder für den Ruhezustand. Die beiden in Gleichung 420) gefundenen Werthe bezeichnen demnach die Grenzwerthe, welche das Kräftepaar $\mathfrak{M} = Kl$ nicht überschreiten darf, wenn die ruhende Schraube

nicht (nach der einen oder der anderen Richtung hin) in Bewegung gerathen soll. Bei vorhandenem Ruhezustande würde aber weder in dem Gleichgewichtszustande der Schraubenspindel, noch in dem Gleichgewichtszustande der Schraubenmutter Etwas verändert, wenn beide Körper zu einem Stücke vereinigt würden. Betrachtet man also Schraubenspindel nebst Schraubenmutter als ein Stück, und wendet dann auf das Ganze die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen an, so findet man die Kräfte, welche auf die — bisher unbeweglich vorausgesetzte — Schraubenmutter wirken müssen, um zu verhindern, dass dieselbe in Bewegung gerathe (Fig. 397 und Fig. 398).

Fig. 397.

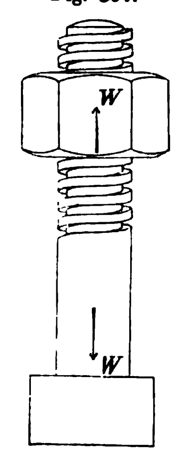
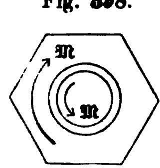


Fig. 398.



Druck und Gegendruck haben stets gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung; die Drücke D, welche die Schraube und die Schraubenmutter gegenseitig auf einander übertragen, haben auf den Gleichgewichtszustand des Ganzen keinen Einfluss und können daher unberücksichtigt bleiben. Hiernach ergiebt sich, dass auf die Schraubenmutter in der Richtung der Achse eine Kraft wirken muss, welche der Kraft W gleich und entgegengesetzt ist, und ausserdem ein Kräftepaar, welches dem Kräftepaare $\mathfrak{M}$ gleich und entgegengesetzt ist. Genau dieselben Gleichungen, welche oben für das auf die Schraubenspindel wirkende Kräftepaar gefunden wurden, gelten daher auch für das entgegengesetzt drehende Kräftepaar, welches auf die Schraubenmutter wirken muss, um dieselbe im Ruhezustande zu erhalten, während die Schraubenspindel in derselben ihre gleichförmige Schraubenbewegung ausführt.

In den Gleichgewichts-Bedingungen des ganzen Systems Fig. 397 wird keinerlei Aenderung bedingt durch das gleichzeitige Vorhandensein einer gleichförmigen Drehbewegung des Ganzen um die Achse der Schraube, ebensowenig durch das gleichzeitige Vorhandensein einer gleichförmig fortschreitenden Bewegung des Ganzen in der Richtung der Schrauben-Achse. Denkt man sich also zu der stattfindenden Schraubenbewegung der Spindel noch eine gleichförmige Bewegung des Ganzen hinzu — das eine Mal eine gleichförmige Drehbewegung, welche der Drehung der Spindel

gleich und entgegengesetzt ist — das andere Mal eine gleichförmig fortschreitende Bewegung, welche der fortschreitenden Bewegung der Spindel gleich und entgegengesetzt ist — so findet man, dass die allgemeine Gleichung 420) auch dann noch gültig bleibt, wenn die Schraubenbewegung in der Weise auf die beiden Körper sich vertheilt, dass der eine nur die fortschreitende Bewegung, der andere nur die Drehbewegung ausführt.

§ 100.

Schraubenpresse.

Wenn die in der Achsenrichtung der Schraube wirkende Widerstandskraft W durch den Gegendruck eines Körpers gebildet wird, der nur an der fortschreitenden — nicht aber an der drehenden — Bewegung der Schraube theilnimmt, so findet ausser dem im vorigen Paragraphen berücksichtigten Schraubenreibungswiderstande noch eine Zapfenreibung statt an der Stelle, wo der Gegendruck auf die (ebene) Endfläche der Schraube übertragen wird, und das Moment Kl des drehenden Kräftepaares hat in diesem Falle ausser dem Widerstandsmomente $W\varrho \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ noch das Moment eines dem Zapfendrucke W entsprechenden Zapfenreibungswiderstandes zu überwinden. Für einen cylindrischen ebenflächigen Stützzapfen vom Halbmesser ϱ_1 ist (nach § 84, Gleichung 327) das Moment des dem Zapfendrucke W und dem Zapfenreibungscoefficienten f_1 entsprechenden Zapfenreibungswiderstandes gleich $\frac{1}{2} f_1 W \varrho_1$ zu setzen. Das Moment des zum gleichförmigen Drehen der Schraube erforderlichen Kräftepaares ist also in diesem Falle zu bestimmen nach der Gleichung:

$$421) \quad Kl = W\varrho \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} f_1 W \varrho_1,$$

wenn die fortschreitende Bewegung der Schraube der Richtung der Kraft W entgegengesetzt ist. Für die rückgängige Bewegung der Schraube dagegen ist sowohl φ als f_1 negativ zu setzen, und das Moment des der Drehung entgegenwirkenden Kräftepaares muss, um eine Beschleunigung dieser rückgängigen Bewegung zu verhindern, die Grösse haben:

$$422) \quad Kl = W\varrho \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) - \frac{1}{2} f_1 W \varrho_1.$$

Um nach diesen Gleichungen die Wirkung der in Fig. 399 und Fig. 400 dargestellten Schraubenpresse zu berechnen, würde man zunächst aus den in der

Figur angegebenen Dimensionen der Schraube das Steigungsverhältniss der mittleren Schraubenlinie zu berechnen haben. Nach der in § 98 gewählten Bezeichnungsweise ist $s = 0^m{,}02$, $R = 0^m{,}05$, $r = 0^m{,}04$ und $\varrho = \frac{0{,}05 + 0{,}04}{2} = 0{,}045$ zu setzen, folglich nach Gleichung 414):

Fig. 399.

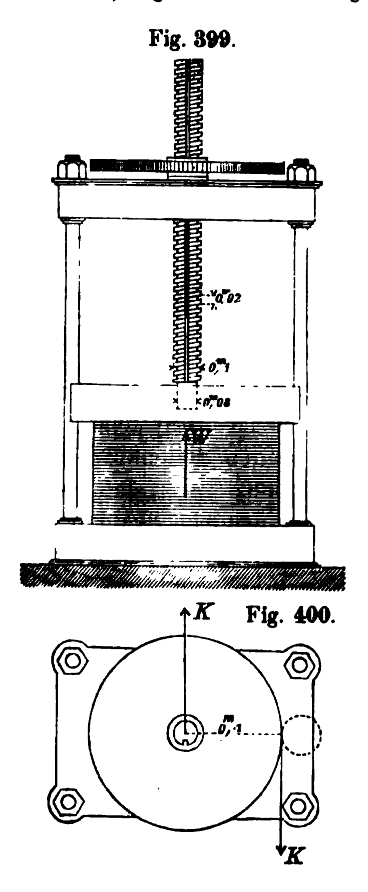


Fig. 400.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0{,}02}{2 \,.\, 0{,}045 \,.\, 3{,}14} = 0{,}0708,$$

woraus sich für den Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie die Grösse $\alpha = 4^0\,3'$ ergiebt. Wenn ferner die Reibungscoefficienten f_1 und $\operatorname{tg} \varphi$ beide gleich 0,08 angenommen werden, also $\varphi = 4^0\,34',5$ gesetzt wird, so erhält man nach Gleichung 421):

$$K \,.\, 0{,}4 = W \,.\, 0{,}045 \operatorname{tg}(8^0\,37',5) + \frac{1}{2} \cdot 0{,}08\, W \,.\, 0{,}04, \text{ oder:}$$

$$K = 0{,}0171\ W + 0{,}004\ W = 0{,}0211\ W.$$

Es würde also z. B., um einen Druck $W = 10\,000$ Kil. hervorzubringen, eine am Umfange des Rades wirkende Tangentialkraft $K = 211$ Kil. erforderlich sein.

Während die Pressplatte um die Strecke $s = 0^m{,}02$ fortschreitet, legt ein Punkt am Umfange des Rades die Strecke $2\,l\pi = 2 \,.\, 0{,}4 \,.\, 3{,}14 = 2^m{,}512$ zurück. Das Verhältniss der hervorgebrachten zur aufgewendeten mechanischen Arbeit ist demnach:

$$\frac{W \,.\, 0{,}02}{K \,.\, 2{,}512} = \frac{W \,.\, 0{,}02}{0{,}0211 \,.\, W \,.\, 2{,}512} = 0{,}377;$$

der Nutzeffect beträgt also 37,7 Procent der aufgewendeten Arbeit.

Für die Kraft, welche erforderlich ist, um eine rückgängige Bewegung der Schraube zu verhindern, erhält man nach Gleichung 422) den Werth:

$$K = W \cdot \frac{0{,}045}{0{,}4} \operatorname{tg}(4^0\,3' - 4^0\,34',5) - \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}08}{0{,}4} \cdot W \,.\, 0{,}04$$

$$= -0{,}001 \,.\, W - 0{,}004 \,.\, W = -0{,}005 \,.\, W.$$

Es würde also z. B. in dem Augenblicke, wo der Druck an der Pressplatte 10 000 Kil. beträgt, einer rückwärts drehenden Kraft von 50 Kil. bedürfen, um die Schraube zurückzudrehen.

Bei einer genaueren Berechnung der zum Drehen der Schraube erforderlichen Kraft K würden noch folgende — bisher unberücksichtigt gebliebene — Kräfte und Widerstände in Rechnung zu bringen sein: erstens, das Gewicht der Schraube und der Pressplatte; zweitens, die Reibung zwischen der Press-

platte und den Säulen, welche derselben als Führung dienen; drittens, die Reibung des in die Nuth eingreifenden an der Innenfläche der Radnabe vorragenden Schlüssels längs der Nuth (welche eine fortschreitende Bewegung ausführt, an der das Rad nicht theilnimmt); viertens, die Seitenreibung zwischen den Mantelflächen der Schraube und der Schraubenmutter, entstehend durch die von letzterer auf erstere übertragenen horizontalen Gegendrücke, welche durch die am Umfange des Rades einseitig wirkende Kraft K hervorgerufen werden und in ihrer Mittelkraft die zweite Kraft des Kräftepaares darstellen. Die aus der Berücksichtigung dieser Kräfte sich ergebende Correction des für K gefundenen Werthes wird indessen meistens so klein ausfallen, dass dieselbe in der Praxis vernachlässigt werden kann.

§ 101.

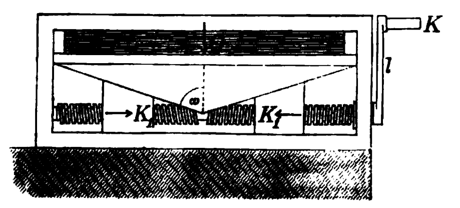
Schrauben-Keil-Presse.

Die in § 74 für eine Keil-Presse mit horizontalen Gleitflächen gefundene Gleichung:

$$\frac{Q}{K_1} = \frac{2 \sin (\omega + \varphi) \cos \varphi}{\cos (\omega + 2\varphi)}$$

bezog sich auf eine solche Verschiebung des Keil-Systems, bei welcher der Mittelkeil vorrückt, und die beiden Seitenkräfte zurückweichen. Wenn man in dieser Gleichung $-\varphi$ statt $+\varphi$ setzt, so gilt dieselbe für eine Verschiebung des Keil-Systems im entgegengesetzten Sinne, nämlich für diejenige, bei welcher die Seitenkeile vorrücken, und der Mittelkeil zurückweicht.

Fig. 401.



Bei der in Fig. 401 dargestellten Keil-Presse soll durch die von den Horizontalkräften K_1 nach innen geschobenen Seitenkeile der Mittelkeil nebst der Pressplatte nach oben gedrängt, und der Widerstand Q dabei überwunden werden. Für die dazu erforderlichen Kräfte K_1 ergiebt sich demnach die Gleichung:

$$\frac{Q}{K_1} = \frac{2 \sin (\omega - \varphi) \cos (-\varphi)}{\cos (\omega - 2\varphi)} = \frac{2 \sin (\omega - \varphi) \cos \varphi}{\cos (\omega - \varphi) \cos \varphi + \sin (\omega - \varphi) \sin \varphi},$$

oder:

$$423) \quad 2 K_1 = Q \, [\operatorname{cotg} (\omega - \varphi) + \operatorname{tg} \varphi].$$

Diese Verschiebungen der Seitenkeile können durch Umdrehung von Schraubenspindeln hervorgebracht werden, für welche

jene Keile selbst die zugehörigen Schraubenmuttern bilden. Die in den Achsenrichtungen wirkenden Kräfte K_1 in entgegengesetzten Richtungen genommen bilden die Widerstände, welche diesen Verschiebungen entgegenwirken. Es kann daher die zum Drehen jeder von beiden Schraubenspindeln erforderliche Drehkraft unmittelbar nach Gleichung 418) bestimmt werden, sobald darin K_1 statt W, und (für den Fall, dass der Reibungscoefficient der Schrauben von dem Reibungscoefficienten der Keile verschieden ist) φ_1 statt φ substituirt wird.

Wenn zugleich die eine Schraube mit rechts gewundenem, die andere mit links gewundenem Schraubengewinde versehen ist, so werden beide Schraubenspindeln in gleichem Sinne umgedreht werden müssen, um die beiden Keile einander zu nähern und die Pressplatte nach oben zu schieben. In diesem Falle können die beiden Schraubenspindeln auch aus einem Stücke angefertigt werden; die beiden Kräfte K_1, deren jede einzeln genommen eine seitliche Verschiebung der betreffenden Schraubenspindel hervorbringen würde, heben nunmehr in Bezug auf einen solchen Seitenschub einander auf; die zur Umdrehung dieser Doppelschraube erforderliche Drehkraft beträgt alsdann das Doppelte von der zur Drehung jeder einzelnen Schraube erforderlichen Drehkraft, ist also zu bestimmen aus der Gleichung:

$$424)\quad Kl = 2K_1\,\varrho\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi_1).$$

Wenn man hierin für $2K_1$ den in Gleichung 423) gefundenen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$425)\quad Kl = Q\varrho\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi_1)\,[\mathrm{cotg}\,(\omega - \varphi) + \mathrm{tg}\,\varphi].$$

Wenn hierin $l = 0^m{,}4$, $\varrho = 0^m{,}025$, $\omega = 85^0$, $\alpha = 4^0$ und $\varphi = \varphi_1 = 4^0\,35'$ (also der Reibungscoefficient für die Keile sowohl als für die Schrauben gleich 0,08) gesetzt wird, so ergiebt sich die Gleichung:

$$K\,.\,0{,}4 = Q\,.\,0{,}025\,\mathrm{tg}\,(8^0\,35')\,[\mathrm{cotg}\,(80^0\,25') + \mathrm{tg}\,(4^0\,35')],\ \text{oder:}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{0{,}025}{0{,}4}\,0{,}151\,(0{,}169 + 0{,}08) = 0{,}002\,35.$$

Um also z. B. an der Pressplatte einen Druck $Q = 10\,000$ Kil. hervorzubringen, würde am Ende des Kurbelarmes eine Kraft $K = 23{,}5$ Kil. wirken müssen.

Während einer Umdrehung der Kurbel legt der Angriffspunkt der Kraft K die Strecke $2l\pi$ zurück, die beiden keilförmigen Schraubenmuttern rücken eine jede um die Schraubensteigung s nach innen vor, und die Pressplatte wird um die Höhe $s\,.\,\mathrm{cotg}\,\omega$ gehoben. Das Verhältniss der bei Ueberwindung des Widerstandes Q an der Pressplatte geleisteten Arbeit zu der unmittelbar auf die Kurbel übertragenen Arbeit ist demnach:

$$\frac{Q \cdot s \operatorname{cotg} \omega}{K \cdot 2 l \pi} = \frac{Q}{K} \frac{s}{2 \varrho \pi} \cdot \frac{\varrho}{l} \operatorname{cotg} \omega = \frac{Q}{K} \frac{\varrho}{l} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \omega}$$
$$= \frac{1}{0{,}002\,35} \cdot \frac{0{,}025}{0{,}4} \cdot \frac{0{,}07}{11{,}43} = 0{,}163,$$

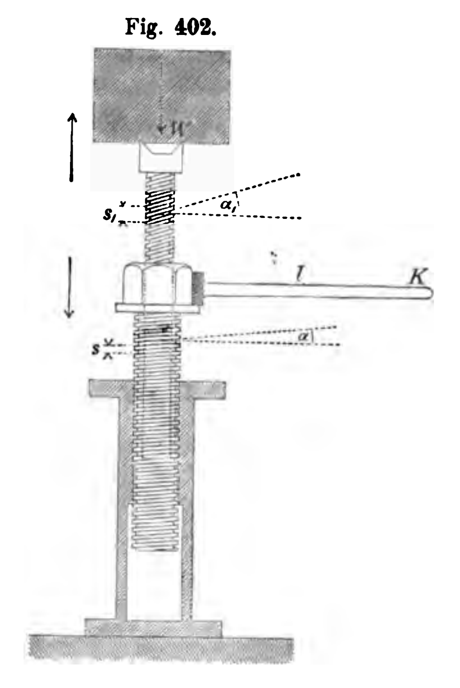
der Nutzeffect beträgt also 16,3 Procent der auf die Kurbel übertragenen Arbeit.

§ 102.

Differenzial-Schraube.

Der auf dem Boden festliegende Hohlcylinder enthält das Schraubenmutter-Gewinde für die mittlere hohle Schrauben-Spindel, welche ihrerseits wiederum die Schraubenmuttter bildet für die obere massive Schrauben-Spindel (Fig. 402).

Fig. 402.



Wenn die mittlere hohle Schraube mittelst des am Kopfe derselben angebrachten Schlüssels um eine Windung des äusseren Gewindes in der festliegenden Schraubenmutter hinab geschraubt wird, und zugleich die obere massive Schraubenspindel auf irgend eine Weise verhindert wird, an der drehenden Bewegung theilzunehmen, so führt die obere Schraubenspindel während jener Umdrehung eine relative Schraubenbewegung in Bezug auf die hohle Schraubenspindel aus, indem sie um eine Windung des inneren Gewindes in derselben hinaufgeschraubt wird. Während einer solchen Umdrehung der hohlen Schraube wird also die obere Schraubenspindel nebst der Last W um die Steigungsdifferenz $s_1 - s$ des äusseren und inneren Gewindeganges gehoben.

Um die zu einer solchen Drehung der hohlen Schraubenspindel erforderliche Drehkraft Kl zu berechnen, hat man zunächst mit Berücksichtigung der Richtungen, in welchen das Glei-

ten an den Schraubenflächen erfolgt (auf ähnliche Weise wie in Fig. 394 geschehen) die Richtungen der — allemal um den Reibungswinkel φ von den Normalen abweichenden — Drücke D und D_1 zu bestimmen, welche einerseits von dem festliegenden Muttergewinde und andererseits von der oberen Schraubenspindel auf die hohle Schraubenspindel übertragen werden. Nach Fig. 403 und Fig. 404 erhält man dann als Gleichgewichts-Bedingungen für die hohle Schraubenspindel die Gleichungen:

$$426)\quad \Sigma\,[D\cos(\alpha-\varphi)] = \Sigma\,[D_1(\cos\alpha_1+\varphi)], \quad \text{oder:}$$
$$\cos(\alpha-\varphi)\,\Sigma\,(D) = \cos(\alpha_1+\varphi)\,\Sigma\,(D_1),$$

$$427)\quad K\,l = \Sigma\,[D_1\sin(\alpha_1+\varphi)\,\varrho_1] - \Sigma\,[D\sin(\alpha-\varphi)\,\varrho]$$
$$= \varrho_1\sin(\alpha_1+\varphi)\,\Sigma(D_1) - \varrho\sin(\alpha-\varphi)\,\Sigma\,(D).$$

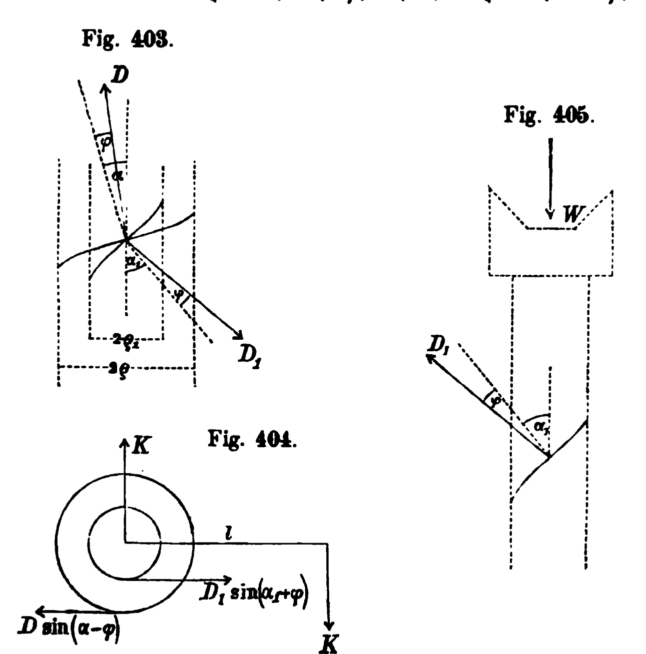


Fig. 403. Fig. 404. Fig. 405.

Aus Fig. 405 erhält man ferner als Gleichgewichts-Bedingung für die obere Schraubenspindel die Gleichung:

$$428)\quad \Sigma\,[D_1\cos(\alpha_1+\varphi)] = W, \quad \text{oder: } \cos(\alpha_1+\varphi)\,\Sigma\,(D_1) = W,$$

und wenn man die aus den Gleichungen 428) und 426) sich ergebenden Werthe:

$$\Sigma\,(D_1) = \frac{W}{\cos(\alpha_1+\varphi)}, \qquad \Sigma\,(D) = \frac{W}{\cos(\alpha-\varphi)}$$

alsdann in Gleichung 427) substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$429)\quad Kl = W\varrho\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) - \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)\right).$$

Wenn man hierin z. B. $\alpha_1 = 20^0$, $\alpha = 8^0$, $l = 0^m,8$, $\varrho_1 = 0^m,02$, $\varrho = 0^m,04$, und den Reibungscoefficienten $f = 0,07$, also den Reibungswinkel $\varphi = 4^0$ setzt, so erhält man:

$$K \,.\, 0,8 = W \,.\, 0,04\left(\frac{0,02}{0,04}\operatorname{tg} 24^0 - \operatorname{tg} 4^0\right), \text{ oder:}$$

$$K = 0,0076 \,.\, W.$$

Es würde also z. B. eine am Endpunkte des Schraubenschlüssels wirkende Kraft $K = 7,6$ Kil. ausreichen, um einen Widerstand $W = 1000$ Kil. zu überwinden.

Während der Schraubenschlüssel einmal umgedreht wird, legt der Angriffspunkt der Kraft K den Weg $2l\pi$ zurück, und verrichtet die Kraft K die mechanische Arbeit $K \,.\, 2l\pi$. Der Angriffspunkt des Widerstandes W wird gleichzeitig um die Grösse $s_1 - s$ gehoben, und die dazu erforderliche Arbeit beträgt $W(s_1 - s)$. Für das Verhältniss dieser beiden mechanischen Arbeiten ergiebt sich demnach die Gleichung:

$$n = \frac{W(s_1 - s)}{K \,.\, 2l\pi} = \frac{W(2\varrho_1\pi\operatorname{tg}\alpha_1 - 2\varrho\pi\operatorname{tg}\alpha)}{K \,.\, 2l\pi}$$

$$= \frac{W\varrho}{Kl}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha\right),$$

welche nach Substitution des für Kl gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$430)\quad n = \frac{\frac{\varrho_1}{\varrho}\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha}{\frac{\varrho_1}{\varrho}\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) - \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $\frac{\varrho_1}{\varrho}\operatorname{tg}\alpha_1$ grösser sein muss als $\operatorname{tg}\alpha$, wenn überhaupt ein Nutzeffect erreicht werden soll.

Bei den oben angenommenen Zahlenwerthen ergiebt sich für n der Werth:

$$n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} 20^0 - \operatorname{tg} 8^0}{\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} 24^0 - \operatorname{tg} 4^0} = 0,27,$$

beträgt also der Nutzeffect 27 Procent der am Schlüssel verrichteten Arbeit, während 73 Procent derselben zur Ueberwindung der Reibungswiderstände verwendet werden.

Die Gleichung 429) nimmt, wenn darin $+\varphi$ mit $-\varphi$ vertauscht wird, die Form an:

$$431)\quad Kl = W\varrho\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\operatorname{tg}(\alpha_1-\varphi)-\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)\right),$$

und zeigt in dieser Form, wie gross die (in gleichem Sinne wie vorher) am Schlüssel wirkende Kraft K sein muss, um die hohle Schraubenspindel an einer rückgängigen Bewegung — d. h. am Aufsteigen — zu verhindern. Es muss also ausserdem die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}\operatorname{tg}(\alpha_1-\varphi)\leqq\operatorname{tg}(\alpha+\varphi),$$

wenn eine solche rückgängige Bewegung des sich selbst überlassenen Apparates ohne Wirkung der Kraft K allein schon durch die Reibung verhindert werden soll.

Wenn man $+K$ mit $-K$ vertauscht in Gleichung 431), so nimmt dieselbe die Form an:

$$432)\quad Kl = W\varrho\left(\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)-\frac{\varrho_1}{\varrho}\operatorname{tg}(\alpha_1-\varphi)\right)$$

und kann in dieser Form für die entgegengesetzte Anordnung der Differenzial-Schraube benutzt werden, nämlich für diejenige, bei welcher die Steigung s des äusseren Schraubenganges grösser ist als die Steigung s_1 des inneren, und in Folge dessen das Aufsteigen der Last W mit dem Aufwärts-Schrauben der hohlen Schraubenspindel verbunden ist.

§ 103.

Scharfgängige Schraube.

Wenn man in den für die flachgängige Schraube in § 99 mit Bezug auf Fig. 394 und Fig. 395 gefundenen Gleichungen statt des gewöhnlichen Reibungscoefficienten f den Reibungscoefficienten

$$f_1 = \frac{f}{\sin\delta}$$

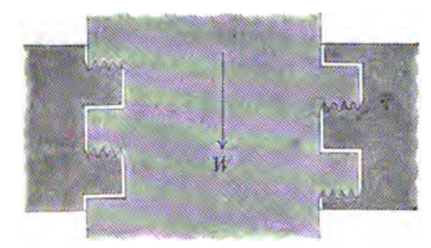
für Gleiten in Keilnuthen, und demgemäss statt des Reibungswinkels φ überall den nach § 69 aus Gleichung 235):

$$\operatorname{tg}\psi = f_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\delta}$$

zu bestimmenden Reibungswinkel ψ für Gleiten in Keilnuthen einführte, so würden jene Gleichungen nunmehr gelten für eine

flachgängige Schraube, an welcher die beiden Reibungsflächen **mit** Keilnuthen vom Convergenzwinkel 2δ versehen wären (Fig. **406**).

Fig. 406.



Denkt man sich die **Zahl** der neben einander **liegen**den Keilnuthen bis auf **eine** reducirt und von den **beiden** Seitenwänden der in **dem** festliegenden Schraubenmuttergewinde befindlichen Keilnuth alsdann die **innere** Wand hinweggenommen, **so** gelangt man zu der in Fig. **407** dargestellten **Form**, für welche (nach der in § 84 mit Bezug auf Fig. **350** und Fig. **351** gegebenen **Er**klärung) jene Gleichungen ebenfalls noch gültig bleiben. Da ferner die Formen der beiden Körper nur insoweit einen Einfluss haben auf die zwischen beiden stattfindenden Druckkräfte, als die Formen der beiden Berührungsflächen durch sie bedingt werden, so können nach Ausführung der erwähnten Substitution jene für die flachgängige Schraube gefundenen Gleichungen auch für die gewöhnliche **scharfgängige** Schraube benutzt werden, bei welcher die Querschnittsform des Gewindeganges — statt eines Rechtecks — ein gleichschenkeliges Dreieck bildet (Fig. **408**),

Fig. 407.

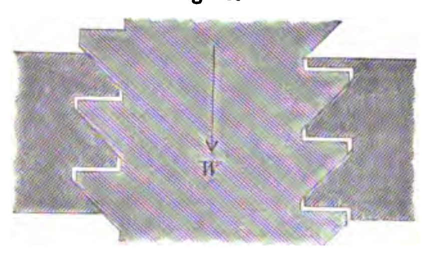
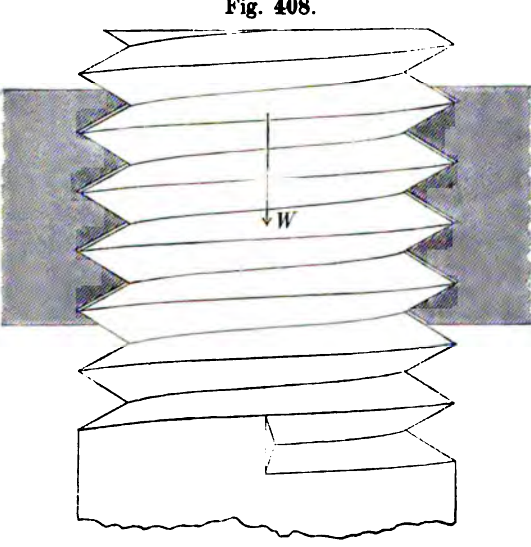
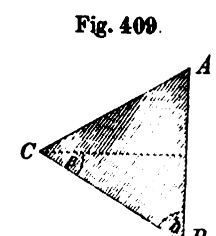


Fig. 408.



und deren Form man sich dadurch entstanden denken kann, dass ein nach einer Schraubenlinie gekrümmter Stab von der in Fig. 409 dargestellten dreieckigen Querschnittsform um einen Cylinder vom inneren Durchmesser der Schraubenspindel herumgelegt und nachher mit demselben zu einem Stücke vereinigt wird.

Fig. 409.



Hiernach ergiebt sich z. B. aus Gleichung 418) für das Moment der zum Ueberwinden des Widerstandes W erforderlichen Drehkraft die Gleichung:

$$433)\quad Kl = W\varrho \operatorname{tg}(\alpha + \psi).$$

Wenn der halbe Winkel an der Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks, welches den Gewinde-Querschnitt darstellt, mit β bezeichnet wird, so ist nach Fig. 409 der Winkel $\delta = 90^\circ - \beta$, folglich $\sin\delta = \cos\beta$ su setzen. Man erhält also zur Bestimmung des Winkels ψ die Gleichung:

$$434)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\beta}.$$

Während einer Umdrehung der Schraube wird der Angriffspunkt des Widerstandes W um die Steigung s — also nach Gleichung 414) um die Grösse $2\varrho\pi \operatorname{tg}\alpha$ — zurückgedrängt, und legt der Angriffspunkt der Kraft K die Strecke $2l\pi$ zurück. Das Verhältniss der beiden mechanischen Arbeiten ist demnach:

$$n = \frac{W \,.\, 2\varrho\pi \operatorname{tg}\alpha}{K \,.\, 2l\pi} = \frac{W\varrho}{Kl}\operatorname{tg}\alpha.$$

Wenn man hierin für den Quotienten $\frac{W\varrho}{Kl}$ den aus Gleichung 433) sich ergebenden Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$435)\quad n = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \psi)},$$

welche auch zur Bestimmung des Nutzeffects der flachgängigen Schraube dienen kann, wenn wiederum ψ mit φ vertauscht wird. Da nach Gleichung 434) der Winkel ψ immer grösser ist als der Winkel φ, so ergiebt sich aus dieser Gleichung, dass unter sonst gleichen Umständen der Nutzeffect bei der scharfgängigen Schraube immer kleiner ist als bei der flachgängigen Schraube, dass also in solchen Fällen, wo die Schraube als Bewegungs-Mechanismus verwendet wird, die flachgängige Schraube allemal der scharfgängigen vorzuziehen ist.

Nach Gleichung 419) ergiebt sich für das zur Verhinderung einer rückgängigen Bewegung der scharfgängigen Schraube erforderliche Drehungsmoment der Werth:

$$436)\quad Kl \doteq W\varrho \operatorname{tg}(\alpha - \psi).$$

Wenn also durch die Reibungswiderstände allein schon eine solche rückgängige Bewegung verhindert werden soll, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\alpha \leqq \psi,$$

während eine flachgängige Schraube schon bei dem kleineren Steigungswinkel $\alpha = \varphi$ von selbst zurückweichen würde. Hieraus ergiebt sich, dass in solchen Fällen, wo Sicherheit gegen rückgängige Bewegung der Schraube Haupterforderniss ist, d. h. in solchen Fällen, wo die Schraube als Befestigungsmittel verwendet wird, die scharfgängige Schraube bei gleichem Steigungswinkel ihren Zweck besser erfüllt, als die flachgängige.

Bei dem Anschrauben einer Platte an eine Wand mittelst eines scharfgängigen Schraubenbolzens (Fig. 410 und Fig. 411) hat die am Schraubenschlüssel wirkende Drehkraft Kl ausser dem in Gleichung 433) gefundenen Widerstandsmomente

$$W\varrho \operatorname{tg}(\alpha + \psi)$$

noch das nach Gleichung 326) zu bestimmende Moment des zwischen Schraubenmutter und Platte entstehenden, dem Drucke W entsprechenden, Reibungswiderstandes zu überwinden. Wenn mit ϱ_1 der mittlere Halbmesser der ringförmigen Reibungsfläche, und mit f der betreffende Reibungscoefficient bezeichnet wird, so ergiebt sich für die zum Hervorbringen des Druckes W erforderliche Drehkraft die Gleichung:

Fig. 410.

Fig. 411.

$$437)\quad Kl = W\varrho \operatorname{tg}(\alpha + \psi) + fW\varrho_1.$$

Wenn der Convergenzwinkel des Gewindeprofiles $2\beta = 60^0$ beträgt, und für die Schraube der Reibungswinkel $\varphi = 6^0$ gesetzt wird, so ist nach Gleichung 434) $\operatorname{tg}\psi = \frac{0{,}105}{0{,}866} = 0{,}1213$, also $\psi = 6^0\,55'$ zu setzen. Wenn ferner $l = 0^m{,}3$, $\varrho = 0^m{,}012$, $\varrho_1 = 0^m{,}015$, der Reibungscoefficient für Schraubenmutter und Platte $f = 0{,}15$ und der (auf gleiche Weise wie bei der flachgängigen Schraube aus Steigung und mittlerem Schraubenbolzen-Durchmesser zu berechnende) Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie $\alpha = 2^0\,20'$ gesetzt wird, so erhält man nach Gleichung 437):

$$K \,.\, 0{,}3 = W(0{,}012 \,.\, \operatorname{tg} 9^0\,15' + 0{,}15 \,.\, 0{,}015), \text{ oder:}$$
$$K = W(0{,}0065 + 0{,}0075) = 0{,}014 \,.\, W.$$

Eine am Endpunkte des Schraubenschlüssels wirkende Kraft $K = 14$ Kil. würde also bewirken, dass die Platte mit einer Kraft $W = 1000$ Kil. gegen die Wand gepresst wird, und wenn der Reibungscoefficient zwischen Platte und Wand 0,4 beträgt, so würde der diesem Drucke entsprechende — einer Verschiebung der Platte längs der Wand entgegenwirkende — Reibungswiderstand 400 Kil. betragen.

Die zum Rückwärtsdrehen des Schraubenschlüssels erforderliche Kraft findet man aus Gleichung 437), indem man darin $+K$ mit $-K$, ferner $+\psi$ mit $-\psi$ und $+f$ mit $-f$ vertauscht, also aus der Gleichung:

$$438) \quad Kl = -W\varrho \operatorname{tg}(\alpha - \psi) + fW\varrho_1.$$

Bei den oben angenommenen Zahlenwerthen würde z. B., wenn vorher beim Anschrauben ein Druck $W = 1000$ Kil. hervorgebracht worden war, zum Lösen der Schraubenverbindung im ersten Augenblicke die Kraft erforderlich sein.

$$K = \frac{1000}{0{,}3}\left[-0{,}012 \,.\, \operatorname{tg}(-4^0\,35') + 0{,}15 \,.\, 0{,}015\right] = 10^{\text{kil.}}{,}7.$$

§ 104.

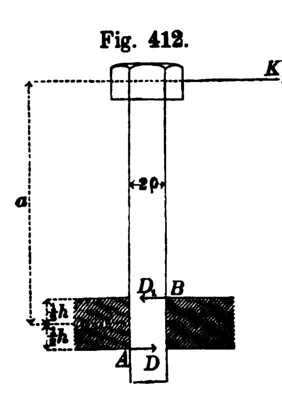
Reibung an der Mantelfläche der Schraube.

Für die beiden Gegendrücke D und D_1, welche bei dem in Fig. 412 dargestellten verticalen cylindrischen Bolzen durch die am Kopfe desselben wirkende Horizontal-Kraft K an den beiden Berührungsstellen A und B hervorgerufen werden, erhält man nach dem Gesetze der statischen Momente — indem man das eine Mal den Punkt B, das andere Mal den Punkt A als Drehpunkt wählt — die Gleichungen:

$$0 = K\left(a - \frac{h}{2}\right) - Dh, \quad \text{oder:} \quad D = K\left(\frac{a}{h} - \frac{1}{2}\right),$$
$$0 = K\left(a + \frac{h}{2}\right) - D_1 h, \quad \text{oder:} \quad D_1 = K\left(\frac{a}{h} + \frac{1}{2}\right).$$

Wenn der auf solche Weise eingeklemmte Bolzen durch ein in horizontaler Ebene wirkendes Kräftepaar gleichförmig gedreht werden sollte, so würde dasselbe die an den beiden Berührungsstellen auftretenden Reibungswiderstände fD und fD_1 zu überwinden haben; das Moment desselben müsste also die Grösse haben:

Fig. 412.

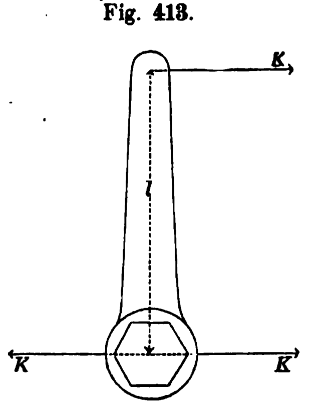


$$439)\quad \mathfrak{M} = fD\varrho + fD_1\varrho,$$

und nach Substitution der oben für D und D_1 gefundenen Werthe erhält man für $\mathfrak{M}$ die Gleichung:

$$440)\quad \mathfrak{M} = 2fK\frac{a}{h}\varrho.$$

Fig. 413.



Dieses Kräftepaar kann auch durch zwei Kräfte gebildet werden, deren jede gleich K ist (Fig. 413), sobald nur der Hebelarm l dieses aus den zwei Kräften K bestehenden Kräftepaares so gewählt wird, dass $Kl = \mathfrak{M}$ ist. In diesem Falle heben zwei von den drei Kräften K einander auf, und es bleibt nur noch die eine am Ende des Hebels l einseitig wirkende Kraft K übrig. Wenn also diese letztere den Bolzen gleichförmig drehen soll, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$441)\quad Kl = 2fK\frac{a}{h}\varrho, \quad \text{oder:} \quad \frac{l}{\varrho} = 2f\frac{a}{h}.$$

Da diese Gleichung unabhängig ist von der Geschwindigkeit der Drehbewegung und dieselbe folglich auch für die Drehgeschwindigkeit Null noch gültig bleibt, so drückt dieselbe zugleich die Bedingung für die Fortdauer des einmal vorhandenen Ruhezustandes aus; d. h. wenn die obige Bedingung erfüllt ist, so wird niemals ein Uebergang aus Ruhe in Bewegung durch die Kraft K hervorgebracht werden können, wie gross auch immer die Kraft K sein möge.

Wenn z. B. $f = 0{,}1$ und $\frac{a}{h} = 20$ ist, so wird $\frac{l}{\varrho} = 4$; d. h. nur dann, wenn l grösser als 4ϱ ist, wird durch die einseitig am Hebelarme l wirkende

Kraft K ein Uebergang aus Ruhe in Bewegung hervorgebracht werden können. Wenn dagegen l kleiner ist als 4ϱ, so tritt ein Klemmen ein, und selbst eine unendlich grosse Kraft würde keine Drehung hervorbringen.

Bei einer flachgängigen Schraube würden unter gleichen Umständen sowohl an der dem äusseren Gewindehalbmesser R entsprechenden Cylinder-Mantelfläche als auch an der dem inneren Gewindehalbmesser r entsprechenden Cylinderfläche eine Reibung entstehen, und man darf annehmen, dass dieselbe ungefähr ebenso wirkt, wie wenn es an beiden Berührungsstellen A und B die dem mittleren Schraubenhalbmesser $\frac{R+r}{2} = \varrho$ entsprechende Cylinder-Mantelfläche wäre, in welcher jene Reibungswiderstände auftreten. Die obigen Gleichungen dürfen daher auch dann noch als gültig betrachtet werden, wenn es statt des cylindrischen Bolzens ein flachgängiger Schraubenbolzen ist, der durch die einseitig am Hebelarme l wirkende Kraft K gedreht werden soll.

Wenn ausser diesen an der Mantelfläche auftretenden Reibungswiderständen bei der Umdrehung des Schraubenbolzens noch ein in der Achsenrichtung desselben wirkender Widerstand W zu überwinden ist, so kommt zu dem Widerstandsmomente $f(D+D_1)\,\varrho$ (Gleichung 439) noch das in Gleichung 418) gefundene Widerstandsmoment $W\varrho\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varphi)$ hinzu, und die Gleichung 440) nimmt für diesen Fall die Form an:

$$\mathfrak{M} = f(D+D_1)\,\varrho + W\varrho\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varphi).$$

Wenn man hierin wieder die Werthe $D + D_1 = 2K\frac{a}{h}$ und $\mathfrak{M} = Kl$ substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$Kl = 2fK\frac{a}{h}\,\varrho + W\varrho\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varphi),$$

welche für K aufgelöst die Form annimmt:

$$K = \frac{W\varrho\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varphi)}{l - 2f\varrho\frac{a}{h}}$$

und zeigt, dass auch in diesem Falle $K = \infty$ wird, wenn $\frac{l}{\varrho} = 2f\frac{a}{h}$ ist. Es drückt daher die bereits oben gefundene Gleichung 441) auch für die flachgängige Schraube die Bedingung des Klemmens aus.

Für die scharfgängige Schraube würde nach dem vorigen Paragraphen ψ statt φ und ausserdem $\frac{f}{\sin\beta}$ statt f (s. Fig. 409) zu setzen sein; die obige Gleichung nimmt dann die Form an:

$$K = \frac{W\varrho \operatorname{tg}(\alpha + \psi)}{l - 2\frac{f}{\sin\beta}\varrho\frac{a}{h}}$$

und zeigt, dass bei der scharfgängigen Schraube das Klemmen schon dann eintritt, wenn $\frac{l}{\varrho} \leqq 2\frac{f}{\sin\beta}\frac{a}{h}$ ist.

VIERTER ABSCHNITT.

Dynamik fester Körper
oder
Lehre von der Bewegung eines nicht im Gleichgewichtszustande befindlichen Systems von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten.

SECHZEHNTES CAPITEL.

Allgemeine Lehrsätze.

§ 105.

Wirkung der inneren Kräfte.

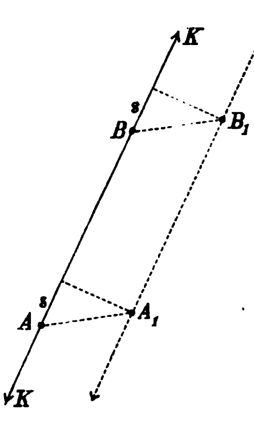
Arbeits-Summe der inneren Kräfte gleich Null.

Wenn auf zwei materielle Punkte, die einem unveränderlichen Systeme angehören, in der Richtung ihrer Verbindungslinie zwei constante gleich grosse entgegengesetzte Kräfte wirken, so ist die bei irgend einer fortschreitenden Bewegung des Systems von diesen beiden Kräften zusammen verrichtete Arbeitssumme gleich Null. Denn bei dem Uebergange der Linie AB in die parallele Lage $A_1 B_1$ (Fig. 414) verrichtet die in dem Punkte A angreifende Kraft die mechanische Arbeit $-Ks$, und die in dem Punkte B angreifende Kraft die mechanische Arbeit $+Ks$; die von beiden Kräften zusammengenommen verrichtete Arbeitssumme ist also gleich Null.

Das Gleiche gilt von einer solchen Bewegung des Systems, bei welcher die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte um den einen ihrer Endpunkte sich dreht (Fig. 415). Denn bei dieser Drehung verrichtet die in dem festliegenden Punkte A angreifende Kraft die mechanische Arbeit Null wegen Unbeweglichkeit ihres Angriffspunktes, und die in dem Punkte B angreifende Kraft ver-

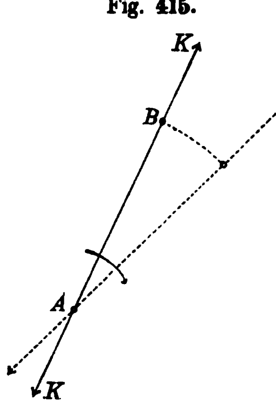
richtet die Arbeit Null, weil die Bewegung ihres Angriffspunktes stets rechtwinkelig zur Kraft gerichtet ist.

Fig. 414.



Denkt man sich den Raum, in welchem die in Fig. 415 dargestellte Bewegung erfolgt, gleichzeitig die in Fig. 414 dargestellte fortschreitende Bewegung ausführend, so findet man, dass in diesem Falle die im Ganzen verrichtet werdende Arbeit in jedem Zeittheilchen sich zusammensetzt aus zwei Arbeitssummen, von denen die eine der drehenden Bewegung, die andere der fortschreitenden Bewegung entspricht. Da jeder von diesen beiden Theilen einzeln genommen beständig die Grösse Null hat, so gilt der obige Satz auch in Bezug auf eine solche Bewegung des Systems, welche als aus einer drehenden und einer fortschreitenden Bewegung zusammengesetzt aufgefasst werden kann, d. h. in Bezug auf eine ganz beliebige Bewegung des Systems.

Fig. 415.



Dieser Satz bleibt auch dann noch gültig, wenn während der Bewegung die Grösse der beiden Gegenkräfte stetig sich ändert. In diesem Falle kann man sich nämlich die ganze Bewegungsdauer zerlegt denken in Theile, die so klein sind, dass innerhalb eines solchen Zeit-Intervalles die beiden Kräfte als constant bleibend angesehen werden dürfen. Für jeden einzelnen dieser Zeittheile ist dann der Satz als bereits bewiesen zu betrachten; folglich muss derselbe auch für die Summe aller dieser Zeittheile, oder für die ganze Bewegungsdauer noch richtig sein.

Nach dem Gesetze der Wechselwirkung (§ 20) haben die in einem Systeme von materiellen Punkten wirkenden inneren Kräfte, d. h. die von den einzelnen Punkten auf einander gegenseitig übertragenen Kräfte, je paarweise gleiche Grössen und entgegengesetzte Richtungen in den Verbindungslinien ihrer Angriffspunkte.

Da zugleich (nach der in § 39 gegebenen Erklärung) bei einem Systeme von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten diese inneren Kräfte stets diejenigen Grössen haben, welche erforderlich sind, um die Entfernungen ihrer Angriffspunkte unverändert zu erhalten, so folgt aus dem oben bewiesenen Satze, dass bei einem solchen Systeme die von den inneren Kräften verrichtete Arbeitssumme stets gleich Null ist — wie auch immer die Bewegung des Systems beschaffen sein möge, und wie auch immer diese inneren Kräfte während der Bewegung sich ändern mögen.

§ 106.

Princip der lebendigen Kraft.

Zunahme der lebendigen Kraft gleich Arbeit der äusseren Kräfte. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Die Bewegung, welche ein mit anderen Punkten zu einem unveränderlichen Systeme verbundener materieller Punkt unter Einwirkung einer bestimmten Kraft K ausführt, ist im Allgemeinen verschieden von derjenigen Bewegung, welche dieser Punkt ohne jene Verbindung als vollkommen freier materieller Punkt ausführen würde unter Einwirkung derselben Kraft K. Der eine materielle Punkt kann nicht in Bewegung versetzt werden, ohne dass die übrigen Punkte gleichfalls in Bewegung gerathen, und eine Aenderung seines Bewegungszustandes ist im Allgemeinen unzertrennlich verbunden mit Aenderungen in den Bewegungszuständen der übrigen materiellen Punkte.

Dasjenige, was einen materiellen Punkt in Bewegung versetzt, oder seinen Bewegungszustand verändert, ist (nach § 30) allemal als eine Kraft aufzufassen. Es werden also durch das Auftreten der Kraft K mittelbar noch andere Kräfte in Thätigkeit versetzt, nämlich einerseits die Kräfte, welche bewirken, dass die Bewegung ihres Angriffspunktes von der eines freien materiellen Punktes abweicht, andererseits diejenigen Kräfte, durch welche gleichzeitig die Bewegungszustände der übrigen materiellen Punkte verändert werden. Diese mittelbar in Thätigkeit versetzten Kräfte sind eben jene inneren Kräfte, welche von den einzelnen materiellen Punkten nach dem Gesetze der Wechselwirkung auf einander übertragen werden, und durch welche die Entfernungen derselben unverändert erhalten werden. Es sind also diese inneren Wechselwirkungskräfte aufzufassen als Widerstandskräfte, welche allemal nur

dann zur Wirkung gelangen, wenn ohne dieselben die Abstände der einzelnen Punkte sich ändern würden. Sie bilden eine Kräfte-Gruppe, deren Wirkung das Auftreten der gegebenen äusseren Kräfte stets begleitet und wesentlich durch die letzteren bedingt wird.

Die wirkliche Bewegung eines jeden zum Systeme gehörenden materiellen Punktes geschieht genau auf dieselbe Weise wie die eines einfachen freien materiellen Punktes, der unter Einwirkung von zwei Kräften sich bewegt: Die eine von diesen beiden Kräften ist die als bekannt anzusehende Mittelkraft K der von aussen her auf jenen Punkt einwirkenden Kräfte; die andere Kraft J ist die unbekannte — je nach den Umständen sich ändernde — Mittelkraft aller von den übrigen Punkten des Systems auf jenen Punkt übertragenen inneren Kräfte $i_1, i_2, i_3 \ldots$ Wäre die Kraft J bekannt, so würde nunmehr die Bewegung des Punktes bestimmt werden können nach dem in § 22 für den einfachen materiellen Punkt bereits bewiesenen Principe der lebendigen Kraft. Wenn mit $\mathfrak{A}$ die von der Kraft K während der Bewegung verrichtete mechanische Arbeit, mit $\mathfrak{a}$ die von der Kraft J verrichtete Arbeit, mit $\frac{mc^2}{2}$ die lebendige Kraft des materiellen Punktes im Anfange der Bewegung, mit $\frac{mv^2}{2}$ die lebendige Kraft desselben am Ende der Bewegung bezeichnet wird, so würde nach Gleichung 51) zu setzen sein:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = \mathfrak{A} + \mathfrak{a}.$$

Denkt man sich in gleicher Weise auf jeden der übrigen materiellen Punkte das Princip der lebendigen Kraft angewendet und nachher die auf solche Weise gefundenen Gleichungen sämmtlich zusammenaddirt, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right) = \Sigma(\mathfrak{A}) + \Sigma(\mathfrak{a}).$$

In dieser Gleichung bedeutet $\Sigma(\mathfrak{a})$ die von sämmtlichen inneren Kräften zusammengenommen verrichtete Arbeitssumme, welche nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Lehrsatze immer gleich Null gesetzt werden kann. Es ist also:

$$442)\quad \Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right) = \Sigma(\mathfrak{A}).$$

Die Grösse $\Sigma(\mathfrak{A})$ bedeutet die Summe der von den äusseren — unmittelbar gegebenen — Kräften K verrichteten mechanischen

Arbeiten, die Grösse $\Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right)$ bedeutet die Summe der lebendigen Kräfte aller einzelnen materiellen Punkte im Anfange der Bewegung, die Grösse $\Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ bedeutet die Summe der lebendigen Kräfte am Ende der Bewegung. Die obige Gleichung zeigt also, dass das früher für den einfachen materiellen Punkt gefundene Princip der lebendigen Kraft auch für ein System von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten noch gültig ist.

Die Zunahme der lebendigen Kraft des ganzen Systems ist gleich der von den gegebenen äusseren Kräften verrichteten Arbeitssumme.

Der specielle Fall, in welchem die äusseren Kräfte so beschaffen sind, dass die Geschwindigkeiten der materiellen Punkte durch sie nicht verändert werden, in welchem also die Zunahme an lebendiger Kraft beständig die Grösse Null hat, ist derjenige, in welchem die äusseren Kräfte einander im Gleichgewicht halten. Bei einem solchen gleichförmigen Bewegungszustande des Systems hat also auch die von den äusseren Kräften verrichtete Arbeitssumme (nach Gleichung 442) stets die Grösse Null. Die Gleichgewichts-Bedingungen eines Kräfte-Systems sind aber unabhängig von der Art des gleichförmigen Bewegungszustandes, in welchem das System ihrer Angriffspunkte unter ihrer Einwirkung augenblicklich begriffen ist. Wenn also die Kräfte einander im Gleichgewicht halten, so muss nicht nur für den wirklichen Bewegungszustand, sondern auch für einen beliebigen anderen Bewegungszustand, in welchem man sich das Punkten-System augenblicklich begriffen denken kann, jene Bedingung erfüllt sein, d. h. die von den äusseren Kräften verrichtet werdende Arbeitssumme gleich Null sein — wobei jedoch (wegen der im Allgemeinen mit der Bewegung eintretenden Lagen-Veränderung des Punkten-Systems gegen das Kräfte-System) das Wort „Arbeitssumme“ nur auf den nächstfolgenden unendlich kleinen Theil dieser fingirten Bewegung zu beziehen ist. Auf diese Weise kann die Statik als ein specieller Fall der Dynamik aufgefasst werden, und die eben erklärte Anwendung des Princips der lebendigen Kraft auf den speciellen Fall des Gleichgewichtes der Kräfte führt zu folgendem allgemeinen Lehrsatze:

Wenn die auf ein System unveränderlich verbundener materieller Punkte wirkenden Kräfte einander im Gleichgewicht halten,

so ergiebt sich für die bei irgend einem fingirten Bewegungszustande des Systems während des ersten unendlich kleinen Theiles der Bewegung von den Kräften verrichtete Arbeitssumme stets die Grösse Null — wie auch immer der Bewegungszustand gewählt werden möge. Umgekehrt: wenn in Bezug auf jeden denkbaren Bewegungszustand diese Bedingung erfüllt ist, so halten die Kräfte einander im Gleichgewichte (da andernfalls durch die Kräfte das ruhende System in Bewegung versetzt, also die lebendige Kraft desselben verändert, folglich nach Gleichung 442) die bei diesem Uebergange aus Ruhe in Bewegung von den Kräften verrichtete Arbeit einen von Null verschiedenen Werth haben würde).

Dieser Lehrsatz wird das „Princip der virtuellen Geschwindigkeiten" genannt.

Bei einer fortschreitenden Bewegung des Systems besteht die während des ersten unendlich kleinen Theiles der Bewegung von den Kräften verrichtete Arbeit in dem Producte aus der zurückgelegten Wegeslänge in die algebraische Summe der bei rechtwinkeliger Zerlegung in die Richtung dieser Bewegung fallenden Seitenkräfte. Bei einer Drehung des Systems besteht diese Arbeit (nach der in § 23 mit Bezug auf Fig. 54 gegebenen Erklärung) in dem Producte aus dem unendlich kleinen Drehungswinkel in die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte in Bezug auf die Drehachse. Wenn man also als Bewegungszustand des Systems das eine Mal eine fortschreitende Bewegung in beliebiger Richtung, das andere Mal eine Drehbewegung um eine beliebige Drehachse annimmt, so ergeben sich die beiden am Schlusse des § 43 gefundenen allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen als unmittelbare Folgerung aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten.

§ 107.

d'Alembert's Princip.

Die den Beschleunigungen der einzelnen materiellen Punkte entsprechenden Kräfte, in entgegengesetzten Richtungen hinzugefügt, würden den wirklich vorhandenen Kräften das Gleichgewicht halten.

Die auf irgend einen der materiellen Punkte des Systems wirkende Totalkraft ist — wie im vorigen Paragraphen erklärt — anzusehen als die Mittelkraft aus der gegebenen äusseren Kraft K

und aus einer unbekannten Kraft J, welche durch die Verbindung desselben mit den übrigen Punkten bedingt wird. Wenn also mit R die Mittelkraft der beiden Kräfte K, J, und mit m die Masse des materiellen Punktes bezeichnet wird, so ist die wirkliche Beschleunigung desselben jedenfalls:

$$p = \frac{R}{m}.$$

Hieraus ergiebt sich für jene Totalkraft selbst — oder für die der wirklichen Beschleunigung des materiellen Punktes entsprechende Kraft — der Werth:

443) $R = mp$.

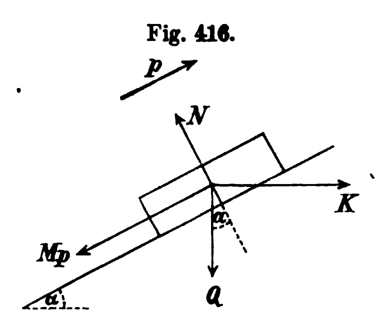
Wenn man eine Kraft von derselben Grösse, aber von entgegengesetzter Richtung zu den beiden wirklich vorhandenen Kräften K und J an jenem materiellen Punkte noch hinzufügte, so würde derselbe dadurch jedenfalls in den Gleichgewichtszustand versetzt werden. In gleicher Weise würde durch das Hinzufügen einer der Beschleunigung desselben entsprechenden, aber entgegengesetzt genommenen Kraft jeder der übrigen materiellen Punkte des Systems, und damit zugleich das ganze System selbst in den Gleichgewichtszustand versetzt werden können. Denkt man sich also an dem ganzen Systeme die den wirklichen Beschleunigungen der einzelnen materiellen Punkte entsprechenden Kräfte, in entgegengesetzten Richtungen genommen, zu den wirklich vorhandenen Kräften noch hinzugefügt, so muss die Gesammtheit der nunmehr vorhandenen Kräfte den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen genügen. Es können also die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen dazu benutzt werden, jene unbekannten Kräfte mp ... — und damit zugleich die unbekannten **Beschleunigungen** der einzelnen materiellen Punkte selbst zu bestimmen.

Wenn das System in **fortschreitender** Bewegung begriffen ist, so bilden die hinzuzufügenden Kräfte mp ein System von gleichgerichteten Parallelkräften, deren Grössen den Massen der materiellen Punkte proportional sind. Nach § 45 können in diesem Falle jene Kräfte ersetzt werden durch ihre im Schwerpunkte angreifende Mittelkraft, deren Grösse gleich der Summe derselben ist. Wenn also mit Q das Gewicht, und mit M die Masse des ganzen Systems bezeichnet wird, so hat diese Mittelkraft die Grösse:

$$Mp = Q \cdot \frac{p}{g}.$$

So z. B. würde man für den in Fig. 416 dargestellten Fall eines ohne Reibung auf einer schiefen Ebene sich bewegenden Körpers die Beschleunigung, welche demselben durch die Kraft K ertheilt wird, berechnen können, indem man auf die vier in der Figur angegebenen Kräfte die Gleichgewichts-Bedingungen anwendet; man erhält dann die Gleichung:

Fig. 416.



$$K \cos \alpha = Q \sin \alpha + Mp, \text{ oder:}$$

$$p = g \left(\frac{K}{Q} \cos \alpha - \sin \alpha \right).$$

Wie das Princip der lebendigen Kraft in der speciellen Form des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten angewendet werden kann, die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen aus den Gesetzen der Dynamik abzuleiten, so lassen sich umgekehrt mittelst des hier gefundenen Princips die Gesetze der Dynamik zurückführen auf die im vorigen Abschnitte bereits gefundenen Gesetze der Statik.

SIEBENZEHNTES CAPITEL.

Gleichförmige Drehung eines Körpers um eine feste Drehachse.

§. 108.

Lebendige Kraft des mit der Geschwindigkeit ω rotirenden Körpers gleich $\frac{T\omega^2}{2}$. Definition des Trägheitsmomentes T.

Bei einem Körper, der eine fortschreitende Bewegung ausführt, haben sämmtliche Punkte stets gleiche Geschwindigkeiten; die lebendige Kraft eines solchen Körpers ist daher wie bei einem einfachen materiellen Punkte zu definiren als Product aus der ganzen Masse des Körpers in das halbe Quadrat seiner Geschwindigkeit. Bei einer Drehung des Körpers dagegen — wie überhaupt bei solchen Bewegungen, die nicht rein fortschreitende sind — ist auf den Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten der einzelnen materiellen Punkte Rücksicht zu nehmen, und die lebendige Kraft des ganzen Körpers stets als „Summe der lebendigen Kräfte aller einzelnen materiellen Punkte des Körpers" zu definiren.

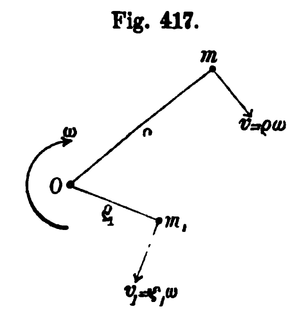
Die lebendige Kraft irgend eines einzelnen materiellen Punktes von der Masse m und der Geschwindigkeit v ist $\frac{mv^2}{2}$; der Ausdruck für die lebendige Kraft L des ganzen Körpers erscheint daher allemal in der Form:

$$L = \Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

worin das Summationszeichen Σ andeutet, dass die auf ähnliche Weise in Bezug auf jeden einzelnen materiellen Punkt des Körpers zu bildenden Producte $\frac{mv^2}{2}$ sämmtlich zu einer Summe vereinigt werden sollen.

Wenn die Bewegung des Körpers in einer Drehung um die feste Drehachse O besteht (Fig. 417), und mit ω die Geschwindigkeit der Drehbewegung bezeichnet wird (im Sinne der am Schlusse von § 27 gegebenen Erklärung), so ist die Geschwindigkeit eines in der Entfernung ϱ von der Drehachse befindlichen Punktes

Fig. 417.



$$v = \varrho\omega,$$

und wenn man in analoger Weise die Geschwindigkeit eines jeden der übrigen materiellen Punkte durch seine Entfernung von der Drehachse und die Winkelgeschwindigkeit ω ausdrückt, so erhält man für die lebendige Kraft des rotirenden Körpers einen Ausdruck von der Form:

$$L = \Sigma\left(\frac{m\varrho^2\omega^2}{2}\right).$$

Die Grösse $\frac{\omega^2}{2}$ ist gemeinschaftlicher Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder und kann deshalb vor das Summationszeichen gesetzt werden; es ist also:

$$444) \quad L = \frac{\omega^2}{2} \cdot \Sigma(m\varrho^2).$$

Der Ausdruck $\Sigma(m\varrho^2)$ bedeutet die Summe der Producte aus allen einzelnen Massentheilchen des Körpers in die Quadrate ihrer Abstände von der Drehachse und wird das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf diese Drehachse genannt.

Wenn das Trägheitsmoment mit T bezeichnet, also abkürzungsweise:

$$445) \quad \Sigma(m\varrho^2) = T$$

gesetzt wird, so ergiebt sich für die lebendige Kraft des mit der Geschwindigkeit ω rotirenden Körpers der Werth:

$$446) \quad L = \frac{T\omega^2}{2}.$$

Wenn die Winkelgeschwindigkeit des Körpers von ω_0 bis ω zunimmt, während von den äusseren Kräften die mechanische Arbeit $\Sigma(\mathfrak{A})$ verrichtet wird, so ist nach § 106 die Zunahme der lebendigen Kraft zu berechnen aus der Gleichung:

$$\frac{T\omega^2}{2} - \frac{T\omega_0^2}{2} = \Sigma(\mathfrak{A}).$$

Um also das Princip der lebendigen Kraft auf die Bestimmung der Drehbewegung eines Körpers anwenden zu können, hat man zuvor das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse zu berechnen.

§ 109.

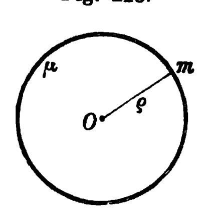
Trägheitsmomente, reducirte Massen, Trägheitshalbmesser.

Ring.

Wenn die einzelnen Massentheilchen des Körpers sämmtlich gleich weit von der Drehachse O entfernt liegen (Fig. 418), so kann in dem Ausdrucke:

$$T = \Sigma(m\varrho^2)$$

Fig. 418.



die Grösse ϱ^2 als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder unter dem Summationszeichen auch vor dasselbe gesetzt werden, und es wird:

$$T = \varrho^2 \Sigma(m),$$

oder, wenn die ganze Masse des Körpers mit μ bezeichnet wird:

$$447) \quad T = \mu\varrho^2.$$

Um also das Trägheitsmoment eines Ringes (oder eines Hohlcylinders von unendlich kleiner Wandstärke) in Bezug auf die geometrische Achse desselben zu erhalten, hat man die ganze Masse des Ringes mit dem Quadrate seines Halbmessers zu multipliciren.

Hiernach kann das Trägheitsmoment eines beliebigen anderen Körpers als gefunden angesehen werden, sobald die Masse μ bekannt ist, welche ein Ring vom gegebenen Halbmesser ϱ haben müsste, wenn sein Trägheitsmoment dem jenes Körpers gleich

sein soll. Man nennt alsdann diese Masse μ die auf den Drehungshalbmesser ϱ reducirte Masse jenes Körpers. Die Grösse der reducirten Masse hängt ab von der Grösse des angenommenen Drehungshalbmessers. Da das Product $\mu\varrho^2$ als Trägheitsmoment des Körpers eine bestimmte unveränderliche Zahl ist, so entspricht jedem Werthe von ϱ ein bestimmter Werth von μ. Derjenige Werth von ϱ, für welchen die reducirte Masse μ gleiche Grösse mit der wirklichen Masse des Körpers hat, wird der Trägheitshalbmesser des Körpers genannt.

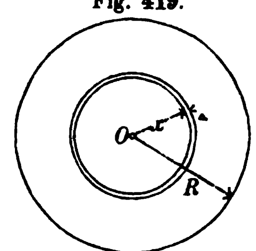
Cylinder.

Wenn die Masse eines Körpers stetig und gleichförmig über eine Kreisfläche vom Halbmesser R vertheilt ist in der Weise, dass auf jede Flächeneinheit dieser Kreisfläche die Masse γ kommt, so ist die ganze Masse einer solchen Scheibe:

448) $M = \gamma R^2 \pi$.

Denkt man sich diese Scheibe in concentrische Ringe von der unendlich kleinen Wandstärke Δ zerlegt (Fig. 419), so erhält man als Masse eines solchen Ringes vom Halbmesser x:

Fig. 419.



$$m = \gamma \,.\, 2x\pi \,.\, \Delta$$

und als Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Achse Q nach Gleichung 447):

$$mx^2 = 2\pi\gamma \,.\, x^3\Delta.$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Scheibe ist gleich der Summe der Trägheitsmomente aller einzelnen Ringe zu setzen; man erhält also die Gleichung:

449) $T = 2\pi\gamma\Sigma(x^3\Delta)$,

in welcher das Summationszeichen ausdrückt, dass für x der Reihe nach sämmtliche zwischen 0 und R liegende Werthe zu substituiren, und nachher alle die auf solche Weise gebildeten Producte $x^3\Delta$ zusammen zu addiren sind.

Zur geometrischen Veranschaulichung der Grösse $\Sigma(x^3\Delta)$ *) kann man sich eine vierseitige Pyramide ACB, deren quadratische Grundfläche AB die Seitenlänge R, und deren Höhe ebenfalls die Grösse R hat, in Schichten von

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integralrechnung würde statt $\Sigma(x^3\Delta)$ zu setzen sein:

$$\int_0^R x^3\,dx = \frac{R^4}{4}.$$

der unendlich kleinen Dicke Δ zerlegt denken durch parallel zur Grundfläche gelegte Ebenen (Fig. 420). Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist das Moment des ganzen Inhaltes dieser Pyramide in Bezug auf eine durch die Spitze C parallel zur Grundfläche gelegte Ebene gleich der Summe der Momente aller einzelnen Schichten zu setzen, also:

Fig. 420.

$$J \, . \, x_0 = \Sigma (ix),$$

woraus sich nach Substitution der in Fig. 420 eingeschriebenen Werthe die Gleichung ergiebt:

$$450) \quad \frac{R^2}{3} \cdot \frac{3}{4} R = \Sigma (x^2 \Delta \, . \, x),$$

$$\text{oder: } \Sigma (x^3 \Delta) = \frac{R^4}{4}.$$

Wenn man für die Grösse $\Sigma (x^3 \Delta)$ ihren Werth $\frac{R^4}{4}$ setzt, so erhält man aus Gleichung 449):

$$451) \quad T = \gamma \pi \frac{R^4}{2},$$

oder nach Substitution des in Gleichung 448) gefundenen Werthes $\gamma R^2 \pi = M$:

$$452) \quad T = \frac{MR^2}{2}.$$

Die auf den Drehungshalbmesser ϱ reducirte Masse der Scheibe findet man durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke:

$$453) \quad \mu \varrho^2 = \frac{MR^2}{2}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varrho = R$, so erhält man für die auf den Halbmesser R (oder die auf den Umfang) reducirte Masse der Scheibe den Werth:

$$454) \quad \mu = \frac{M}{2}.$$

Wenn man dagegen $\mu = M$ setzt in Gleichung 453), so ergiebt sich als Trägheitshalbmesser der Scheibe:

$$455) \quad \varrho = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Die hier gefundenen Gleichungen gelten nicht nur für eine unendlich dünne Scheibe, sondern auch für einen Cylinder von beliebiger Länge, da ein solcher als Aggregat von unendlich dünnen Scheiben aufzufassen, und das Trägheitsmoment desselben durch Summation der Trägheitsmomente dieser Scheiben zu bestimmen ist.

Um das Trägheitsmoment eines Hohlcylinders vom inneren Halbmesser r und äusseren Halbmesser R zu bestimmen, hat man denselben als Differenz zweier Cylinder zu behandeln und demgemäss das Trägheitsmoment des inneren fehlenden Cylinders von dem des ganzen Cylinders zu subtrahiren. Nach Gleichung 448) ist die Differenz der beiden Massen oder die Masse des Hohlcylinders:

$$456)\quad M = \gamma\pi\,(R^2 - r^2)$$

und für das Trägheitsmoment desselben erhält man nach Gleichung 451) die Gleichung:

$$457)\quad T = \gamma\pi\left(\frac{R^4 - r^4}{2}\right),$$

welche durch die vorhergehende dividirt die Form annimmt:

$$458)\quad \frac{T}{M} = \frac{R^2 + r^2}{2},\ \text{oder:}\ T = M\left(\frac{R^2 + r^2}{2}\right).$$

Geradlinige Stange.

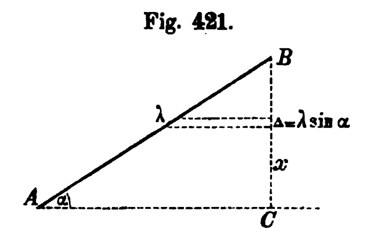
Wenn eine Masse stetig und gleichförmig über eine gerade Linie vertheilt ist in der Weise, dass auf jede Längeneinheit derselben die Masse γ kommt, so ist die ganze in der Länge $AB = L$ enthaltene Masse:

$$459)\quad M = \gamma L.$$

Das Trägheitsmoment eines in der Entfernung x von der Drehachse befindlichen in dem unendlich kleinen Linien-Abschnitte λ enthaltenen Massentheils $m = \gamma\lambda$ in Bezug auf die Drehachse AC ist:

$$m x^2 = \gamma\lambda x^2$$

Fig. 421.



oder, da nach Fig. 421 statt λ auch $\frac{\Delta}{\sin\alpha}$ gesetzt werden kann:

$$m x^2 = \gamma\,\frac{\Delta}{\sin\alpha}\,x^2.$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Stange AB ist gleich der Summe der auf analoge Weise für die Trägheitsmomente aller unendlich kleinen Abschnitte zu bildenden Ausdrücke zu setzen, also:

$$460)\quad T = \frac{\gamma}{\sin\alpha}\,\Sigma(x^2\Delta).$$

Zur Bestimmung des Ausdruckes $\Sigma(x^2\Delta)$ hat man sich die ganze Länge $BC = R$ in die unendlich kleinen Abschnitte Δ

zerlegt zu denken, dann für x der Reihe nach die zwischen den Grenzen 0 und R liegenden Vielfachen von Δ zu substituiren, und nachher die auf solche Weise gebildeten Producte $x^2 \Delta$ zu summiren. Um sich diese Producten-Summe geometrisch zu veranschaulichen, kann man dieselbe als Inhalt der in Fig. 420 dargestellten Pyramide (oder auch als Momenten-Summe der die Projection jener Pyramide darstellenden dreieckigen Fläche) auffassen, und findet alsdann $\Sigma(x^2 \Delta) = \frac{R^3}{3}$*), oder da $R = L \sin \alpha$ ist:

$$461) \quad \Sigma(x^2 \Delta) = \frac{(L \sin \alpha)^3}{3}.$$

Nach Substitution dieses Werthes erhält man aus Gleichung 460):

$$462) \quad T = \gamma L \frac{(L \sin \alpha)^2}{3},$$

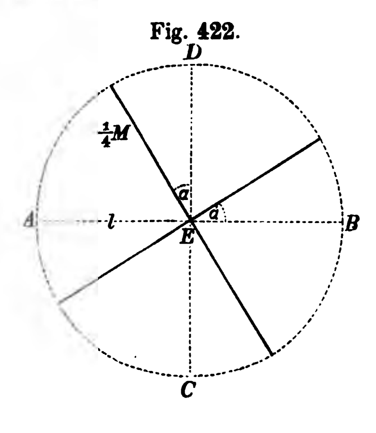
oder, da nach Gleichung 459) $\gamma L = M$ gesetzt werden kann:

$$463) \quad T = \frac{M (L \sin \alpha)^2}{3}.$$

Für den Trägheitshalbmesser der um die Drehachse AC rotirenden Stange ergiebt sich demnach der Werth:

$$464) \quad \varrho = \frac{L \sin \alpha}{\sqrt{3}},$$

Fig. 422.



und die auf den Drehungshalbmesser $R = L \sin \alpha$ (oder auf den Endpunkt B) reducirte Masse der Stange ist:

$$465) \quad \mu = \frac{M}{3}.$$

Für den Fall, dass die Stange mit der Drehachse einen rechten Winkel einschliesst, ist $\sin \alpha = 1$ zu setzen, ergeben sich also die Gleichungen:

$$466) \quad T = \frac{ML^2}{3}, \qquad 467) \quad \varrho = \frac{L}{\sqrt{3}},$$

---

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integralrechnung würde diese Gleichung die Form erhalten:

$$\int_0^R x^2 \, dx = \frac{R^3}{3}.$$

während die auf den Endpunkt reducirte Masse der Stange nach Gleichung 465) auch in diesem Falle ein Drittel der wirklichen Masse beträgt.

Hiernach erhält man für das Trägheits-Moment des in Fig. 422 dargestellten aus zwei geradlinigen Stangen gebildeten Kreuzes in Bezug auf die Achse AB oder CD die Gleichung:

$$468)\quad T = \frac{2\left(\frac{1}{4}M\right) l^2 (\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2)}{3} = \frac{M l^2}{6},$$

welche zeigt, dass dasselbe unabhängig ist von der Grösse des Winkels α oder von der Lage des Kreuzes in Bezug auf die in der Ebene desselben durch den Kreuzpunkt E gelegte Drehachse.

Rechteckige Platte.

Die vorletzten drei Gleichungen bleiben auch für den Fall noch gültig, wenn die parallel zur Drehachse gerichtete Dimension der Stange — statt unendlich klein zu sein — die beliebige Grösse b hat; d. h. sie gelten auch für eine rechteckige Platte (Fig. 423), deren Drehachse mit der einen Seite AB des Rechtecks zusammenfällt: insofern eine solche Platte in unendlich schmale rechtwinkelig zur Drehachse gerichtete Streifen sich zerlegen lässt, deren jeder wie eine rechtwinkelig zur Drehachse gerichtete Stange behandelt werden kann. Wenn für diesen Fall mit dem Buchstaben γ die in der Flächen-Einheit enthaltene Masse bezeichnet wird, so ist die ganze Masse der Platte $M = \gamma b L$ zu setzen, und nach Gleichung 466) kann dem Ausdrucke für das Trägheitsmoment auch die Form gegeben werden:

Fig. 423.

$$469)\quad T = \gamma \frac{b L^3}{3}.$$

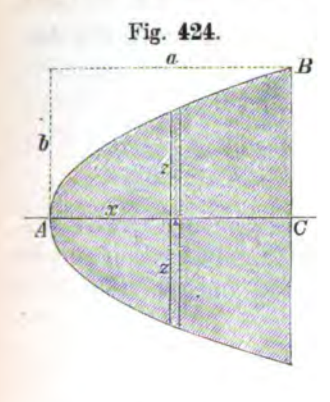
Rotationskörper.

Denkt man sich den in Fig. 424 im Durchschnitt dargestellten Rotationskörper durch rechtwinkelig zur Drehachse gelegte Ebenen in kreisförmige Scheiben von der unendlich kleinen Dicke Δ zerlegt, so erhält man für die Masse einer solchen Scheibe vom Halb-

messer z — wenn mit γ die in der Cubikeinheit enthaltene Masse bezeichnet wird — den Ausdruck:

$$m = \gamma z^2 \pi \Delta$$

Fig. 424.



und das Trägheitsmoment dieser Scheibe in Bezug auf die Rotations-Achse AC ist nach Gleichung 452):

$$\frac{m z^2}{2} = \frac{\gamma \pi}{2} z^4 \Delta.$$

Hiernach ergeben sich resp. für Masse und Trägheitsmoment des ganzen Körpers die allgemeinen Gleichungen:

$$470)\quad M = \gamma \pi \Sigma (z^2 \Delta).$$

$$471)\quad T = \frac{\gamma \pi}{2} \Sigma (z^4 \Delta).$$

Paraboloid.

Wenn die Begrenzungslinie AB der erzeugenden Fläche eine Parabel ist, deren Achse mit der Umdrehungs-Achse zusammenfällt, so ist nach Fig. 424 zu setzen:

$$\frac{z^2}{b^2} = \frac{x}{a}$$

und nach Substitution des hieraus für z^2 sich ergebenden Werthes nehmen die Gleichungen 470) und 471) die Formen an:

$$M = \frac{\gamma \pi b^2}{a} \Sigma (x \Delta) \quad \text{und} \quad T = \frac{\gamma \pi b^4}{2 a^2} \Sigma (x^2 \Delta).$$

Hierin ist $\Sigma (x \Delta) = \frac{a^2}{2}$ zu setzen (als Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie und Höhe gleich a sind) und $\Sigma (x^2 \Delta) = \frac{a^3}{3}$ (als Momenten-Summe eines solchen Dreiecks). Nach Substitution dieser Werthe ergeben sich resp. für Masse und Trägheitsmoment des Paraboloids die Gleichungen:

$$472)\quad M = \frac{\gamma \pi a b^2}{2}, \qquad 473)\quad T = \frac{\gamma \pi a b^4}{6},$$

deren letztere durch erstere dividirt die Form annimmt:

$$474)\quad \frac{T}{M} = \frac{b^2}{3}, \quad \text{oder:} \quad T = \frac{M b^2}{3}.$$

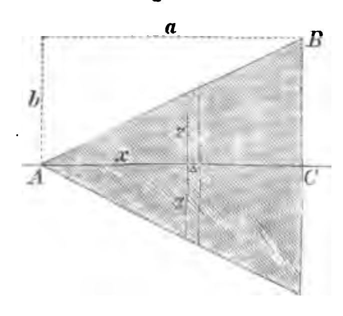
Kegel.

Wenn die erzeugende Fläche ABC die Form eines rechtwinkligen Dreiecks hat, so ist nach Fig. 425:

$$\frac{z}{x} = \frac{b}{a}, \quad \text{oder:} \quad z = \frac{b}{a} x.$$

zu setzen, und man erhält nach Gleichung 471):

Fig. 425.



475) $T = \frac{\gamma \pi b^4}{2 a^4} \Sigma(x^4 \Delta) = \frac{\gamma \pi a b^4}{10}$ *)

oder, wenn das Trägheitsmoment des Kegels durch die Masse desselben $M = \frac{1}{3} \gamma \pi a b^2$ ausgedrückt werden soll:

476) $T = \frac{3}{10} \cdot M b^2.$

Kugel.

Wenn die Begrenzungslinie AB der erzeugenden Fläche ein Kreisbogen ist, dessen Mittelpunkt in der Umdrehungs-Achse liegt, so ist nach Fig. 426 zu setzen:

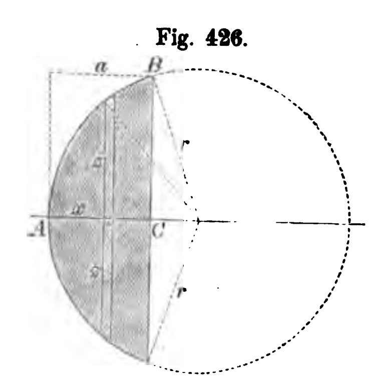
$$z^2 = 2 r x - x^2,$$

und man erhält nach Gleichung 471) als Trägheitsmoment des Kugel-Segments:

$$T = \frac{\gamma \pi}{2} \Sigma[(4 r^2 x^2 - 4 r x^3 + x^4) \Delta], \text{ oder:}$$

$$T = \frac{\gamma \pi}{2} [4 r^2 \Sigma(x^2 \Delta) - 4 r \Sigma(x^3 \Delta) + \Sigma(x^4 \Delta)].$$

Fig. 426.



Hierin ist $\Sigma(x^2 \Delta) = \frac{a^3}{3}$, $\Sigma(x^3 \Delta) = \frac{a^4}{4}$, $\Sigma(x^4 \Delta) = \frac{a^5}{5}$ zu setzen, also ist:

477) $T = \frac{\gamma \pi}{30} (20 r^2 a^3 - 15 r a^4 + 3 a^5).$

Setzt man in dieser Gleichung $a = r$, so erhält man als Trägheitsmoment der Halbkugel:

478) $T = \frac{4}{15} \gamma \pi r^5,$

und wenn man $a = 2r$ setzt, so erhält man als Trägheitsmoment der ganzen Kugel:

$$T = \frac{8}{15} \gamma \pi r^5,$$

oder, wenn die Masse der ganzen Kugel $\gamma \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi = M$ gesetzt wird:

479) $T = \frac{2}{5} M r^2.$

Die auf den Halbmesser r reducirte Masse der Kugel ist also:

480) $\mu = \frac{2}{5} M.$

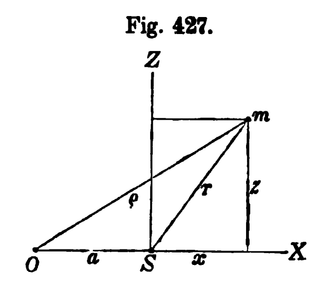
---

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integralrechnung ist:

$$\Sigma(x^4 \Delta) = \int_0^a x^4 dx = \frac{a^5}{5}.$$

Nach der in Fig. 427 gewählten Bezeichnung erhält man für das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf die rechtwinkelig zur Bildfläche gerichtete Achse O einen Ausdruck von der Form:

Fig. 427.



481) $T = \Sigma (m \varrho^2)$

und das Trägheitsmoment in Bezug auf eine parallel zu dieser Achse durch den Schwerpunkt S gelegte Achse ist:

482) $T_s = \Sigma (m r^2)$.

Nach Fig. 427 ist $r^2 = x^2 + z^2$ und $\varrho^2 = (x + a)^2 + z^2 = x^2 + z^2 + a^2 + 2ax = r^2 + a^2 + 2ax$ zu setzen; man erhält also nach Gleichung 481):

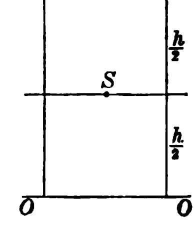
$$T = \Sigma (m r^2) + a^2 \Sigma (m) + 2 a \Sigma (m x).$$

Von den drei Gliedern auf der rechten Seite ist nach Gleichung 482) das erste Glied $\Sigma (m r^2) = T_s$ zu setzen; das zweite Glied ist gleich Ma^2, wenn mit M die ganze Masse des Körpers bezeichnet wird; das dritte Glied ist gleich Null, weil nach der Lehre vom Schwerpunkte $\Sigma (m x) = 0$ ist. Hiernach erhält man für das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse O die Gleichung:

483) $T = T_s + Ma^2$.

Um das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf irgend eine ausserhalb des Schwerpunktes liegende Achse zu bestimmen, hat man zu dem Trägheitsmomente in Bezug auf die parallele Schwerpunkts-Achse das Product aus der Masse in das Quadrat der Entfernung der beiden Achsen zu addiren.

Fig. 428.



Wenn man die Gleichung 483) für T_s auflöst, so erhält man:

484) $T_s = T - Ma^2$.

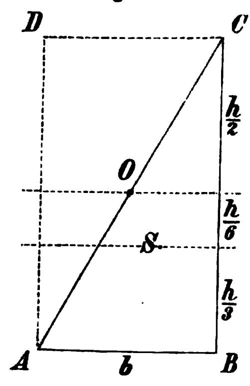
Es kann also der obige Satz auch in der umgekehrten Form zur Bestimmung des Trägheitsmomentes T_s benutzt werden, sobald das Trägheitsmoment T in Bezug auf eine parallele ausserhalb des Schwerpunktes liegende Achse bekannt ist.

Nach Gleichung 469) ist z. B. für eine rechteckige Platte das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse O (Fig. 428):

$$T = \frac{\gamma b h^3}{3}.$$

Man erhält also aus Gleichung 484), wenn darin ausserdem $M = \gamma b h$ und $a = \frac{h}{2}$ substituirt wird, als Trägheitsmoment in Bezug auf die parallel zur Achse O durch den Schwerpunkt gelegte Achse:

Fig. 429.



$$485)\quad T = \frac{\gamma b h^3}{3} - \frac{\gamma b h^3}{4} = \frac{\gamma b h^3}{12}.$$

Das Trägheitsmoment der dreieckigen Platte ABC (Fig. 429) in Bezug auf die durch den Punkt O parallel zur Grundlinie gelegte Achse ist halb so gross als das der ganzen rechteckigen Platte $ABCD$ in Bezug auf dieselbe Achse und hat die Grösse:

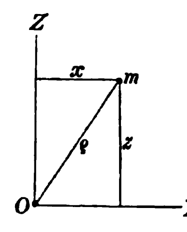
$$T = \frac{\gamma b h^3}{24}.$$

Das Trägheitsmoment der dreieckigen Platte in Bezug auf die der vorigen parallele durch den Schwerpunkt S gelegte Achse hat also nach obigem Satze die Grösse:

$$T_s = \frac{\gamma b h^3}{24} - \frac{\gamma b h}{2}\left(\frac{h}{6}\right)^2, \text{ oder: } T_s = \frac{\gamma b h^3}{36}.$$

Nach der in Fig. 430 gewählten Bezeichnung ergiebt sich für das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf die rechtwinkelig zur Bildfläche stehende Achse O der Ausdruck:

Fig. 430.



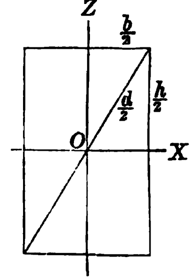
$$T = \Sigma(m\varrho^2) = \Sigma[m(x^2 + z^2)]$$
$$= \Sigma(mx^2) + \Sigma(mz^2).$$

In dem speciellen Falle, wenn der Körper die Form einer ebenen unendlich dünnen Platte hat, bilden die beiden Theile:

$$\Sigma(mx^2) = T_z \quad \text{und} \quad \Sigma(mz^2) = T_x$$

resp. die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die in der Bildfläche liegenden Achsen OZ und OX. Wenn also diese beiden Trägheitsmomente bekannt sind, so kann das Trägheitsmoment in Bezug auf die im Durchschnittspunkte der beiden Achsen rechtwinkelig zur Bildfläche stehende Achse O bestimmt werden aus der Gleichung:

Fig. 431.



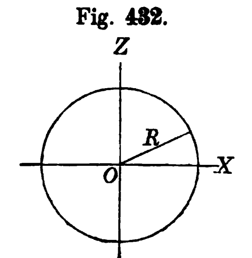
$$486)\quad T = T_z + T_x.$$

Für die in Fig. 431 dargestellte rechteckige Platte ist z. B. zu setzen (nach Gleichung 485):

$$T_x = \frac{\gamma b h^3}{12} \quad \text{und} \quad T_z = \frac{\gamma h b^3}{12}, \text{ also:}$$

$$487)\quad T = \frac{\gamma b h}{12}(h^2 + b^2) = \frac{M d^2}{12}.$$

Fig. 432.



Für die kreisförmige Platte Fig. 432 ist $T_x = T_z$ zu setzen, folglich:

$$T = 2 T_x \quad \text{oder} \quad T_x = \frac{T}{2},$$

und nach Substitution des aus Gleichung 451) für T zu entnehmenden Werthes erhält man die Gleichung:

$$488) \quad T_x = \frac{\gamma \pi R^4}{4} = \frac{M R^2}{4}.$$

§ 110.

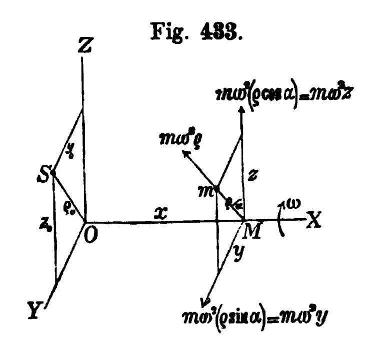
Gleichförmige Drehbewegung. Wirkung der Centrifugal-Kräfte.

Die nach dem d'Alembert'schen Principe (§ 107) zu den wirklich vorhandenen Kräften noch hinzuzufügenden fingirten Kräfte können nach der im § 37 gegebenen Erklärung abkürzungsweise die „Trägheitswiderstände" der einzelnen materiellen Punkte genannt werden; es kann daher jenem Principe auch die kürzere Form gegeben werden: „Die Trägheitswiderstände der einzelnen materiellen Punkte halten den wirklich vorhandenen Kräften das Gleichgewicht." Bei einem in gleichförmiger Drehbewegung begriffenen Körper bestehen diese Trägheitswiderstände — wie in § 83 und § 38 bereits erklärt wurde — lediglich in den Centrifugalkräften. Es müssen daher bei einem gleichförmig um eine feste Achse sich drehenden Körper die wirklich vorhandenen Kräfte — zu denen auch diejenigen Widerstandskräfte gehören, durch welche die Drehachse in unveränderlicher Lage erhalten wird — den Centrifugal-Kräften der einzelnen materiellen Punkte das Gleichgewicht halten.

Wenn mit ω die Drehgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet wird, so hat (nach § 38) die Centrifugal-Kraft eines in der Entfernung ϱ von der Drehachse befindlichen materiellen Punktes von der Masse m die Grösse $m\omega^2\varrho$. Diese Kraft ist als eine in der Richtung des Drehungshalbmessers nach aussen wirkende Kraft anzusehen; als ihr Angriffspunkt kann statt des Punktes m auch der Punkt M angesehen werden, in welchem ihre Richtungslinie die Drehachse schneidet (Fig. 433). Um die Gesammtwirkung aller einzelnen Centrifugal-Kräfte zu bestimmen, hat man sich ein rechtwinkeliges Coordinaten-System XYZ durch den Körper in der Weise gelegt zu denken, dass der Schwerpunkt S des Körpers in die Ebene OYZ, und die Drehachse des Körpers in die Achse OX fällt. Die Centrifugal-Kraft $m\omega^2\varrho$ ist alsdann auf die in der

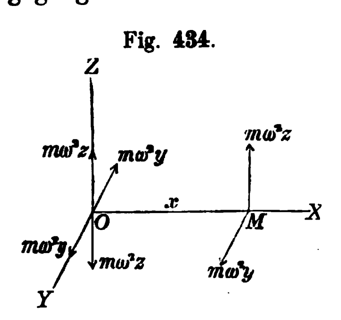
Figur angedeutete Weise in die beiden Seitenkräfte $m\omega^2 y$ und $m\omega^2 z$ zu zerlegen, und in gleicher Weise ist mit den Centrifugal-Kräften der übrigen materiellen Punkte zu verfahren. Man erhält dadurch zwei Gruppen von Kräften, deren Angriffspunkte sämmtlich in der Drehachse OX liegen: die eine Gruppe besteht aus Kräften, welche sämmtlich der Achse OY parallel sind, die andere Gruppe aus Kräften, welche sämmtlich der Achse OZ parallel sind.

Fig. 433.



Mit diesen Kräften ist alsdann auf gleiche Weise zu verfahren, wie in § 43 bei Ableitung der allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen geschehen. Ohne Etwas in der Wirkung der Kraft $m\omega^2 y$ zu ändern, kann man in dem Punkte O die beiden entgegengesetzten Kräfte $m\omega^2 y$ hinzufügen (Fig. 434); man erhält dadurch statt der einen Kraft $m\omega^2 y$ drei solcher Kräfte, von denen zwei ein Kräftepaar bilden, dessen Moment gleich $m\omega^2 yx$, und dessen Drehachse mit der Z-Achse zusammenfällt, während die dritte Kraft eine in dem Punkte O wirkende Einzelkraft bildet. Auf gleiche Weise erhält man durch Hinzufügung der beiden entgegengesetzten Kräfte $m\omega^2 z$ in dem Punkte O ein Kräftepaar vom Momente $m\omega^2 zx$, dessen Drehachse mit der Y-Achse zusammenfällt, und ausserdem eine in dem Punkte O wirkende Einzelkraft $m\omega^2 z$ in der Richtung der Z-Achse. Wenn man auf dieselbe Weise mit allen übrigen Centrifugal-Kräften verfährt, so erhält man zwei Gruppen von Kräftepaaren und zwei Gruppen von Einzelkräften. Jede der beiden Gruppen von Kräftepaaren kann durch das resultirende Kräftepaar ersetzt werden, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der einzelnen Momente ist, und jede der beiden Gruppen von Einzelkräften kann durch deren Mittelkraft ersetzt werden, welche gleich der algebraischen Summe der einzelnen Kräfte ist. Als Gesammtwirkung der Centrifugal-Kräfte ergeben sich alsdann die vier Kraft-

Fig. 434.



wirkungen, welche in Fig. 435 ihrer Art und Grösse nach angegeben sind.

Die beiden in dem Punkte O angreifenden Einzelkräfte Y und Z können durch die Mittelkraft R ersetzt werden, deren Richtung zu bestimmen ist aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{Z}{Y} = \frac{\omega^2 \Sigma(m z)}{\omega^2 \Sigma(m y)}.$$

Fig. 435.

Wenn mit M die ganze Masse des Körpers bezeichnet wird, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkt zu setzen $\Sigma(m z) = M z_0$ und $\Sigma(m y) = M y_0$, folglich ist:

$$489) \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{z_0}{y_0}.$$

Hieraus folgt, dass der Winkel ε gleich dem Winkel SOY (Fig. 433) ist, dass also die Richtungslinie der Kraft R durch den Schwerpunkt des Körpers hindurchgeht und dass als Angriffspunkt der Kraft R der Schwerpunkt des Körpers angesehen werden kann. Für die Grösse der Mittelkraft R erhält man die Gleichung:

$$R = \sqrt{Y^2 + Z^2} = M\omega^2 \sqrt{y_0^2 + z_0^2},$$

oder, da $\sqrt{y_0^2 + z_0^2} = \varrho_0$ gesetzt werden kann (nach Fig. 433):

$$490) \quad R = M \varrho_0 \omega^2.$$

Auf dieselbe Weise kann auch das Resultirende von den beiden Kräftepaaren bestimmt werden. Wenn man nach den in § 42 gefundenen Regeln die beiden Kräftepaare durch ihre Achsen geometrisch darstellt und mit diesen Achsen:

$$491) \quad \mathfrak{M}_y = \omega^2 \Sigma(m z x), \qquad 492) \quad \mathfrak{M}_z = \omega^2 \Sigma(m y x),$$

auf gleiche Weise wie vorher mit den Einzelkräften Y und Z verfährt, so erhält man als Moment des resultirenden Kräftepaares:

$$493) \quad \mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}.$$

Die Achse desselben liegt in der YZ-Ebene, steht also rechtwinkelig zur Drehachse des Körpers, und der Winkel, den dieselbe mit einer der Achsen OY oder OZ einschliesst, kann auf dieselbe Weise wie oben der Winkel ε bestimmt werden.

Die Gesammtwirkung der Centrifugal-Kräfte besteht also in folgenden zwei Kraftwirkungen:

Erstens, in einer Einzelkraft R, welche ihrer Grösse, Richtung und Lage nach genau auf dieselbe Weise zu bestimmen ist, wie wenn die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkte vereinigt wäre.

Zweitens, in einem Kräftepaare, dessen Achse rechtwinkelig zur Drehachse des Körpers steht und im Uebrigen von den Werthen der beiden Producten-Summen $\Sigma(mzx)$ und $\Sigma(myx)$, also von der Art der Massenvertheilung abhängt.

§ 111.

Freie Achsen.

Die beiden im vorigen Paragraphen gefundenen Wirkungen der Centrifugal-Kräfte werden in jedem Augenblicke aufgehoben von den Widerständen, durch welche die Drehachse des Körpers in unveränderlicher Lage erhalten wird. Es bestehen daher — wenn sonst keine Kräfte weiter auf den rotirenden Körper wirken — diese Widerstände in einer Einzelkraft, welche der Kraft R gleich und entgegengesetzt ist, und einem Kräftepaare, dessen Moment dem Momente $\mathfrak{M}$ gleich und entgegengesetzt ist. In dem speciellen Falle, wenn jede dieser beiden Kraftwirkungen für sich gleich Null ist, wenn die Centrifugal-Kräfte also für sich allein schon einander im Gleichgewicht halten: wird die Drehachse des Körpers eine freie Achse genannt. In diesem Falle bedarf es gar keiner Widerstandskräfte, um die Drehachse in ihrer Lage zu erhalten, und würde die Drehachse ihre Lage auch dann nicht ändern, wenn der rotirende Körper frei im Raume schwebte.

Die zwei Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, wenn die Drehachse OX (Fig. 433) eine freie Achse sein soll, sind also:

$$494) \quad R = 0. \qquad 495) \quad \mathfrak{M} = 0.$$

Die erste von diesen beiden Bedingungen nimmt, wenn aus Gleichung 490) der Werth für R substituirt wird, die Form an:

$$M\varrho_0\omega^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \varrho_0 = 0.$$

Es kann also die Drehachse nur dann eine freie Achse sein, wenn der Schwerpunkt des Körpers in der Drehachse liegt.

Die andere Bedingung zerfällt nach Gleichung 493) in die beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\mathfrak{M}_y = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_z = 0,$$

welche nach Substitution der in den Gleichungen 491) und 492) gefundenen Werthe die Formen annehmen:

$$496) \quad \Sigma(mzx) = 0 \quad \text{und} \quad 497) \quad \Sigma(myx) = 0.$$

Diese letzteren beiden Bedingungen sind z. B. dann erfüllt, wenn die Masse des Körpers in Bezug auf die Ebene YZ symmetrisch vertheilt ist in der Weise, dass irgend einem Massentheilchen m im Abstande $+x$ von dieser Ebene immer ein anderes gleich grosses im Abstande $-x$ gegenüberliegt (Fig. 436). Denn die von diesen beiden Massentheilchen zu der Producten-Summe $\Sigma(mzx)$ gelieferten Beiträge sind alsdann resp. $m.z.(+x)$ und $m.z.(-x)$, heben also einander auf; und die von diesen beiden Massentheilchen zu dem Ausdruck $\Sigma(myx)$ gelieferten Beiträge sind resp. $m.y.(+x)$ und $m.y.(-x)$, heben also ebenfalls einander auf. Dasselbe gilt von den Beiträgen, welche von den übrigen Massentheilchen paarweise zu jedem dieser beiden Ausdrücke geliefert werden. Bei jedem homogenen prismatischen Körper ist daher eine die Schwerpunkte der Endflächen verbindende gerade Linie allemal eine freie Achse. Ebenso ist bei einem Körper von der Form einer unendlich dünnen ebenen Platte die rechtwinkelig zur Ebene desselben durch den Schwerpunkt gelegte gerade Linie SX immer eine freie Achse, weil in diesem Falle der Factor x in allen Gliedern jener beiden Producten-Summen gleich Null ist.

Fig. 436.

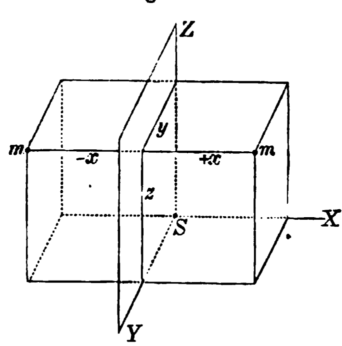
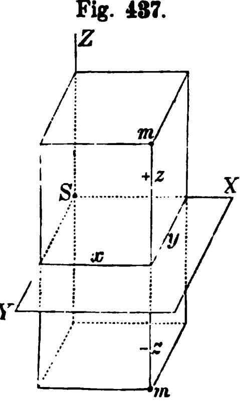


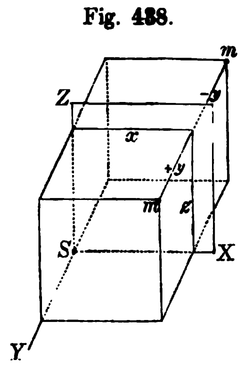
Fig. 437.



Ein anderer Fall, in welchem jene beiden Bedingungen erfüllt sind, ist derjenige, in welchem g l e i c h z e i t i g jede von den beiden Ebenen YX und ZX eine Symmetrie-Ebene des Körpers ist. Denn wenn die Masse desselben in Bezug auf die Ebene YX symmetrisch vertheilt ist (Fig. 437), so liegt jedem Massentheilchen m, welches zu Gleichung 496) den Beitrag $m.(+z).x$ liefert, ein anderes gleich grosses Massentheilchen gegenüber, welches zu diesem Ausdrucke den gleich grossen negativen Beitrag $m.(-z).x$ liefert; und wenn die Masse des

Körpers gleichzeitig in Bezug auf die Ebene ZX symmetrisch vertheilt ist (Fig. 438), so entspricht einem Massentheilchen m, welches zu Gleichung 497) den Beitrag $m \,.\, (+y) \,.\, x$ liefert, immer irgend ein anderes, welches den gleich grossen negativen Beitrag $m \,.\, (-y) \,.\, x$ zu dieser Producten-Summe liefert. Hieraus folgt z. B., dass bei einem homogenen Rotationskörper die Rotationsachse immer eine freie Achse ist.

Fig. 438.



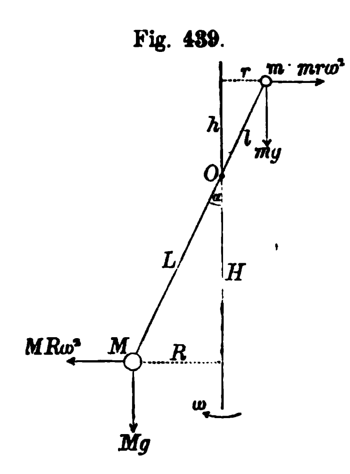
Mittelst höherer Rechnungen lässt sich nachweisen, dass es in jedem Körper ohne Ausnahme — wie auch immer die Form und Massenvertheilung beschaffen sein möge — immer drei freie Achsen giebt, welche im Schwerpunkte desselben einander rechtwinkelig schneiden. In jedem Körper kann also ein rechtwinkeliges Coordinaten-System so gelegt werden, dass jede von den drei Achsen desselben gleichzeitig die Eigenschaften einer freien Achse besitzt.

§ 112.

Zusammengesetztes Centrifugal-Pendel.

Ein aus zwei materiellen Punkten zusammengesetztes Centrifugal-Pendel (Fig. 439) kann man sich annäherungsweise dadurch hergestellt denken, dass zwei kleine schwere Kugeln an den Endpunkten einer leichten geradlinigen Stange befestigt sind, welche ihrerseits, an der Drehbewegung einer verticalen Welle theilnehmend, in irgend einem Punkte O der Drehachse so befestigt ist, dass sie zugleich in verticaler Ebene um diesen Punkt sich drehen kann. Um den Neigungswinkel α zu bestimmen, bei welchem die Kugelstange in ihrer relativen Gleichgewichtslage sich befindet, hat man nach Hinzufügung der beiden Centrifugal-Kräfte die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte in Bezug auf den festen Drehpunkt O gleich Null zu setzen und erhält nach Fig. 439 die Gleichung:

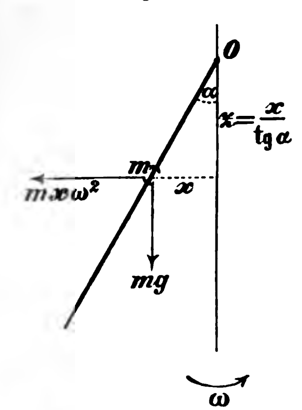
Fig. 439.



$$0 = m r \omega^2 h + m g r + M R \omega^2 H - M g R.$$

Wenn man in dieser Gleichung die Werthe substituirt: $r = l \sin\alpha$, $h = l \cos\alpha$, $R = L \sin\alpha$, $H = L \cos\alpha$, so erhält man nach Auflösung der Gleichung für $\cos\alpha$ den Werth:

Fig. 440.

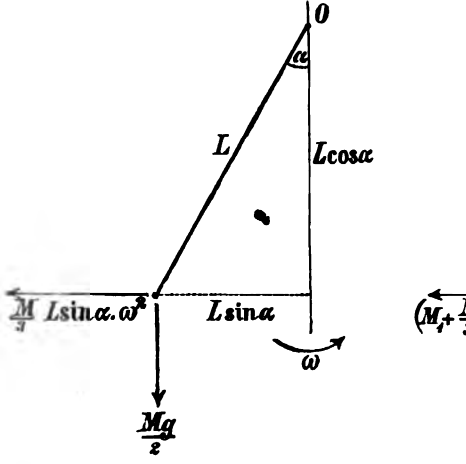


$$498)\quad \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2}\left(\frac{ML - ml}{ML^2 + ml^2}\right).$$

Wenn $ML = ml$ ist, d. h. wenn der Schwerpunkt mit dem Drehpunkte zusammenfällt, so wird $\cos\alpha = 0$, also $\alpha = 90^\circ$. In diesem Falle würde die relative Gleichgewichtslage der Kugelstange mit der horizontalen Lage zusammenfallen, und die verticale Drehachse alsdann eine freie Achse derselben bilden. Bei abweichender Lage würden die beiden Centrifugal-Kräfte ein Kräftepaar bilden, welches auf horizontale Einstellung der Kugelstange hinwirkt.

Bei dem in Fig. 440 dargestellten Centrifugal-Pendel, bestehend aus einer geradlinigen Stange, welche in ihrem oberen Endpunkte O an der verticalen Drehachse aufgehängt ist, hat die Summe der statischen Momente der Centrifugal-Kräfte in Bezug auf den Drehpunkt O die Grösse:

Fig. 441. Fig. 442.



$$\mathfrak{M} = \Sigma\,(m x \omega^2 \,.\, z) = \frac{\omega^2}{\operatorname{tg}\alpha}\,\Sigma\,(m x^2).$$

Hierin bedeutet $\Sigma\,(m x^2)$ das Trägheitsmoment der Stange in Bezug

auf die Drehachse, und nach Substitution des in § 109 für dasselbe gefundenen Ausdrucks erhält man die Gleichung:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{3} \cdot L \sin\alpha \, . \, \omega^2 \, . \, L \cos\alpha,$$

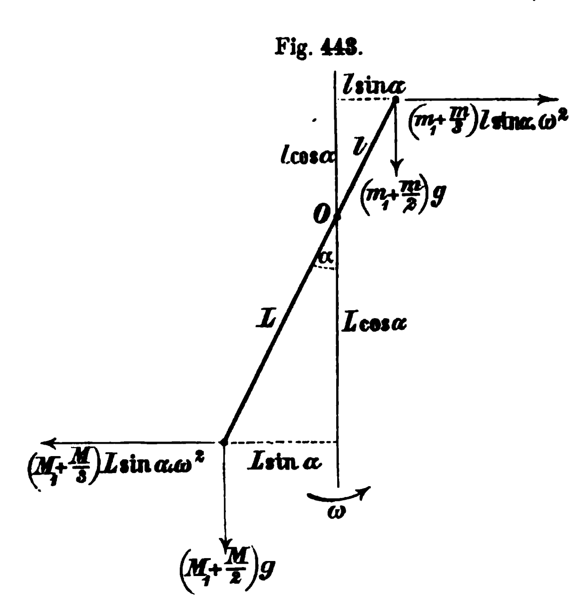


Fig. 443.

welche zeigt, dass die Centrifugal-Kräfte gerade so wirken, wie wenn im unteren Endpunkte der Stange die Masse $\frac{M}{3}$ concentrirt wäre.

Wenn die Stange im relativen Gleichgewichte sich befinden soll, so muss die Summe der statischen Momente der Gewichte ebenfalls gleich $\mathfrak{M}$ sein; folglich ist:

$$\mathfrak{M} = \Sigma (m g x) = \frac{M g L \sin\alpha}{2}.$$

Die Wirkungen der Centrifugal-Kräfte und des Gewichtes kann man sich hiernach auf die in Fig. 441 angegebene Weise veranschaulichen, und durch Gleichsetzung der beiden statischen Momente erhält man die Gleichung:

$$499) \quad \frac{M}{3} \cdot L \sin\alpha \, . \, \omega^2 \, . \, L \cos\alpha = \frac{M g}{2} \cdot L \sin\alpha, \quad \text{oder:}$$

$$500) \quad \cos\alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L \omega^2}.$$

Für den Fall, dass am unteren Endpunkte der Stange noch eine Kugel von der Masse M_1 befestigt ist, deren Durchmesser so klein ist, dass dieselbe als materieller Punkt behandelt werden darf, erhält man auf gleiche Weise nach Fig. 442 die Gleichung:

$$\left(M_1 + \frac{M}{3}\right) L \sin\alpha \, . \, \omega^2 \, . \, L \cos\alpha = \left(M_1 + \frac{M}{2}\right) g L \sin\alpha, \quad \text{oder:}$$

$$501)\quad \cos\alpha = \frac{g}{L\,\omega^2}\left(\frac{M_1 + \frac{M}{2}}{M_1 + \frac{M}{3}}\right).$$

Auf analoge Weise erhält man für eine über den Drehpunkt O hinaus um die Länge l verlängerte Stange, an deren beiden Endpunkten resp. die Massen M_1 und m_1 befestigt sind, nach Fig. 443 die Gleichung:

$$\left(M_1+\frac{M}{3}\right) L \sin\alpha \,.\, \omega^2 \,.\, L \cos\alpha + \left(m_1+\frac{m}{3}\right) l \sin\alpha \,.\, \omega^2 \,.\, l \cos\alpha$$

$$= \left(M_1+\frac{M}{2}\right) g \,.\, L \sin\alpha - \left(m_1+\frac{m}{2}\right) g \,.\, l \sin\alpha, \quad \text{oder:}$$

$$502)\quad \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2}\left\{\frac{\left(M_1+\frac{M}{2}\right) L - \left(m_1+\frac{m}{2}\right) l}{\left(M_1+\frac{M}{3}\right) L^2 + \left(m_1+\frac{m}{3}\right) l^2}\right\}.$$

ACHTZEHNTES CAPITEL.

Ungleichförmige Drehung eines Körpers um eine feste Drehachse.

§ 113.

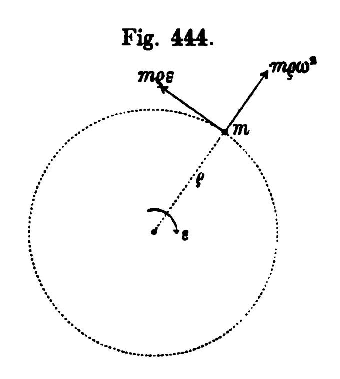
Winkelbeschleunigung.

Die im zweiten Capitel in Bezug auf die geradlinig fortschreitende Bewegung gegebenen Erklärungen der Begriffe „Geschwindigkeit und Beschleunigung", so wie der „gleichförmig beschleunigten" und der „ungleichförmig beschleunigten Bewegung" können unmittelbar auf die Drehung eines Körpers um eine feste Drehachse übertragen werden, sobald in jenen Erklärungen an Stelle der betreffenden Längen-Grössen, welche für die fortschreitende Bewegung als Maass dienten, überall die in analoger Weise als Maass für die Drehbewegung zu benutzenden Winkel-Grössen eingeführt werden.

Die Drehbewegung wird eine gleichförmig beschleunigte genannt, wenn die Winkelgeschwindigkeit in gleichen Zeiten

um gleiche Grössen zunimmt. Die Winkelgrösse, um welche bei einer solchen gleichförmig beschleunigten Drehbewegung die Winkelgeschwindigkeit in jeder Zeiteinheit zunimmt, wird die Winkelbeschleunigung genannt. Während ein Körper mit der constanten Winkelbeschleunigung ε sich dreht, durchläuft irgend ein in der Entfernung ϱ von der Drehachse befindliches Massentheilchen m in gleichförmig beschleunigter Bewegung den Umfang eines Kreises vom Halbmesser ϱ, und seine Peripherie-Geschwindigkeit nimmt in jeder Zeiteinheit um die Grösse $\varrho\varepsilon$ zu. In dem Augenblicke, wo die Winkelgeschwindigkeit des Körpers die Grösse ω erreicht hat, setzt sich die totale Beschleunigung jenes Massentheilchens zusammen aus der in die Richtung des Halbmessers fallenden nach innen gerichteten Centripetal-Beschleunigung $\varrho\omega^2$ und der tangential gerichteten Peripherie-Beschleunigung $\varrho\varepsilon$. Der gesammte Trägheitswiderstand des Massentheilchens besteht also in diesem Augenblicke aus der nach aussen gerichteten Centrifugal-Kraft $m\varrho\omega^2$ und aus einer tangentialen Seitenkraft $m\varrho\varepsilon$, welche der Bewegung des Massentheilchens entgegengerichtet ist (Fig. 444).

Fig. 444.

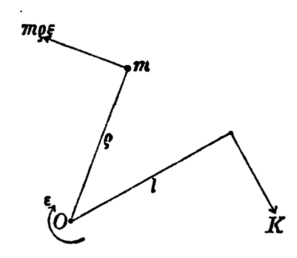


Bei der ungleichförmig beschleunigten Drehbewegung ist sowohl die Winkelgeschwindigkeit als auch die Winkelbeschleunigung in stetiger Aenderung begriffen. Denkt man sich die ganze Dauer einer solchen Bewegung in ihre unendlich kleinen Theile zerlegt, so kann innerhalb eines jeden solchen Zeittheils die Bewegung wie eine gleichförmig beschleunigte behandelt werden. Wenn es sich also bei einer solchen Bewegung darum handelt, die Trägheitswiderstände der einzelnen Massentheilchen für einen bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen, so ist diese Bestimmung genau auf dieselbe Weise wie bei der gleichförmig beschleunigten Drehbewegung auszuführen.

Nach dem d'Alembert'schen Principe bilden in jedem bestimmten Zeitpunkte die Trägheitswiderstände der einzelnen materiellen Punkte mit den wirklich vorhandenen Kräften zusammen ein Kräfte-System, welches den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen

entspricht. Wenn von den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen ausschliesslich diejenige angewendet wird, welche die statischen Momente der Kräfte in Bezug auf die Drehachse betrifft, so können sowohl die Widerstandskräfte, durch welche die Drehachse in unveränderlicher Lage erhalten wird, als auch die Centrifugal-Kräfte der einzelnen materiellen Punkte unberücksichtigt gelassen werden, insofern deren statische Momente sämmtlich gleich Null sind. In Bezug auf die Drehung des Körpers um die feste Drehachse müssen daher die tangentialen Seitenkräfte der Trägheitswiderstände für sich allein den wirklich vorhandenen äusseren Kräften das Gleichgewicht halten. Wenn also abkürzungsweise das statische Moment Kl irgend einer dieser äusseren Kräfte in Bezug auf die Drehachse mit „$\mathfrak{m}$" bezeichnet wird, und mit $\Sigma(\mathfrak{m})$ die algebraische Summe aller dieser statischen Momente (im Sinne der hervorgebrachten Winkelbeschleunigung ε summirt), so nimmt die betreffende Gleichgewichts-Bedingung (nach Fig. 445) die Form an:

Fig. 445.



$$0 = \Sigma(\mathfrak{m}) - \Sigma(m\varrho\varepsilon \,.\, \varrho).$$

Die Grösse ε bildet einen gemeinschaftlichen Factor der Trägheitswiderstands-Momente aller einzelnen materiellen Punkte und kann deshalb vor das Summationszeichen gesetzt werden, es ist also:

$$\varepsilon\,\Sigma(m\varrho^2) = \Sigma(\mathfrak{m}).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für die von den äusseren Kräften hervorgebrachte Winkelbeschleunigung der Werth:

$$503)\quad \varepsilon = \frac{\Sigma(\mathfrak{m})}{\Sigma(m\varrho^2)}.$$

Wenn die im Zähler dieses Bruches stehende Momenten-Summe der beschleunigenden Kräfte mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet und abkürzungsweise „Kraft-Moment" genannt wird; wenn ferner der im Nenner stehende Ausdruck als das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse O (wie früher geschehen) mit T bezeichnet wird, so nimmt die obige Gleichung die einfachere Form an:

$$504)\quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{T},\ \text{oder:}$$

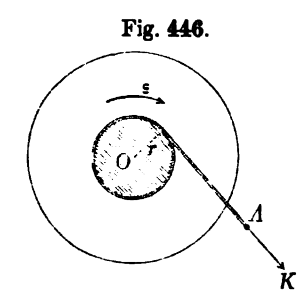
$$\text{Winkelbeschleunigung} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}}.$$

§ 114.

Beschleunigte Drehung einer Radwelle.

Aus dem im vorigen Paragraphen gefundenen allgemeinen Lehrsatze ergiebt sich für die Winkelbeschleunigung, welche durch die am Endpunkte eines um die Welle gewickelten Fadens in tangentialer Richtung wirkende Kraft K der Welle ertheilt wird, nach Fig. 446 die Gleichung:

Fig. 446.



$$\varepsilon = \frac{Kr}{T},$$

in welcher T das Trägheitsmoment der ganzen rotirenden Masse in Bezug auf die Drehachse O bezeichnet. Die Beschleunigung p, mit welcher der Angriffspunkt der Kraft K in der Richtung derselben sich bewegt, ist gleich der Peripherie-Beschleunigung der Welle; also ist:

$$p = r\,\varepsilon = \frac{Kr^2}{T}.$$

Nach Gleichung 447) kann $T = \mu \,.\, r^2$ gesetzt werden, wenn mit μ die auf den Halbmesser r reducirte Masse der ganzen Radwelle bezeichnet wird; man erhält dann die Gleichung:

$$505)\quad p = \frac{K}{\mu},$$

welche zeigt, dass die Beschleunigung des Angriffspunktes A (oder die Peripherie-Beschleunigung der Welle) auf dieselbe Weise wie die eines einfachen materiellen Punktes zu bestimmen ist, sobald statt der wirklichen Masse die auf den Hebelarm der Kraft K reducirte Masse der Welle substituirt wird.

Wenn unter Einwirkung der Kraft K die Winkelgeschwindigkeit von der Grösse ω bis auf die Grösse w zunimmt, und die während dieser Zunahme von der Kraft K verrichtete mechanische Arbeit mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet wird, so ergiebt sich aus der Anwendung des Princips der lebendigen Kraft die Gleichung:

$$506)\quad \frac{Tw^2}{2} - \frac{T\omega^2}{2} = \mathfrak{A},$$

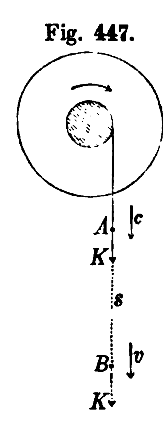
und wenn die den Winkelgeschwindigkeiten ω und w entsprechenden Peripherie-Geschwindigkeiten der Welle resp. mit c und v

bezeichnet werden, so ist $T\omega^2 = \mu r^2 \omega^2 = \mu c^2$ und $Tw^2 = \mu r^2 w^2 = \mu v^2$ zu setzen: man erhält also die Gleichung:

$$507)\quad \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu c^2}{2} = \mathfrak{A},$$

welche ebenfalls zeigt, dass der Punkt A (oder irgend ein Punkt im Umfange der Welle) sich bewegt wie ein einfacher materieller Punkt, dessen Masse μ gleich der auf den Umfang reducirten Masse der Welle ist.

Fig. 447.



Für den Fall, dass während der Bewegung des Angriffspunktes von A nach B die Grösse der Kraft K sich nicht ändert, ist (nach Fig. 447) zu setzen $\mathfrak{A} = Ks$, also:

$$508)\quad \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu c^2}{2} = Ks.$$

Alle diese Gleichungen sind auch für den Fall gültig, in welchem die Kraft K der Drehbewegung entgegen wirkt; es ist nur erforderlich, für diesen Fall sowohl das statische Moment, als auch die mechanische Arbeit derselben als negative Grössen in Rechnung zu bringen. Die Bewegung der Welle ist in diesem Falle eine verzögerte, und es ergeben sich negative Werthe sowohl für die Beschleunigung, als auch für die Zunahme an lebendiger Kraft.

Um z. B. die Zahl der Umläufe zu berechnen, welche eine sich selbst überlassene anfangs mit der Umfangsgeschwindigkeit c umlaufende Welle vom Gewichte Mg noch ausführt bis zu dem Augenblicke, wo die Bewegung durch die verzögernde Wirkung des am Hebelarme r angreifenden Zapfenreibungswiderstandes fMg zum Stillstande gebracht ist, hat man die Endgeschwindigkeit v gleich Null zu setzen in Gleichung 508) und erhält für die von einem Punkte des Zapfenumfanges noch zurückgelegte Strecke s die Gleichung:

$$0 - \frac{\mu c^2}{2} = -fMgs, \quad \text{oder:} \quad s = \frac{\mu}{M} \cdot \frac{c^2}{2fg},$$

woraus sich für die gesuchte Umlaufszahl n der Werth ergiebt:

$$n = \frac{s}{2r\pi} = \frac{\mu}{M} \cdot \frac{c^2}{4fgr\pi}.$$

Die constante (negative) Peripherie-Beschleunigung des Zapfenumfanges hat nach Gleichung 505) die Grösse:

$$p = -fg\frac{M}{\mu}.$$

Wenn die rotirende Masse in einer einfachen cylindrischen Scheibe vom Halbmesser R bestände, so würde nach Gleichung 452):

$$T = \frac{MR^2}{2} = \mu r^2, \text{ also: } \mu = \frac{M}{2}\frac{R^2}{r^2}$$

zu setzen sein, und es würden unter gleichen Umständen für n und p resp. die Werthe sich ergeben:

$$n = \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{c^2}{4fgr\pi}, \quad p = -2fg\frac{r^2}{R^2}.$$

Setzt man hierin z. B. $R = 1^m$, $r = 0^m{,}02$, $c = 0^m{,}12$, $f = 0{,}08$, so erhält man:

$$n = 91{,}3 \quad \text{und} \quad p = -0^m{,}000\,628.$$

§ 115.

Fall-Maschine.

Wenn die mittelst des Fadens auf den rotirenden Körper übertragene beschleunigende Tangential-Kraft K durch das Gewicht einer unten am Faden hängenden Masse M hervorgebracht wird (Fig. 448), so ist bei Berechnung der Beschleunigung zu berücksichtigen, dass in diesem Falle jene Tangential-Kraft — zugleich die Spannung des Fadens — kleiner ist als das Gewicht Mg, insofern der Aufhängepunkt des Fadens mit vertical abwärts gerichteter Beschleunigung sich bewegt (§ 37). Die Masse M sinkt mit einer Beschleunigung p, welche gleich der Peripherie-Beschleunigung des rotirenden Körpers ist, und der Ueberschuss der Kraft Mg über die Kraft K ist es, welcher diese Beschleunigung hervorbringt; also ist:

Fig. 448.

K

M

p

Mg

$$509) \quad p = \frac{Mg - K}{M}, \text{ oder: } K = M(g - p).$$

Wenn man diesen Werth für K in Gleichung 505) substituirt, so erhält man (bei Vernachlässigung des Zapfenreibungs-Widerstandes) die Gleichung:

$$p = \frac{K}{\mu} = \frac{M(g-p)}{\mu}, \text{ oder:}$$

$$510) \quad p = \frac{Mg}{M + \mu}.$$

Die Beschleunigung des Fadens (oder die Peripherie-Beschleunigung des rotirenden Körpers) ist also auf dieselbe Weise zu bestimmen wie die Beschleunigung, welche einem einfachen mate-

riellen Punkte von der Masse $M + \mu$ ertheilt werden würde durch eine Kraft von der Grösse Mg.

Wenn der rotirende Körper in einer einfachen cylindrischen Scheibe besteht, und mit M_1 die wirkliche Masse der Scheibe bezeichnet wird, so ist die auf den Umfang reducirte Masse $\mu = \frac{1}{2} M_1$ zu setzen, und es wird:

$$p = \frac{Mg}{M + \frac{1}{2} M_1}.$$

Bei dem in Fig. 449 dargestellten Falle ist die an der linken Seite wirkende Tangential-Kraft k zu bestimmen aus der Gleichung:

$$511) \quad \frac{k - mg}{m} = p, \quad \text{oder:} \quad k = m(g + p);$$

Fig. 449.

und die Peripherie-Beschleunigung des rotirenden Körpers aus der Gleichung:

$$p = \frac{K - k}{\mu},$$

welche nach Substitution der für K und k gefundenen Werthe die Form annimmt:

$$p = \frac{M(g - p) - m(g + p)}{\mu}.$$

Aus der Auflösung dieser Gleichung ergiebt sich für p der Werth:

$$512) \quad p = \frac{Mg - mg}{M + m + \mu}.$$

Die Beschleunigung, mit welcher die schwerere Masse M sinkt, und die leichtere Masse m steigt, ist also auf dieselbe Weise zu bestimmen, wie die Beschleunigung, welche einem einfachen materiellen Punkte von der Masse $M + m + \mu$ ertheilt werden würde durch den Ueberschuss des Gewichtes Mg über das Gewicht mg.

Wenn z. B. $m = 2$ Kil., $M = 2{,}1$ Kil. ist, und der rotirende Körper eine cylindrische Scheibe ist von der Masse $M_1 = 0{,}8$ Kil., so ist die auf den Umfang reducirte Masse der letzteren: $\mu = 0{,}4$ Kil. zu setzen, und man erhält aus Gleichung 512):

$$\frac{p}{g} = \frac{2{,}1 - 2}{2{,}1 + 2 + 0{,}4} = \frac{1}{45}, \quad \text{oder:} \quad p = 0^{m}{,}218.$$

Je kleiner die Massendifferenz $M - m$ im Verhältniss zur ganzen durch den Gewichts-Ueberschuss zu beschleunigenden Massen-Summe $M + m + \mu$ ist, um so kleiner ist die Beschleunigung, mit welcher die schwerere Masse sinkt, und um so leichter wird diese Beschleunigung durch directe Beobach-

tung sich bestimmen lassen. Es kann daher die Gleichung 512) auch in umgekehrter Weise zur Berechnung der Beschleunigung g des freien Falles benutzt werden, wenn die Beschleunigung p mittelst des in Fig. **449** dargestellten Apparates durch directe Beobachtung zuvor bestimmt wurde.

§ 116.

Wirkung der Schwungräder.

Wenn die Drehbewegung einer Welle unter Einwirkung zweier Kräfte K und W geschieht, von denen die erstere im Sinne der Drehbewegung als fördernde Kraft wirkend das veränderliche statische Moment $\mathfrak{M}_k$ hat, und die letztere als Widerstand der Drehung entgegenwirkend das veränderliche statische Moment $\mathfrak{M}_w$ hat, so ist nach Gleichung 504) die in irgend einem Zeitpunkte stattfindende Winkelbeschleunigung:

$$513)\quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_w}{T}.$$

Je nachdem die Differenz zwischen Kraft-Moment und Widerstands-Moment in diesem Zeitpunkte einen positiven oder negativen Werth hat, ist die Drehgeschwindigkeit der Welle im Wachsen oder im Abnehmen begriffen.

Wenn die Veränderlichkeit dieser beiden Momente von periodischer Gesetzmässigkeit ist, d. h. wenn nach Ablauf einer bestimmten Periode allemal dieselben Werthe der Reihe nach wiederkehren, so wird auch die Drehgeschwindigkeit der Welle in jeder dieser Perioden um eine und dieselbe Grösse entweder zunehmen oder abnehmen. Diese Aenderung wird gleich Null sein in dem speciellen Falle, wenn die in jeder Periode von Kraft und Widerstand zusammen genommen verrichtete Arbeitssumme gleich Null ist. Wenn also nach Ablauf jeder Periode zugleich dieselben Bewegungszustände der Reihe nach wiederkehren sollen, so muss in jeder Periode die von dem Widerstande verrichtete Arbeit ihrem absoluten Werthe nach gleich der von der Kraft verrichteten Arbeit sein.

Angenommen, dass in solchem Falle die Periode aus zwei Zeitabschnitten besteht, in deren ersterem beständig das Kraftmoment, in deren letzterem beständig das Widerstandsmoment das grössere von beiden ist: so wird während des ersteren Abschnitts die Drehgeschwindigkeit beständig zunehmen, und während des zweiten um eben so viel wieder abnehmen. Die Drehgeschwindigkeit erreicht ihren grössten Werth in dem Augenblicke, wo das

Wachsen aufhört und das Abnehmen wieder beginnt; den kleinsten Werth in dem Augenblicke, wo das Abnehmen aufhört und das Zunehmen wieder beginnt. Nach dem Principe der lebendigen Kraft ist die während des Ueberganges der Winkelgeschwindigkeit aus dem kleinsten Werthe ω in den grössesten Werth Ω erfolgende Zunahme der lebendigen Kraft gleich der algebraischen Summe der in dieser Zeit von den beiden Kräften K und W verrichteten mechanischen Arbeiten zu setzen. Wenn also die von der treibenden Kraft K in diesem Abschnitte verrichtete positive Arbeit mit $\mathfrak{A}_k$, und die von dem Widerstande W verrichtete negative Arbeit ihrem absoluten Werthe nach mit $\mathfrak{A}_w$ bezeichnet wird, so ist:

$$514)\quad \frac{T\Omega^2}{2} - \frac{T\omega^2}{2} = \mathfrak{A}_k - \mathfrak{A}_w.$$

Dem Ausdruck auf der linken Seite kann auch die Form gegeben werden:

$$T\frac{(\Omega + \omega)}{2}(\Omega - \omega),$$

und wenn abkürzungsweise $\frac{\Omega + \omega}{2} = \theta$ und $\frac{\theta}{\Omega - \omega} = n$ gesetzt wird, so nimmt die obige Gleichung für T aufgelöst die Form an:

$$515)\quad T = \frac{n}{\theta^2}(\mathfrak{A}_k - \mathfrak{A}_w).$$

Die Grösse θ als das arithmetische Mittel der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit kann die mittlere Geschwindigkeit genannt werden; die Zahl n, welche angiebt, den wievielten Theil von dieser mittleren Geschwindigkeit die grösste Geschwindigkeits-Differenz beträgt, bezeichnet den Grad der Gleichförmigkeit der Bewegung. Die Gleichung 515) zeigt also, wie gross das Trägheitsmoment der Welle mindestens sein muss, wenn die Schwankungen der Drehgeschwindigkeit einen gewissen Bruchtheil der mittleren Geschwindigkeit nicht übersteigen sollen, oder wenn die Drehbewegung einen gewissen, durch die Zahl n näher bestimmten Grad von Gleichförmigkeit besitzen soll.

In solchen Fällen, wo das Trägheitsmoment der Welle für sich allein die erforderliche Grösse nicht besitzt, kann durch Hinzufügung einer fremden, mit der Welle zu verbindenden Masse das Fehlende ergänzt werden. Diese hinzugefügte Masse wird einen um so grösseren Betrag zum Trägheitsmoment liefern, je grösser die Entfernung derselben von der Drehachse ist. Es ist

also hinsichtlich des Material-Aufwandes am vortheilhaftesten, diese Masse in Form eines an der Welle befestigten Schwung-Ringes von grossem Halbmesser zu verwenden. Die Gleichung 515) kann daher auch zur Berechnung der zur Erreichung eines vorgeschriebenen Gleichförmigkeits-Grades erforderlichen Masse des Schwungrades benutzt werden.

Berechnung des Schwungrades für eine Kurbelwelle.

Es soll angenommen werden, dass die treibende Kraft K mit unveränderter Intensität beständig in verticaler Richtung auf den Endpunkt des Kurbelarmes wirkt, beim Niedergange desselben abwärts, beim Aufgange aufwärts; ferner, dass der Widerstand W wie eine constante Tangential-Kraft an einem um den Kurbelkreis sich aufwickelnden Faden wirkt. Das statische Moment des Widerstandes hat also nach Fig. 450 die constante Grösse Wr; das statische Moment der Triebkraft dagegen ändert sich mit dem Stellungswinkel der Kurbel und zwar in der Weise, dass nach einer halben Umdrehung der Kurbel allemal dieselben Werthe periodisch wiederkehren. Während des Niederganges der Kurbel verrichtet die Kraft K die mechanische Arbeit $+ K . \overline{AC}$ oder $+ K . 2r$, und die Kraft W die mechanische Arbeit $- W . r\pi$. Die gleichen Werthe ergeben sich für die während einer halben Umdrehung von beiden Kräften verrichteten Arbeitsgrössen auch dann, wenn irgend eine Zwischenstellung OB als Anfangsstellung für die halbe Umdrehung gewählt wird. Die Gleichung:

Fig. 450.

$$516)\quad K . 2r = W . r\pi, \quad \text{oder:} \quad K = \frac{\pi}{2} W$$

enthält also die Bedingung, welche erfüllt sein muss, wenn die Drehgeschwindigkeit der Welle jedesmal am Ende einer halben Umdrehung wieder eben so gross, wie zu Anfang derselben sein soll.

Um diejenige Kurbel-Stellung OB zu finden, bei welcher die Winkelbeschleunigung Null ist, setzt man die statischen Momente

von Kraft und Widerstand einander gleich und erhält nach Fig. 450 die Gleichung:

$$K \,.\, r \cos \alpha = Wr.$$

Nach Substitution des für K in Gleichung 516) gefundenen Werthes erhält man hieraus für den betreffenden Stellungswinkel α die Gleichung:

$$517)\quad \cos \alpha = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366, \quad \text{oder:} \quad \alpha = 0{,}8807.$$

Wenn man von der Stellung OB als Anfangsstellung ausgehend die Bewegung der Kurbel weiter verfolgt, so findet man, dass während des Ueberganges aus der Lage OB in die Lage OD beständig das Kraft-Moment das grössere von den beiden Momenten ist; während des Ueberganges aus der Stellung OD in die Stellung OE dagegen beständig das Widerstands-Moment (Fig. 451).

Fig. 451.

Die Winkelbeschleunigung ist daher während Zurücklegung des Bogens $\widehat{BD}$ positiv, während Zurücklegung des Bogens $\widehat{DE}$ dagegen negativ. Dieselben Verhältnisse wiederholen sich während der zweiten Hälfte der vollen Umdrehung. Den kleinsten Werth ω erreicht die Winkelgeschwindigkeit bei der Stellung OB (ebenso bei der Stellung OE auf der anderen Seite), und den grössten Werth Ω bei der Stellung OD (ebenso bei der Stellung OF auf der anderen Seite).

Die in Gleichung 514) mit $\mathfrak{A}_k$ bezeichnete Grösse bedeutet also hier die mechanische Arbeit, welche beim Uebergange aus der Stellung OB in die Stellung OD von der Kraft K verrichtet wird, und ist:

$$\mathfrak{A}_k = K \,.\, \overline{BD} = K \,.\, 2r \sin \alpha = \frac{\pi}{2}\, W \,.\, 2r \sin \alpha.$$

Der Angriffspunkt des Widerstandes W legt während dieser Bewegung die Länge des Bogens $\widehat{BD}$ zurück; also ist:

$$\mathfrak{A}_w = W \,.\, 2r\alpha.$$

Nach Substitution dieser Werthe nimmt die Gleichung 515) die Form an:

$$T = \frac{n}{\theta^2} Wr(\pi \sin \alpha - 2\alpha),$$

und wenn hierin für α der in Gleichung 517) gefundene Werth substituirt wird, so ergiebt sich für T der Werth:

$$518) \quad T = 0{,}661 \cdot \frac{n}{\theta^2} \cdot Wr.$$

Wenn M die Masse, Q das Gewicht, R der Halbmesser des Schwungringes ist, und das Trägheitsmoment der Welle selbst (so wie der sonstigen mit der Welle umlaufenden Masse) klein genug ist, um gegen das Trägheitsmoment des Schwungringes vernachlässigt werden zu können, so ist $T = MR^2 = \frac{Q}{g} R^2$ zu setzen; und man erhält für das erforderliche Gewicht des Schwungringes die Gleichung:

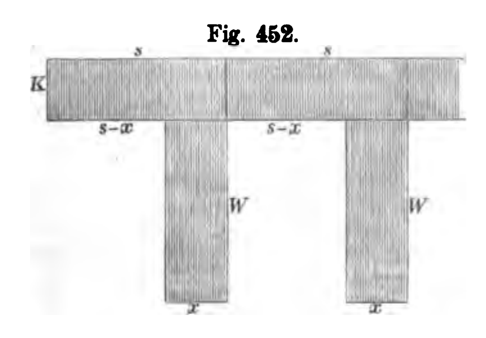
$$519) \quad Q = 0{,}661 \cdot \frac{ng}{R^2 \theta^2} \cdot Wr.$$

Sollen z. B. die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit den dreissigsten Theil der mittleren Winkelgeschwindigkeit nicht überschreiten, so ist $n = 30$ zu setzen; und wenn die Welle in jeder Minute 60 Umläufe macht, so ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit (pro Secunde) $\theta = 2\pi$ zu setzen. Wenn ferner die Länge des Kurbelarmes $r = 0^m{,}3$, der Schwungrad-Halbmesser $R = 1^m{,}5$ und der auf den Halbmesser des Kurbelkreises reducirte Arbeitswiderstand $W = 1000$ Kil. beträgt, so ist das erforderliche Gewicht des Schwungringes:

$$Q = 0{,}661 \cdot \frac{30 \,.\, 9{,}81}{(1{,}5 \,.\, 2\pi)^2} \cdot 1000 \,.\, 0{,}3 = 657 \text{ Kil.}$$

Wenn die treibende Kraft K beständig rechtwinkelig zu dem Kurbelarme gerichtet ist — also nicht nur die Grösse, sondern auch das statische Moment derselben constant ist — wenn ferner der gleichfalls tangential am Kurbelkreise wirkende Widerstand W periodisch auftritt, und während einer jeden Wirkungsperiode beständig dieselbe Grösse behält, so ergeben sich als graphische Darstellungen der von diesen beiden Kräften verrichteten mechanischen Arbeiten die in Fig. 452 dargestellten Rechteckflächen, und es drückt die Gleichung:

Fig. 452.



$$520) \quad 0 = Ks - Wx, \quad \text{oder:} \quad Ks = Wx$$

die Bedingung aus, welche erfüllt sein muss, wenn am Ende einer jeden Periode die lebendige Kraft der Welle stets wieder denselben Werth annehmen soll.

Während des ersten Theiles der Periode ist die Kraft K allein thätig, und für die während dieses Theiles hervorgebrachte Zunahme an lebendiger Kraft ergiebt sich, wenn die auf den Kurbelkreis reducirte Masse der Welle mit μ bezeichnet wird, die Gleichung:

$$\frac{\mu V^2}{2} - \frac{\mu v^2}{2} = K(s - x).$$

Setzt man die mittlere Peripheriegeschwindigkeit $\frac{V+v}{2} = c$ und die grösste Geschwindigkeitsdifferenz $V - v = \frac{c}{n}$, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\frac{\mu c^2}{n} = K(s - x),$$

und wenn man das Gewicht der reducirten Masse $\mu g = Q$, ferner die der mittleren Geschwindigkeit c entsprechende Fallhöhe $\frac{c^2}{2g} = h$ setzt, so erhält man für das dem vorgeschriebenen Gleichförmigkeitsgrade n entsprechende erforderliche Gewicht Q die Gleichung:

$$521) \quad \frac{Q}{K} = \frac{n}{2}\frac{s}{h}\left(1 - \frac{x}{s}\right).$$

Wenn z. B. die Grössen $\frac{x}{s} = 0{,}1$, $n = 4$, $s = 2^m{,}5$ und $h = 0^m{,}025$ (entsprechend der Geschwindigkeit $c = 0^m{,}7$) gegeben sind, so ergiebt sich aus dieser Gleichung der Werth: $\frac{Q}{K} = 180$. Es müsste also, wenn die treibende Kraft die Grösse $K = 10$ Kil. hat (entsprechend nach Gleichung 520) dem Widerstande $W = K\frac{s}{x} = 100$ Kil.), die auf den Kurbelhalbmesser $r = \frac{s}{2\pi} = 0^m{,}4$ reducirte Masse μ ein Gewicht von 1800 Kil. haben.

Ebenso gross müsste, wenn das Trägheitsmoment der Welle und sonstiger Theile gegen das des Schwungradringes vernachlässigt werden darf, das Gewicht dieses Schwungringes sein, falls derselbe den Halbmesser $r = 0^m{,}4$ erhielte. Wenn man dagegen dem Schwungrade den Halbmesser $r_1 = 3r$ gäbe, so würde das Gewicht $Q_1 = Q\frac{r^2}{r_1^2} = 200$ Kil. schon ausreichen, um zu bewirken, dass die grösste Geschwindigkeitsdifferenz nicht mehr als ein Viertel der mittleren Geschwindigkeit beträgt.

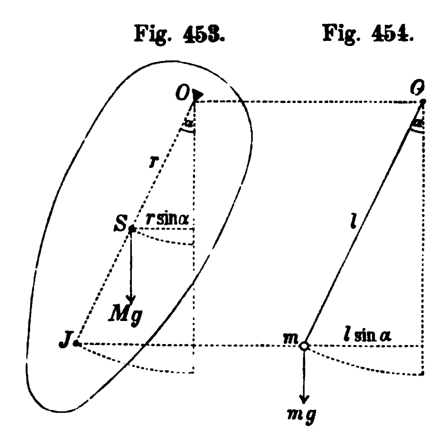
§ 117.

Schwingungsdauer des physicalischen Pendels.

Im Gegensatze zu dem in § 34 definirten einfachen (mathematischen) Pendel ist jedes wirklich darstellbare (physicalische) Pendel als ein zusammengesetztes Pendel anzusehen, insofern ein solches immer aus mehreren (unter einander und mit der Drehachse) verbundenen materiellen Punkten besteht, also ein Aggregat von ebenso vielen einfachen Pendeln bildet, deren Schwingungen einander wechselseitig bedingen und zu gemeinschaftlicher Schwingungsdauer ausgleichen.

Man bestimmt die Schwingungsdauer eines gegebenen physicalischen Pendels, indem man die Länge desjenigen einfachen Pendels aufsucht, dessen Schwingungsbewegung mit der des gegebenen Pendels in jeder Beziehung übereinstimmt, folglich auch dieselbe Dauer haben würde. Um die Bedingungen dieser Uebereinstimmung zu finden, denkt man sich beide Pendel neben einander hängend, und beide mit gleichem Elongationswinkel (d. h. mit gleichem Abweichungswinkel von ihrer Gleichgewichtslage) gleichzeitig ihre Schwingungen beginnend. Zur vollkommenen Uebereinstimmung der beiden Bewegungen ist alsdann erforderlich, dass auch in jedem später folgenden Zeitpunkte die beiden Pendel stets gleiche Elongationswinkel und gleiche Bewegungszustände haben. Es müssen also bei gleichen Elongationswinkeln sowohl die Winkelgeschwindigkeiten als auch die Winkelbeschleunigungen der beiden Pendel stets gleiche Grösse haben.

Fig. 453. Fig. 454.



Bei dem Elongationswinkel α ist die Winkelbeschleunigung des in Fig. 453 dargestellten physicalischen Pendels nach Gleichung 504):

$$\varepsilon = \frac{Mgr \sin\alpha}{T_0},$$

worin T_0 das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die horizontale Drehachse O bedeutet. Bei demselben Elongationswinkel α

ist die Winkelbeschleunigung des in Fig. 454 dargestellten einfachen Pendels von gleicher Schwingungsdauer:

$$\varepsilon = \frac{m g l \sin \alpha}{m l^2} = \frac{g \sin \alpha}{l}.$$

Aus der Gleichsetzung dieser beiden Winkelbeschleunigungen ergiebt sich für die gesuchte Länge l des letzteren der Werth:

$$522) \quad l = \frac{T_0}{M r}.$$

Nach Substitution dieses für l gefundenen Werthes lässt sich nunmehr die Schwingungsdauer des physicalischen Pendels (für kleine Schwingungswinkel) unmittelbar aus Gleichung 93) bestimmen.

Der Punkt J, welchen man erhält, indem man den Drehungshalbmesser des Schwerpunktes verlängert und auf dieser Richtungslinie die Länge l von der Drehachse aus abträgt, wird der Schwingungspunkt des physicalischen Pendels genannt. Unter allen materiellen Punkten, welche auf jener Linie sich befinden, ist der mit dem Schwingungspunkte zusammenfallende der einzige, dessen Bewegung durch seine Verbindung mit den übrigen materiellen Punkten nicht gestört wird, dessen Schwingungen vielmehr genau in derselben Weise geschehen, wie wenn die ganze Masse des Körpers in ihm vereinigt wäre.

§ 118.

Reversionspendel.

Wenn das in Fig. 455 dargestellte Pendel in umgekehrter Lage aufgehängt, und statt der früheren Drehachse O die parallele durch den früheren Schwingungspunkt J gelegte gerade Linie als Drehachse gewählt wird, so entsteht das neue Pendel Fig. 456, dessen Schwingungspunkt wiederum nach den im vorigen Paragraphen gefundenen Regeln bestimmt werden kann.

Die Länge l_1 desjenigen einfachen Pendels, welches mit diesem neuen Pendel gleiche Schwingungsdauer hat, findet man aus Gleichung 522), indem man darin $l - r$ statt r, und das Trägheitsmoment T_1 (in Bezug auf die neue Drehachse J) statt des Trägheitsmomentes T_0 substituirt. Es ist also:

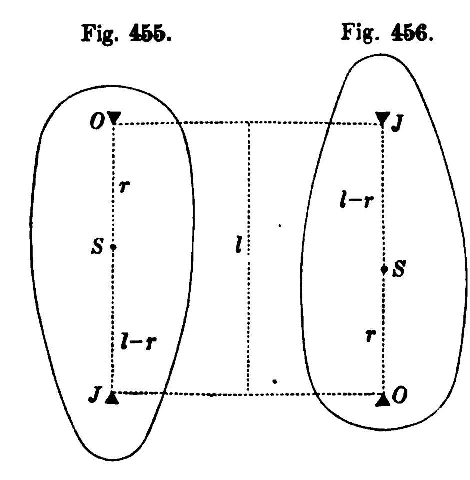
$$l_1 = \frac{T_1}{M(l - r)}.$$

Wenn mit T_s das Trägheitsmoment in Bezug auf die parallele durch den Schwerpunkt S gelegte Achse bezeichnet wird, so kann nach dem in § 109 (Gleichung 483) gefundenen Satze $T_1 = T_s + M(l - r)^2$ gesetzt werden, und nach Substitution dieses Werthes erhält man die Gleichung:

$$523) \quad l_1 = \frac{T_s}{M(l - r)} + l - r.$$

Setzt man in Gleichung 522) für T_0 ebenfalls seinen Werth durch T_s ausgedrückt, nämlich $T_0 = T_s + Mr^2$, so nimmt jene Gleichung die Form an:

Fig. 455. Fig. 456.



$$524) \quad l = \frac{T_s}{Mr} + r,$$

oder:

$$M(l - r) = \frac{T_s}{r}.$$

Wenn man den letzteren Werth für $M(l - r)$ in Gleichung 523) substituirt, so erhält man:

$$525) \quad l_1 = l.$$

Hieraus folgt, dass bei der in Fig. 456 dargestellten Aufhängungsart der Schwingungspunkt zusammenfällt mit demjenigen Punkte, welcher bei der in Fig. 455 dargestellten Lage den Aufhängepunkt bildete. Es kann also bei jedem Pendel der Aufhängepunkt mit dem Schwingungspunkte vertauscht werden, ohne dass die Schwingungsdauer dadurch geändert wird.

Zugleich ergiebt sich hieraus ein Mittel, bei der experimentellen Bestimmung der Länge des mathematischen Pendels von bestimmter Schwingungsdauer die wirkliche Benutzung eines solchen (bekanntlich nur annäherungsweise darstellbaren) mathematischen Pendels ganz zu umgehen. Wenn man nämlich nach Beobachtung der Schwingungsdauer des im Punkte O aufgehängten Körpers auf dem Wege des Experimentes denjenigen (unterhalb des Schwerpunktes in der Linie OS liegenden) Punkt J aufsucht, welcher als Aufhängepunkt gewählt werden muss, um wiederum dieselbe Schwingungsdauer zu ergeben, so ist die Entfernung OJ gleich der gesuchten Länge des mathematischen Pendels von jener

Schwingungsdauer. Ein zu solchem Zwecke passend zugerichteter Körper wird ein Reversionspendel genannt.

Jedoch ist bei dieser Anwendung des Reversionspendels zu berücksichtigen, dass es unterhalb des Schwerpunktes ausser dem Schwingungspunkte J noch einen zweiten Punkt O_1 giebt, welcher als Aufhängepunkt gewählt ebenfalls dieselbe Schwingungsdauer ergeben würde; und zwar ist dies derjenige Punkt, welcher dem ersten Aufhängepunkte symmetrisch gegenüberliegt. Denn nach Gleichung 524) hängt bei einem und demselben Körper die Grösse l nur von der Grösse r ab, muss also auch in dem Falle denselben Werth wiederum annehmen, wenn der in der Entfernung r unter dem Schwerpunkte liegende Punkt O_1 als Aufhängepunkt gewählt wird. In dem speciellen Falle, wenn $l - r = r$ ist, oder (nach Gleichung 524):

$$526)\quad Mr^2 = T_s,$$

d. h. wenn die Höhe des Aufhängepunktes über dem Schwerpunkte gleich dem Trägheitshalbmesser des Körpers in Bezug auf die Schwerpunktsachse ist, fällt der Schwingungspunkt mit jenem Punkte O_1 zusammen.

Für eine einfache geradlinige Stange von der Länge L würde z. B., wenn dieselbe an einem ihrer Endpunkte aufgehängt ist, nach Gleichung 466) $T_0 = \frac{1}{3} ML^2$ zu setzen sein, und man erhält für diesen Fall aus Gleichung 522):

$$l = \frac{\frac{1}{3} ML^2}{\frac{1}{2} ML} = \frac{2}{3} L.$$

Es würde also die Schwingungsdauer dieselbe Grösse behalten, wenn statt des oberen Endpunktes der — von oben gerechnet — im zweiten Drittel der Länge liegende Punkt zum Aufhängepunkte gemacht würde. Bei der experimentellen Bestimmung der Länge l, d. h. bei Benutzung der Stange als Reversionspendels, würde die Verwechselung dieses Schwingungspunktes mit dem unteren Endpunkte der Stange zu vermeiden sein, welcher als Aufhängepunkt gewählt natürlich ebenfalls dieselbe Schwingungsdauer ergeben würde.

Den Trägheitshalbmesser ϱ in Bezug auf die durch den Schwerpunkt (rechtwinkelig zur Stangenrichtung) gelegte Drehachse findet man aus der Gleichung:

$$M\varrho^2 = T_s = \frac{ML^2}{12}, \quad \text{oder:} \quad \varrho = \frac{L}{\sqrt{12}}.$$

Wenn der in diesem Abstande oberhalb des Schwerpunktes liegende Punkt zum Aufhängepunkte gemacht wird, so liegt der Schwingungspunkt in eben derselben Entfernung unterhalb des Schwerpunktes.

Die beiden Gleichungen 522) und 524) zeigen, dass zur Berechnung der Lage des Schwingungspunktes die Kenntniss des Trägheitsmomentes erforderlich ist. Sie können aber auch umgekehrt zur Bestimmung des Trägheitsmomentes benutzt werden. Es ist nur nöthig, die Länge des einfachen Pendels von gleicher Schwingungsdauer durch Beobachtungen zu bestimmen — entweder direct, oder durch Benutzung des Körpers als Reversionspendels — um alsdann aus den resp. für T_0 oder T_s aufgelösten Gleichungen:

527) $T_0 = Mrl$ und 528) $T_s = Mr(l - r)$

die Trägheitsmomente berechnen zu können, sobald der Abstand r des Schwerpunktes vom Aufhängepunkte gleichfalls durch Beobachtungen vorher bestimmt wurde. Dieses Verfahren ist namentlich in solchen Fällen mit Vortheil anzuwenden, bei denen wegen unregelmässiger Form oder Massenvertheilung die Bestimmung des Trägheitsmomentes auf dem Wege der Rechnung mit Schwierigkeiten verbunden sein würde.

Nach Gleichung 528) hat das Product der beiden Grössen r und $l - r$ den constanten Werth:

529) $$\frac{T_s}{M} = \varrho^2,$$

während ihre Summe den von r abhängigen veränderlichen Werth l hat. Die Summe der beiden Factoren einer Zahl wird am kleinsten, wenn die beiden Factoren einander gleich sind (wie die halbe Seiten-Summe eines Quadrates kleiner ist, als die halbe Seiten-Summe eines Rechtecks von gleichem Flächeninhalt). Hieraus folgt, dass die Gleichung 526) oder in anderer Form die Gleichung:

530) $r = \varrho = l - r$

zugleich die Bedingung enthält, unter welcher die Schwingungsdauer des Pendels am kleinsten wird.

NEUNZEHNTES CAPITEL.

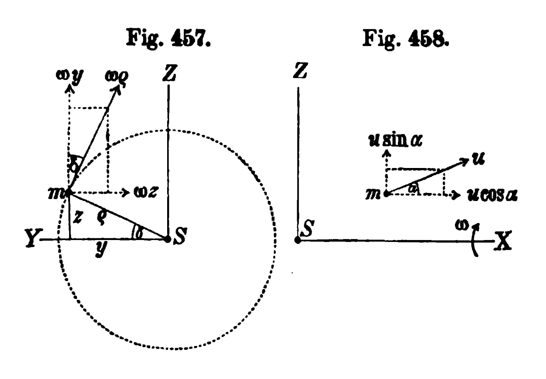
Zusammengesetzte rotirende und fortschreitende Bewegungen.

§ 119.

Lebendige Kraft der zusammengesetzten Bewegung.

Es soll die lebendige Kraft eines Körpers berechnet werden, der gleichzeitig folgende zwei Bewegungen ausführt: Die eine besteht in einer Drehung um eine Schwerpunkts-Achse des Körpers, die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehbewegung hat in einem bestimmten Zeitpunkte die Grösse ω erreicht; die zweite ist eine fortschreitende Bewegung, deren Geschwindigkeit zu derselben Zeit die Grösse u hat.

Um zunächst die lebendige Kraft eines einzelnen in der Entfernung ϱ von der Drehachse befindlichen materiellen Punktes m zu bestimmen, hat man sich durch den Schwerpunkt des Körpers drei einander rechtwinkelig schneidende Coordinaten-Achsen gelegt zu denken, von denen die eine SX mit der Drehachse zusammenfällt, und die zweite SZ eine solche Lage hat, dass die Geschwindigkeit u der fortschreitenden Bewegung parallel zur Ebene XZ gerichtet ist. Die Geschwindigkeit $\omega \,.\, \varrho$, welche jener Punkt vermöge der Drehbewegung des Körpers besitzt, kann man sich alsdann auf die in Fig. 457 angedeutete Art zerlegt denken in die beiden Seitengeschwindigkeiten $\omega \,.\, \varrho \cos \delta = \omega y$ und $\omega \,.\, \varrho \sin \delta = \omega z$; ebenso die Geschwindigkeit u, welche der Punkt vermöge der fortschreitenden Bewegung des Körpers besitzt, auf die in Fig. 458 angedeutete Art in die beiden Seitengeschwindigkeiten $u \cos \alpha$ und $u \sin \alpha$. Die totale Geschwindigkeit v, als resultirende von drei rechtwinkelig zu einander gerichteten



Seitengeschwindigkeiten, ist nach Fig. 459 zu berechnen aus der Gleichung:

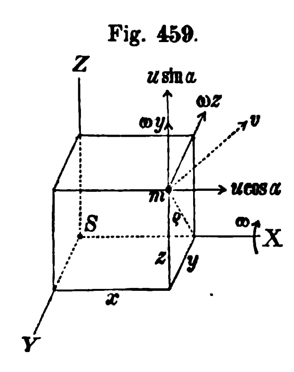


Fig. 459.

$$v^2 = (u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha + \omega y)^2 + (\omega z)^2.$$

Hierin ist $u^2 \cos \alpha^2 + u^2 \sin \alpha^2 = u^2$ und $\omega^2 y^2 + \omega^2 z^2 = \omega^2 \varrho^2$ zu setzen, folglich ist:

$$v^2 = u^2 + \omega^2 \varrho^2 + 2 u \sin \alpha . \omega y.$$

Die lebendige Kraft des einzelnen materiellen Punktes ist $\frac{m v^2}{2}$, und die lebendige Kraft des ganzen Körpers ist gleich der Summe der auf gleiche Weise für sämmtliche materielle Punkte desselben zu bildenden Producte. Da die Grössen u, ω, α für alle Punkte dieselben Werthe haben, so ist:

$$\Sigma \left(\frac{m v^2}{2}\right) = \frac{u^2}{2} \Sigma(m) + \frac{\omega^2}{2} \Sigma(m \varrho^2) + u \omega \sin \alpha \Sigma(m y).$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist $\Sigma(my) = 0$. Wenn also $\Sigma(m)$ als ganze Masse des Körpers mit M, und $\Sigma(m\varrho^2)$ als Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Schwerpunkts-Achse SX mit T bezeichnet wird, so ergiebt sich für die lebendige Kraft des ganzen Körpers die Gleichung:

$$531) \quad L = \frac{M u^2}{2} + \frac{T \omega^2}{2}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite bedeutet die lebendige Kraft, welche der Körper besitzen würde, wenn die fortschreitende Bewegung allein vorhanden wäre; das zweite Glied bedeutet die lebendige Kraft, welche der Körper besitzen würde, wenn die Drehbewegung allein vorhanden wäre. Die obige Gleichung enthält also folgenden Satz:

Wenn die fortschreitende Drehachse des Körpers eine Schwerpunktsachse ist, so erhält man die totale lebendige Kraft der zusammengesetzten Bewegung, indem man die lebendige Kraft für jede der beiden Bewegungen einzeln genommen berechnet und die beiden auf solche Art gefundenen Grössen alsdann zusammen addirt.

Lebendige Kraft eines rollenden Körpers.

Die Berührungsstelle eines auf fester Ebene rollenden Körpers hat in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit Null. Es ist also

die der Drehgeschwindigkeit ω entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit $r\omega$ gleich der Geschwindigkeit u der fortschreitenden Bewegung (Fig. **460**), oder $\omega = \frac{u}{r}$. Die ganze lebendige Kraft des mit der Geschwindigkeit u rollenden Körpers ist daher:

Fig. **460**.

$$L = \frac{Mu^2}{2} + \frac{T}{2}\left(\frac{u}{r}\right)^2 = \frac{u^2}{2}\left(M + \frac{T}{r^2}\right).$$

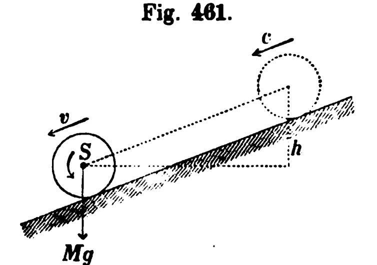
Nach § 109 ist $\frac{T}{r^2} = \mu$ die auf den Umfang des rollenden Kreises reducirte Masse, und kann daher der obigen Gleichung auch die Form gegeben werden:

$$532)\quad L = (M + \mu)\frac{u^2}{2}.$$

Für den unter Einwirkung der Schwere auf schiefer Ebene herabrollenden Körper Fig. **461** ergiebt sich hiernach aus dem Principe der lebendigen Kraft die Gleichung:

$$533)\quad \frac{(M+\mu)\,v^2}{2} - \frac{(M+\mu)\,c^2}{2} = Mgh.$$

Fig. **461**.



Wenn also die Anfangsgeschwindigkeit c gleich Null war, so ist die Endgeschwindigkeit:

$$534)\quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{M}}}.$$

Für einen Cylinder z. B. würde (nach Gleichung 454) $\mu = \frac{M}{2}$ zu setzen sein, folglich die Endgeschwindigkeit:

$$535)\quad v = \sqrt{2g\left(\frac{2}{3}h\right)}$$

ebenso gross sein wie die eines von der Höhe $\frac{2}{3}h$ frei herabgefallenen Körpers.

Für eine Kugel würde (nach Gleichung 480) $\mu = \frac{2}{5}M$ zu setzen sein, folglich die Endgeschwindigkeit:

$$536)\quad v = \sqrt{2g\left(\frac{5}{7}h\right)}$$

so gross sein wie die eines von der Höhe $\frac{5}{7}h$ frei herabgefallenen Körpers.

Lebendige Kraft der Schrauben-Bewegung.

Wenn mit u die Geschwindigkeit bezeichnet wird, mit welcher eine Schraubenspindel in der Achsenrichtung fortschreitet, und mit $r\omega$ die der Drehbewegung entsprechende Umfangsgeschwindigkeit derselben, so ist (nach Fig. **392** und Gleichung 414) das

Verhältniss $\frac{u}{r\omega}$ gleich dem Steigungsverhältniss $\operatorname{tg}\alpha$ der von einem Punkte des Umfanges beschriebenen Schraubenlinie zu setzen. Man erhält demnach aus Gleichung 531), wenn darin $\omega = \frac{u}{r \operatorname{tg}\alpha}$ substituirt wird:

$$L = \frac{u^2}{2}\left(M + \frac{T}{r^2 \operatorname{tg}\alpha^2}\right),$$

oder, wenn die auf den Umfang reducirte Masse $\frac{T}{r^2} = \mu$ gesetzt wird:

$$537)\quad L = \left(M + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha^2}\right)\frac{u^2}{2}.$$

Wenn eine verticale Schraubenspindel in festliegendem Muttergewinde (ohne Reibung) unter Einwirkung der Schwerkraft sich bewegt, und mit c die Anfangsgeschwindigkeit, mit v die Endgeschwindigkeit des Fortschreitens in der Achsenrichtung, mit h die vertical abwärts zurückgelegte Strecke bezeichnet wird, so ist nach dem Principe der lebendigen Kraft:

$$538)\quad \left(M + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha^2}\right)\frac{v^2}{2} - \left(M + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha^2}\right)\frac{c^2}{2} = Mgh.$$

Hieraus ergiebt sich z. B. für den Fall, dass die Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$ war, für die Endgeschwindigkeit v die Gleichung:

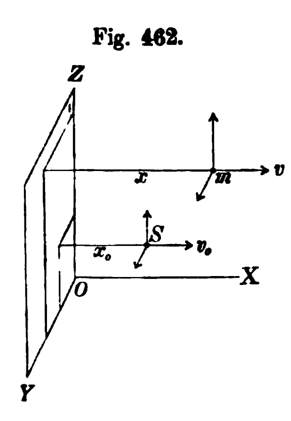
$$539)\quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{M \operatorname{tg}\alpha^2}}}.$$

§ 120.

Gesetz des Schwerpunktes.

Die allgemeinen Schwerpunkts-Gleichungen 150) gelten nicht nur für ein ruhendes, sondern auch für ein in beliebiger Bewegung begriffenes System von materiellen Punkten. Während der Bewegung ändern sich die Coordinaten der einzelnen materiellen Punkte, ebenso auch die Coordinaten des Schwerpunktes. Für jeden einzelnen Zeitpunkt aber ist das Product aus der ganzen Massen-Summe in den Abstand des Schwerpunktes von der festen Ebene YZ gleich der Summe der auf analoge Weise in Bezug auf alle einzelnen materiellen Punkte für diesen Zeitpunkt gebildeten Producte zu setzen, oder (nach Fig. 462):

Fig. 462.



540) $Mx_0 = \Sigma(mx)$.

Wenn man sich die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte auf die in der Figur angedeutete Art zerlegt denkt, so findet man, dass während des nächstfolgenden unendlich kleinen Zeitabschnittes τ die Grösse x übergeht in die Grösse $x + v\tau$, ebenso die Grösse x_0 in die Grösse $x_0 + v_0\tau$. Die allgemeine Gleichung 540) gilt auch für den Endpunkt dieses Zeitsabschnittes, folglich ist:

$$M(x_0 + v_0\tau) = \Sigma[m(x + v\tau)], \quad \text{oder:}$$
$$Mx_0 + Mv_0\tau = \Sigma(mx) + \tau\Sigma(mv).$$

Wenn man die Gleichung 540) von dieser letzteren subtrahirt und nachher den gemeinschaftlichen Factor τ fortlässt, so erhält man die Gleichung:

541) $Mv_0 = \Sigma(mv)$.

In Bezug auf eine beliebige Achsen-Richtung ist für jeden Zeitpunkt das Product aus der ganzen Masse in die Seitengeschwindigkeit des Schwerpunktes gleich der Summe der Producte aus den Massen aller einzelnen materiellen Punkte in ihre Seitengeschwindigkeiten nach dieser Richtung.

Der analoge Satz gilt auch in Bezug auf Beschleunigungen. Wenn mit p die Beschleunigung des Punktes m in der Richtung OX bezeichnet wird, und mit p_0 die Beschleunigung des Schwerpunktes in dieser Richtung, so geht während des unendlich kleinen Abschnittes τ die Grösse v über in die Grösse $v + p\tau$, und die Grösse v_0 in die Grösse $v_0 + p_0\tau$. Der in Gleichung 541) enthaltene Satz gilt auch für den Endpunkt dieses Zeitabschnittes, folglich ist:

$$M(v_0 + p_0\tau) = \Sigma[m(v + p\tau)], \quad \text{oder:}$$
$$Mv_0 + Mp_0\tau = \Sigma(mv) + \tau\Sigma(mp).$$

Wenn man die Gleichung 541) von dieser letzteren subtrahirt und nachher den gemeinschaftlichen Factor τ fortlässt, so erhält man die Gleichung:

542) $Mp_0 = \Sigma(mp)$*).

*) Nach der Bezeichnungsweise der Differenzial-Rechnung würden die obigen Gleichungen die Formen annehmen:

$$541)\quad M\frac{dx_0}{dt} = \Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right), \qquad 542)\quad M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\right),$$

welche aus Gleichung 540) unmittelbar sich ergeben, wenn dieselbe nach (der Zeit) t zweimal differenziirt wird.

In Bezug auf eine beliebige Achsenrichtung ist für jeden Zeitpunkt das Product aus der ganzen Masse in die Seiten-Beschleunigung des Schwerpunktes gleich der Summme der Producte aus den Massen aller einzelnen materiellen Punkte in ihre Seiten-Beschleunigungen nach dieser Richtung.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich die Beschleunigung p_0 berechnen, mit welcher der Schwerpunkt eines unter Einwirkung beliebiger Kräfte K... befindlichen Punkten-Systems in der Richtung OX sich bewegt. Die auf der rechten Seite obiger Gleichung unter dem Summationszeichen vereinigten Producte mp... stellen nämlich ihrer Grösse nach die bei rechtwinkeliger Zerlegung in die Richtung der X-Achse fallenden Seitenkräfte der Trägheitswiderstände dar (§ 107 und § 110), die Richtungen dieser Seitenkräfte sind der Richtung von O nach X entgegengesetzt zu nehmen. Denkt man sich die Kräfte K... gleichfalls nach den drei Achsen-Richtungen zerlegt, und bezeichnet mit X... diejenigen Seitenkräfte derselben, welche in die Richtung OX fallen, so ergiebt sich aus dem d'Alembert'schen Principe die Bedingungsgleichung:

$$0 = \Sigma(X) - \Sigma(mp), \text{ oder nach Gleichung 542):}$$

$$Mp_0 = \Sigma(X).$$

Die Beschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung OX hat also die Grösse:

$$543) \quad p_0 = \frac{\Sigma(X)}{M}.$$

Dieselbe Gleichung würde auch für die Bewegung eines einfachen materiellen Punktes von der Masse M sich ergeben, der unter Einwirkung jener Kräfte sich befindet; und nicht nur für die Richtung OX, sondern auch für jede der beiden Achsen OY und OZ, überhaupt für jede beliebige Achsen-Richtung würde das gleiche Resultat sich ergeben haben.

Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich: wie wenn die Massen aller einzelnen materiellen Punkte und die Angriffspunkte aller einzelnen Kräfte in ihm vereinigt wären.

Dieser Satz gilt — ebenso wie das d'Alembert'sche Princip — nicht nur für ein System von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten, sondern überhaupt für jedes beliebige System von materiellen Punkten.

§ 121.

Bewegung eines freien Körpers.

Der Schwerpunkt befindet sich in relativem Ruhezustande in Bezug auf seinen eigenen Ort, oder in Bezug auf einen fortschreitenden Raum, dessen Bewegung mit derjenigen des Schwerpunktes übereinstimmt. Die relative Bewegung des Systems in Bezug auf diesen fortschreitenden Raum besteht also in einer Drehung um den Schwerpunkt. Nach § 37 hat man sich zur Bestimmung dieser relativen Bewegung an jedem einzelnen materiellen Punkte eine der Beschleunigung des Raumes entsprechende in entgegengesetzter Richtung genommene Kraft zu den wirklich vorhandenen Kräften hinzugefügt zu denken und alsdann die Bewegung so zu bestimmen, als ob der Raum im Ruhezustande sich befände. Wenn also die Beschleunigung des Schwerpunktes mit q bezeichnet wird, so ist mq diejenige Kraft, welche an einem der materiellen Punkte von der Masse m hinzuzufügen wäre in einer Richtung, welche der Beschleunigung q entgegengesetzt ist. Auf gleiche Weise ist mit den übrigen materiellen Punkten zu verfahren.

Die sämmtlichen auf diese Weise hinzugefügten Kräfte $mq \ldots$ bilden ein System von gleich gerichteten Parallelkräften, welche den Massen der einzelnen materiellen Punkte proportional sind. Nach § 44 ist die Mittelkraft solcher Parallelkräfte gleich ihrer Summe:

$$\Sigma(mq) = q\Sigma(m) = Mq,$$

und die Richtungslinie dieser Mittelkraft geht durch den Schwerpunkt. Das Hinzufügen der Kraft Mq in dem nunmehr als unbeweglich zu betrachtenden Schwerpunkte kann auf die Drehung um diesen Punkt keinen Einfluss haben, braucht also bei Bestimmung der Drehbewegung nicht berücksichtigt zu werden. Hieraus folgt, dass die relative Bewegung des Körpers in Bezug auf den Schwerpunkt genau auf dieselbe Weise zu bestimmen ist, wie wenn der Schwerpunkt ein absolut fester Drehpunkt des Körpers wäre.

Die Bestimmung der Bewegung eines vollkommen freien Körpers kann daher auch auf folgende Weise ausgeführt werden: Man bestimmt zunächst die Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt, wie wenn der letztere ein absolut fester Drehpunkt wäre, und bestimmt alsdann nach dem im vorigen Paragraphen

gefundenen Gesetze die Beschleunigung des Schwerpunktes oder des fortschreitenden Raumes, in welchem jene Drehbewegung erfolgt.

Wirkung eines einzelnen Kräftepaares.

Der Schwerpunkt des Körpers bewegt sich, wie wenn die beiden Kräfte des Kräftepaares unmittelbar an demselben angriffen; in diesem Falle aber würden die beiden Kräfte einander im Gleichgewichte halten, folglich ist die Beschleunigung des Schwerpunktes gleich Null. Wenn also — wie vorausgesetzt werden soll — der Körper anfangs im Ruhezustande sich befand, so besteht die von dem Kräftepaare hervorgebrachte Bewegung nur in einer Drehung des Körpers um den ruhenden Schwerpunkt.

Es soll angenommen werden, dass diejenige Schwerpunkts-Achse, welche rechtwinkelig zur Ebene des Kräftepaares steht, eine freie Achse ist (§ 111), und bewiesen werden, dass in diesem Falle die von dem Kräftepaare hervorgebrachte Bewegung in einer beschleunigten Drehung um jene freie Achse besteht.

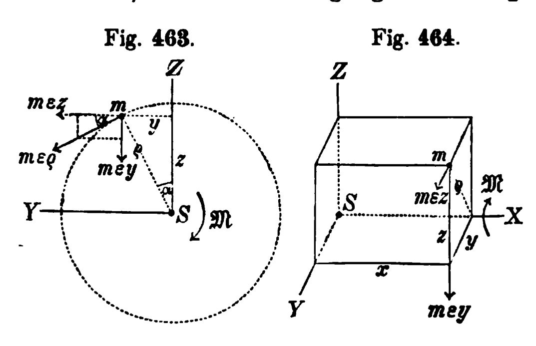
Um dies nachzuweisen, denkt man sich anfänglich jene Achse durch Widerstandskräfte festgehalten, so dass dieselbe unter allen Umständen als Drehachse anzusehen ist, und beweist nachher, dass die dazu erforderlichen Widerstandskräfte gleich Null sind. Die bei der Drehung um diese Achse auftretenden Centrifugal-Kräfte halten (nach § 111) für sich allein einander im Gleichgewichte, weil die Drehachse eine freie ist, können also bei Anwendung des d'Alembert'schen Princips unberücksichtigt bleiben. Es ist daher nur nöthig zu beweisen, dass die der hervorgebrachten Drehbeschleunigung ε entsprechenden (tangential zu den Drehungskreisen gerichteten) Trägheitswiderstände $m\varrho\varepsilon\ldots$ mit den Kräften des gegebenen Kräftepaares zusammen den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen allein schon genügen (d. h. ohne Vorhandensein jener Widerstände).

Wenn die drei im Schwerpunkte S einander rechtwinkelig schneidenden Coordinaten-Achsen so gelegt werden, dass die eine Achse SX mit der Drehachse zusammenfällt (Fig. **463** u. Fig. **464**) und mit $\mathfrak{M}$ das Moment des Kräftepaares bezeichnet wird, so ist nach Gleichung 504):

$$0 = \mathfrak{M} - \Sigma(m\varepsilon\varrho^2), \quad \text{oder:} \quad 0 = \mathfrak{M} - T\varepsilon,$$

d. h. die Winkelbeschleunigung ε ist so beschaffen, dass diejenige Gleichgewichts-Bedingung, welche die statischen Momente in Bezug auf die Achse SX betrifft, erfüllt ist. Wenn man ferner jede der

Kräfte $m\varepsilon\varrho$ auf die in Fig. 463 angedeutete Art zerlegt in ihre beiden Seitenkräfte $m\varepsilon\varrho \cos\alpha = m\varepsilon z$ und $m\varepsilon\varrho \sin\alpha = m\varepsilon y$, so findet man, dass die Bedingungs-Gleichungen:

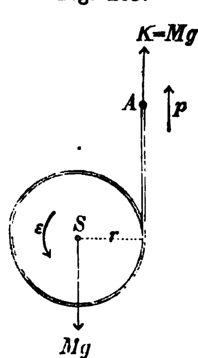


$\Sigma(m\varepsilon z) = 0$, oder: $\Sigma(mz) = 0$ und $\Sigma(m\varepsilon y) = 0$, oder: $\Sigma(my) = 0$ aus dem Grunde erfüllt sind, weil der Schwerpunkt in der Achse SX liegt, endlich, dass die Bedingungs-Gleichungen, welche die statischen Momente resp. in Bezug auf die Achsen SY und SZ betreffen:

$$\Sigma(m\varepsilon y x) = 0, \quad \text{oder:} \quad \Sigma(myx) = 0 \quad \text{und}$$

$$\Sigma(m\varepsilon z x) = 0, \quad \text{oder:} \quad \Sigma(mzx) = 0$$

ebenfalls erfüllt sind, weil die Drehachse SX eine freie Achse ist (§ 111). Da in der Richtung der letzteren keine Seitenkräfte vorhanden sind, so ist hiermit das Erfülltsein sämmtlicher sechs Gleichgewichts-Bedingungen nachgewiesen. Hieraus folgt, dass es keiner die Drehachse festhaltenden Widerstandskräfte bedarf, um zu bewirken, dass die Bewegung in der oben vorausgesetzten Weise stattfinde.



Wenn z. B. um eine verticale cylindrische Scheibe ein (am Umfange derselben befestigter) Faden gewickelt ist und dieser Faden vertical aufwärts gezogen wird mit einer Kraft K, welche dem Gewichte der Scheibe gleich ist, so bilden die beiden Kräfte K und Mg ein Kräftepaar, welches keine fortschreitende, sondern nur Drehbewegung hervorbringt (Fig. 465). Die frei im Raume schwebende Scheibe wird, ohne zu sinken, um ihren Mittelpunkt sich drehen, wie wenn derselbe ein fester Drehpunkt wäre, mit der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{T} = \frac{Mgr}{T}$. Die Peripherie-Beschleunigung, welche dieser Winkelbeschleunigung entspricht, ist:

$$p = r\varepsilon = \frac{Mgr^2}{T},$$

oder da nach Gleichung 452) $T = \frac{1}{2} Mr^2$ ist:

$$p = 2g.$$

Ebenso gross ist die Beschleunigung, mit welcher der Endpunkt des Fadens nach oben bewegt werden muss, um das Sinken des Schwerpunktes der Scheibe zu verhindern.

Auf gleiche Weise würde unter gleichen Umständen auch ein Cylinder von beliebiger Länge sich bewegen, sobald die Ebene, welche den Schwerpunkt und die Richtungslinie der Kraft K enthält, rechtwinkelig zur geometrischen Achse desselben steht.

Bewegung eines freien Körpers unter Einwirkung mehrerer beliebig gegebener Kräfte.

Nach dem in § 43 erklärten Verfahren können sämmtliche Kräfte ersetzt werden durch eine im Schwerpunkte angreifende Einzelkraft und ein Kräftepaar. Die Beschleunigung des Schwerpunktes ist unter allen Umständen zu bestimmen nach der Gleichung:

$$544)\quad q = \frac{R}{M},$$

worin R die resultirende Einzelkraft, und M die ganze Masse des Körpers bezeichnet.

Für den Fall, dass diejenige Schwerpunkts-Achse, welche rechtwinkelig zur Ebene des resultirenden Kräftepaares steht, eine freie Achse ist, kann die ausserdem hervorgebrachte Drehung um den Schwerpunkt auf dieselbe Weise wie im vorigen Falle bestimmt werden nach der Gleichung:

$$545)\quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{T},$$

worin $\mathfrak{M}$ das Moment des resultirenden Kräftepaares, T das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf jene freie Achse, und ε die hervorgebrachte Winkelbeschleunigung bezeichnet.

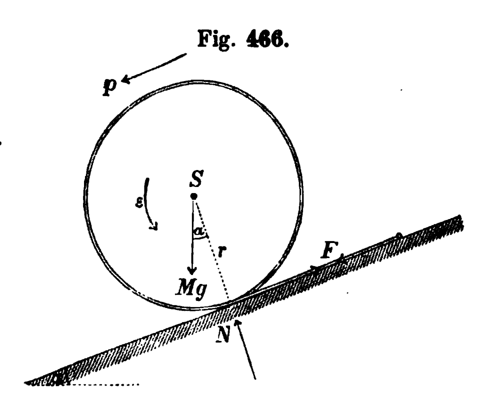
§ 122.

Rollende Bewegung auf schiefer Ebene.

Ohne Vorhandensein des Reibungswiderstandes würde der (vom Zustande der Ruhe aus seine Bewegung beginnende) Körper eine fortschreitende Bewegung ausführen, und die Berührungsstelle würde dabei längs der Unterlage gleiten. Der Reibungswiderstand wirkt diesem Gleiten entgegen und bringt gleichzeitig eine drehende Bewegung hervor. Falls der Reibungswiderstand gross genug ist, um das Gleiten der Berührungsstelle ganz zu verhindern, wird die Bewegung des Körpers eine rollende sein.

Um die Frage zu entscheiden: ob ein wirkliches Rollen oder ein unvollkommenes, mit Gleiten verbundenes Rollen stattfinden wird, kann man sich zunächst durch einen um den Körper gewickelten Faden, welcher längs der Unterlage ausgestreckt an einem Punkte derselben befestigt ist, den Körper zu einer rollenden Bewegung gezwungen denken, und die in diesem Faden stattfindende Spannung F nachher vergleichen mit dem Reibungswiderstande, welcher beim Gleiten des Körpers auftreten würde. Findet es sich, dass dieser Reibungswiderstand nicht kleiner ist, als jene Kraft F, so wird auch ohne das Vorhandensein des Fadens die Bewegung des Körpers eine rollende sein (Fig. 466).

Fig. 466.



Auf den rollenden Körper wirken drei Kräfte, nämlich das Gewicht Mg, der Gegendruck N und die Kraft F. Von diesen drei Kräften ist F die einzige, welche nicht durch den Schwerpunkt geht; folglich geschieht die Drehung um den Schwerpunkt mit der Winkelbeschleunigung:

$$\varepsilon = \frac{Fr}{T}.$$

In dieser Gleichung bedeutet T das Trägheitsmoment in Bezug auf die rechtwinkelig zur Bahn gerichtete horizontale Schwerpunkts-Achse, von welcher vorausgesetzt wird, dass dieselbe die Eigenschaften einer freien Achse besitzt. Die Peripherie-Beschleunigung, welche der Winkelbeschleunigung ε entspricht, ist:

$$p = r\varepsilon = \frac{Fr^2}{T}.$$

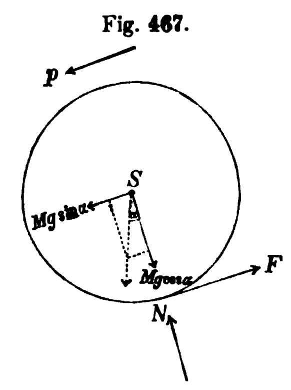
Wenn mit μ die auf den Umfang des rollenden Kreises reducirte Masse bezeichnet wird, so ist $T = \mu r^2$ zu setzen, also ist:

$$546) \quad p = \frac{F}{\mu}, \quad \text{oder:} \quad F = \mu p.$$

Bei der rollenden Bewegung hat die der Drehbewegung entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit stets gleiche Grösse mit der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung (§ 119, Fig. 460).

Es müssen daher auch die Zunahmen dieser beiden Geschwindigkeiten stets einander gleich sein. Hieraus folgt, dass die Beschleunigung, mit welcher der Schwerpunkt längs der Bahn fortschreitet, ebenfalls die Grösse p hat. Nach dem Gesetze des Schwerpunktes ist diese Beschleunigung so zu bestimmen, wie wenn die drei Kräfte unmittelbar am Schwerpunkte angriffen. Man erhält also nach Fig. 467 die Gleichung:

Fig. 467.



$$547)\quad p = \frac{Mg \sin \alpha - F}{M}.$$

Nach Substitution des in Gleichung 546) für F gefundenen Werthes nimmt diese Gleichung für p aufgelöst die Form an:

$$548)\quad p = \frac{Mg \sin \alpha}{M + \mu}.$$

Die Bewegung des Schwerpunktes rechtwinkelig zur Bahnrichtung wird durch den Gegendruck N verhindert; in dieser Richtung ist die Beschleunigung des Schwerpunktes gleich Null, folglich auch die Kraftsumme. Es ist also:

$$549)\quad N - Mg \cos \alpha = 0, \quad \text{oder:} \quad N = Mg \cos \alpha.$$

Wenn der Reibungscoefficient die Grösse f hat, so würde bei wirklichem Gleiten der Berührungsstelle der entgegenwirkende Reibungswiderstand die Grösse fN haben. Falls diese Kraft grösser ist als die Kraft F, so wird von der Kraft fN nur ein Theil zur Wirksamkeit gelangen, und zwar ein Theil, welcher gleich F ist. Wenn dagegen fN kleiner ist als F, so würde ohne Vorhandensein des Fadens ein Gleiten stattfinden. Den Grenzfall bildet derjenige Fall, in welchem $fN = F$ ist, oder (nach Gleichung 546):

$$fMg \cos \alpha = \mu p.$$

Wenn man hierin den für p gefundenen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$fMg \cos \alpha = \frac{\mu Mg \sin \alpha}{M + \mu},$$

welche für $\operatorname{tg} \alpha$ aufgelöst die Form annimmt:

$$550)\quad \operatorname{tg} \alpha = \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) f.$$

Aus dieser Gleichung ist derjenige Neigungswinkel zu bestimmen, um welchen **höchstens** die Unterlage gegen den Horizont geneigt sein darf, wenn der Reibungswiderstand ausreichen soll, zu bewirken, dass die Bewegung eine **rollende** wird. Sie bezeichnet zugleich die Grenze, bis zu welcher — ohne Vorhandensein des Fadens — die Gleichung 548) als gültig zu betrachten ist.

Für einen Cylinder ist z. B. $\frac{M}{\mu} = 2$ zu setzen (nach Gleichung 454), darf also das Steigungsverhältniss der Unterlage höchstens die Grösse:

$$551)\quad \operatorname{tg} \alpha = 3f$$

haben, wenn noch ein Rollen stattfinden soll. Bei kleinerem — oder wenigstens nicht grösserem — Werthe des Neigungswinkels hat die Beschleunigung des Rollens (nach Gleichung 548) die Grösse:

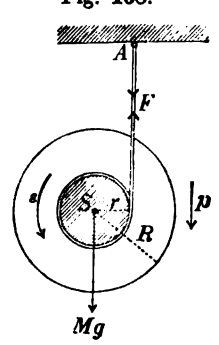
$$552)\quad p = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Für die Kugel ist $\mu = \frac{2}{5} M$ zu setzen (nach Gleichung 480), und ergeben sich die auf analoge Weise zu deutenden Gleichungen:

$$553)\quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{2} f \quad \text{und} \quad p = \frac{5}{7} g \sin \alpha.$$

Für den Fall, dass der Körper durch einen wirklich vorhandenen Faden zu einer rollenden Bewegung gezwungen ist, gilt die Gleichung 548) bei jeder beliebigen Grösse des Neigungswinkels α, also auch dann noch, wenn z. B. $\alpha = 90^0$ ist, wie bei dem in Fig. 468 dargestellten Falle. Da die Kräfte Mg und F beide vertical gerichtet sind, so ist zur Verhinderung einer seitlichen Bewegung des Körpers in diesem Falle der Gegendruck einer Wand **nicht** erforderlich. Der frei herabhängende Faden wird seine verticale Richtung beibehalten, und der Schwerpunkt — obwohl nicht in der Verticalen des Aufhängepunktes befindlich — wird in verticaler Richtung sich hinabbewegen mit der Beschleunigung:

Fig. 468.



$$554)\quad p = \frac{Mg}{M + \mu}.$$

Wenn der Körper ein Cylinder vom Halbmesser R ist, und der Halbmesser des rollenden Kreises die Grösse r hat, so ist die auf den Umfang des letzteren reducirte Masse $\mu = \frac{T}{r^2} = \frac{M}{2} \frac{R^2}{r^2}$, und die Beschleunigung des Sinkens hat die Grösse:

$$555)\quad p = \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}}.$$

Also z. B. für $\frac{R}{r} = 10$ würde $p = \frac{g}{51}$, und für $\frac{R}{r} = 1$ würde $p = \frac{2}{3}g$.

Bei einem auf schiefer Ebene bergan rollenden Körper hat die Geschwindigkeit — sowohl der drehenden, als der fortschreitenden Bewegung — eine der vorigen entgegengesetzte Richtung. Durch die Schwerkraft wird die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung allmählich vermindert, und damit die Bewegung eine rollende bleibt, muss die der Drehung entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit genau in demselben Maasse abnehmen. Da die Drehung in diesem Falle von links nach rechts erfolgt (mit Bezug auf Fig. 466), so ist zum Hervorbringen einer Verminderung der Drehgeschwindigkeit eine an der Berührungsstelle bergan wirkende Tangential-Kraft erforderlich. Wenn man auch in diesem Falle die Wirkung des Reibungswiderstandes anfänglich durch einen gespannten Faden sich veranschaulichen wollte, so würde man finden, dass dieser Faden genau auf dieselbe Weise wie in Fig. 466 bei dem bergab rollenden Körper angebracht werden müsste. Die drei Kräfte, welche auf den bergan rollenden Körper wirken, haben also genau dieselben Richtungen wie in Fig. 466 angegeben; folglich muss auch die Anwendung der allgemeinen Bewegungsgesetze zu denselben Gleichungen (546, 547, 548) führen. Es gilt daher die allgemeine Gleichung 548) auch für die Beschleunigung des bergan rollenden Körpers, nur ist die Grösse p hier als die in jeder Secunde erfolgende Geschwindigkeits-Abnahme der fortschreitenden Bewegung aufzufassen, da die Bewegungsrichtung der Beschleunigungsrichtung entgegengesetzt ist.

§ 123.

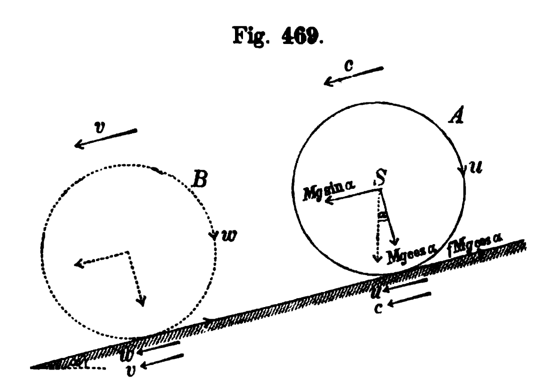
Gleitende Bewegung eines rotirenden Körpers auf schiefer Ebene.

Bei dem rollenden Körper gelangt — wie im vorigen Paragraphen gezeigt — von dem Reibungswiderstande $fN = fMg\cos\alpha$ im Allgemeinen nur ein Theil zur Wirkung, nämlich derjenige Theil, welcher ausreicht, um das Gleiten an der Berührungsstelle zu verhindern. Sobald dagegen ein solches Gleiten wirklich stattfindet, wirkt allemal der Reibungswiderstand in seiner vollen

Grösse dem Gleiten entgegen, und diese Wirkung dauert so lange, bis die Geschwindigkeit der Berührungsstelle gleich Null geworden, d. h. bis die Bewegung in eine rollende übergegangen ist. Wenn also der anfängliche Bewegungszustand des Körpers mit einem Gleiten der Berührungsstelle verbunden ist, so zerfällt im Allgemeinen die ganze Bewegungsdauer in zwei Abschnitte mit verschiedenen Bewegungsgesetzen: während des ersten findet ein Gleiten statt, und wirkt die ganze Kraft fN dem Gleiten entgegen; während des zweiten Abschnittes ist die Bewegung eine rollende und nur ein Theil jener Kraft in Thätigkeit. Da das für den zweiten Abschnitt geltende Bewegungsgesetz im vorigen Paragraphen bereits gefunden wurde, so ist es hier nur erforderlich, die während des ersten Abschnittes erfolgende Bewegung zu bestimmen.

Bei der Anfangsstellung A des in Fig. 469 dargestellten Körpers findet jedenfalls ein Gleiten der Berührungsstelle statt; denn die Geschwindigkeit u, welche dieselbe vermöge der Drehbewegung besitzt, und die Geschwindigkeit c, welche dieselbe vermöge der fortschreitenden Bewegung besitzt, haben beide dieselbe Richtung. Durch den Reibungs-Widerstand $fMg \cos \alpha$ wird die Drehgeschwindigkeit allmählich vermindert; die Grösse k, um welche die derselben entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit in jeder Secunde abnimmt, findet man aus Gleichung 546), indem man darin k statt p und $fMg \cos \alpha$ statt F substituirt; es ist also:

Fig. 469.



$$556)\quad k = \frac{fMg \cos \alpha}{\mu}.$$

Die fortschreitende Bewegung wird eine beschleunigte oder eine verzögerte sein, jenachdem von den beiden Kräften $Mg \sin \alpha$ und $fMg \cos \alpha$ die eine oder die andere die grössere ist. Da Verzögerungen als negative Beschleunigungen, und umgekehrt Beschleunigungen als negative Verzögerungen aufzufassen sind, so

ist es bei richtiger Deutung der Vorzeichen für den Gang der Rechnung gleichgültig, ob die Geschwindigkeitsänderung der fortschreitenden Bewegung als Zunahme oder als Abnahme in die Rechnung eingeführt wird. Die (positive oder negative) Grösse q, um welche die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung in jeder Secunde abnimmt, ist nach dem Gesetze des Schwerpunktes zu bestimmen aus der Gleichung:

$$557) \quad q = \frac{fMg\cos\alpha - Mg\sin\alpha}{M} = g(f\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Hiernach ergiebt sich für das Verhältniss dieser beiden Verzögerungen der Werth:

$$558) \quad \frac{q}{k} = \frac{\mu}{M}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}\right).$$

Wenn nach Ablauf von t Secunden während des Ueberganges aus der Stellung A in die Stellung B (Fig. 469) die der Drehung entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit von u bis auf w, und die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung von c bis auf v sich vermindert hat, so muss zwischen den ganzen während dieser Zeit erfolgenden Geschwindigkeitsverminderungen $u - w = kt$ und $c - v = qt$ dasselbe Verhältniss stattfinden, wie zwischen den in jeder einzelnen Secunde erfolgenden Geschwindigkeitsverminderungen k und q; denn das Verhältniss $\frac{q}{k}$ erleidet während der Bewegung keine Aenderung. Durch Gleichsetzung der beiden Quotienten:

$$\frac{c - v}{u - w} = \frac{q}{k}$$

erhält man nach Substitution des für letzteren in Gleichung 558) gefundenen Werthes die Gleichung:

$$559) \quad \frac{c - v}{u - w} = \frac{\mu}{M}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}\right).$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt innerhalb desjenigen Zeitraums, in welchem noch ein Gleiten der Berührungsstelle stattfindet, folglich auch noch für den Endpunkt dieses Zeitabschnittes oder für denjenigen Zeitpunkt, in welchem die Geschwindigkeit der Berührungsstelle $w + v$ die Grösse Null erreicht, und die Bewegung in eine rollende übergeht. Wenn also unter t die ganze Dauer dieses Abschnittes verstanden wird, so ist:

$$w + v = 0 \quad \text{oder} \quad w = -v$$

zu setzen, und wenn man nach Substitution dieses Werthes in Gleichung 559) dieselbe für v auflöst, so erhält man für die Endgeschwindigkeit der gleitenden, oder für die Anfangsgeschwindigkeit der rollenden Bewegung die Gleichung:

$$560)\quad v = \frac{c - \frac{\mu}{M}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}\right)u}{1 + \frac{\mu}{M}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}\right)}.$$

Die Grenze, bis zu welcher diese allgemeine Gleichung ihre Gültigkeit noch behält, ist durch Gleichung 550) des vorigen Paragraphen festgestellt. Der Uebergang in die rollende Bewegung wird natürlich nur dann wirklich stattfinden, wenn der Neigungswinkel α klein genug ist, um überhaupt eine rollende Bewegung zu gestatten, d. h. wenn derselbe nicht grösser ist als der aus Gleichung 550) zu bestimmende Rollwinkel. Im Uebrigen gilt die Gleichung 560) ganz allgemein für positive sowohl als negative Werthe der Anfangsgeschwindigkeit u und c, sowie des Neigungswinkels α. Dieser letztere ist als positiv oder negativ zu betrachten, jenachdem die Anfangsgeschwindigkeit der Berührungsstelle bergab oder bergan gerichtet ist; d. h. es ist immer diejenige von den beiden Richtungen als die positive Bewegungsrichtung zu wählen, für welche die Grösse $u + c$ positiv ist.

Aus der obigen allgemeinen Gleichung ergeben sich für die verschiedenen speciellen Fälle die nachfolgenden Resultate:

I. Wenn $\operatorname{tg}\alpha = \left(1 + \frac{M}{\mu}\right)f$ ist, so wird $v = \infty$, d. h. wenn der Neigungswinkel α die Grösse des Rollwinkels (Gleichung 550) erreicht, so geht erst nach unendlich langer Dauer — oder mit anderen Worten niemals — die Bewegung in eine rollende über.

II. Wenn $\operatorname{tg}\alpha = -\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)f$ ist, so wird $v = \frac{c - \left(1 + 2\frac{\mu}{M}\right)u}{2\left(1 + \frac{\mu}{M}\right)}$,

und wenn z. B. der Körper zugleich die Form eines Cylinders hat, so wird $v = \frac{c - 2u}{3}$. Bei gleicher absoluter Grösse des Neigungswinkels, wie im Falle I. tritt also schon nach endlicher Zeit eine rollende Bewegung ein, wenn die Anfangsgeschwindigkeit der Berührungsstelle bergan gerichtet war. Für einen noch grösseren negativen Werth von $\operatorname{tg}\alpha$ würde es zwar auch noch einen Zeitpunkt geben, in welchem die Geschwindigkeit der Berührungsstelle Null wird, aber die Geschwindigkeit würde nicht Null bleiben, sondern es würde in diesem Zeitpunkte ein Gleiten nach der entgegengesetzten Richtung beginnen. Die Fälle I. und II. bilden also die beiden äussersten Grenzfälle,

innerhalb deren überhaupt noch der Eintritt einer rollenden Bewegung zu erwarten ist.

III. Wenn $\operatorname{tg}\alpha = f$ ist, so wird $v = c$; d. h. wenn der Neigungswinkel α gleich dem Reibungswinkel ist, so haben Endgeschwindigkeit und Anfangsgeschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung gleiche Grösse. Der Körper bewegt sich in diesem Falle gleichförmig (bergab oder bergan, jenachdem c positiv oder negativ ist) bis zu dem Augenblicke, wo die Bewegung eine rollende wird und mit der bergab gerichteten Beschleunigung p (Gleichung 548) alsdann sich weiter fortsetzt.

IV. Setzt man $\operatorname{tg}\alpha = 0$, so erhält man die für die Bewegung auf horizontaler Unterlage geltende Gleichung:

$$561)\quad v = \frac{c - \frac{\mu}{M} u}{1 + \frac{\mu}{M}},$$

welche z. B. für eine cylindrische Scheibe, deren fortschreitende Bewegung anfangs die Geschwindigkeit $c = 0$ hatte, die Form annimmt:

$$v = -\frac{u}{3}.$$

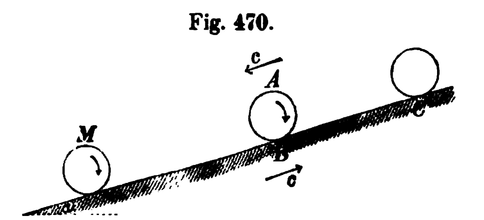
Die Anfangsgeschwindigkeit der rollenden Bewegung ist unabhängig von der Grösse des Reibungscoefficienten, also für eine Scheibe von sehr rauhem Umfange ebenso gross, wie für eine Scheibe mit sehr glattem Umfange. Wenn eine mit der Umfangsgeschwindigkeit $u = 60^m$ in verticaler Ebene rotirende Kreis-Säge plötzlich — etwa durch Zapfenbruch — von ihrer Verbindung mit den Zapfenlagern befreit, die horizontale Bodenfläche als Unterstützungs-Ebene erhielte, so würde auf Kosten eines Theils der rotirenden Bewegung allmählich eine fortschreitende Bewegung entstehen, und die Scheibe später mit einer Geschwindigkeit $v = 20^m$ gleichförmig fortrollen.

V. Wenn $\operatorname{tg}\alpha \lesseqgtr {f \atop 0}$ ist, und die Anfangsgeschwindigkeiten beide positiv sind, so ist die fortschreitende Bewegung anfangs eine bergabwärts gerichtete gleichförmig verzögerte. Setzt man zugleich $v = -c$ in Gleichung 560), so erhält man für das Verhältniss der beiden Anfangsgeschwindigkeiten die Bedingungsgleichung:

$$562)\quad \frac{u}{c} = 1 + 2\frac{M}{\mu}\left(\frac{f}{f - \operatorname{tg}\alpha}\right).$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so fallen die beiden Stellungen A und B zusammen, d. h. der Körper befindet sich beim Beginn der rollenden Bewegung wieder an derselben Stelle, von wo die Bewegung anfing, und hat bei der Rückkehr eine Geschwindigkeit, welche der Anfangsgeschwindigkeit gleich und entgegengesetzt ist (Fig. 470).

Fig. 470.

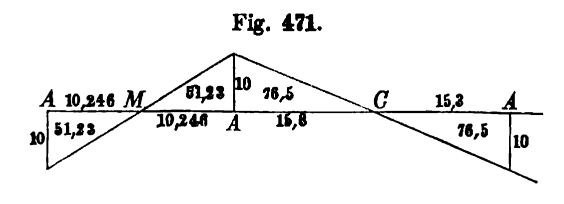


Die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung nimmt anfangs in jeder

Secunde um die Grösse q ab (Gleichung 557), und wird nach Zurücklegung einer gewissen Strecke AM gleich Null. Bei M findet eine Umkehr statt; der Körper bewegt sich dann mit der Beschleunigung q von M nach A zurück und kommt mit der Geschwindigkeit c bei A wieder an. Hier geht alsdann die vorher gleitende beschleunigte Bewegung in eine rollende verzögerte Bewegung über; der Körper rollt mit der Verzögerung p (Gleichung 548) aufwärts von A nach C, wo die Geschwindigkeit wiederum Null wird, und eine zweite Umkehr stattfindet. Hierauf rollt der Körper mit der Beschleunigung p wieder bergab, und die Bewegung bleibt eine gleichförmig beschleunigte. Die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{AC}$, sowie die Zeiten, in welchen diese Strecken zurückgelegt werden, können nach den im § 7 für die gleichförmig veränderte Bewegung gefundenen Regeln bestimmt werden.

Wenn z. B. bei dem Reibungscoefficienten $f = 0{,}2$ auf einer schiefen Ebene vom Steigungsverhältniss $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}1$ (oder vom Steigungswinkel $\alpha = 5^0 45'$) eine mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 10^m$ herabgeworfene cylindrische Scheibe die eben beschriebene Bewegung ausführen soll, so musste derselben gleichzeitig eine anfängliche Drehgeschwindigkeit ertheilt werden, entsprechend (nach Gleichung 562) der Bedingung $\frac{u}{c} = 9$ oder $u = 90^m$. Die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung von A nach M nimmt in jeder Secunde ab um die Grösse $q = g\,(f \cos \alpha - \sin \alpha) = 0^m{,}976$ und wird Null nach $\frac{10}{0{,}976} = 10{,}246$ Secunden. Es ist also die Strecke $\overline{AM}$ $= \frac{10\,.\,10{,}246}{2} = 51^m{,}23$. Die gleichförmig beschleunigte Rückkehr von M nach A erfordert ebenfalls 10,246 Secunden. Die Scheibe kommt mit einer Geschwindigkeit von 10 Metern in A wieder an und rollt alsdann mit der Verzögerung $p = \frac{2}{3}\, g \sin \alpha = 0^m{,}654$ von A nach C. Die Geschwindigkeit des Rollens wird Null nach $\frac{10}{0{,}654} = 15{,}3$ Secunden, und die in dieser Zeit zurückgelegte Strecke ist $\overline{AC} = \frac{10\,.\,15{,}3}{2} = 76^m{,}5$. Bei C kehrt die Scheibe zum zweiten Male um; dieselbe rollt alsdann mit der Beschleunigung $0^m{,}654$ wieder bergab, gelangt nach 15,3 Secunden zum dritten Male mit der Geschwindigkeit von 10 Metern nach A und setzt die gleichförmig beschleunigte bergab rollende Bewegung dann weiter fort.

Fig. 471.

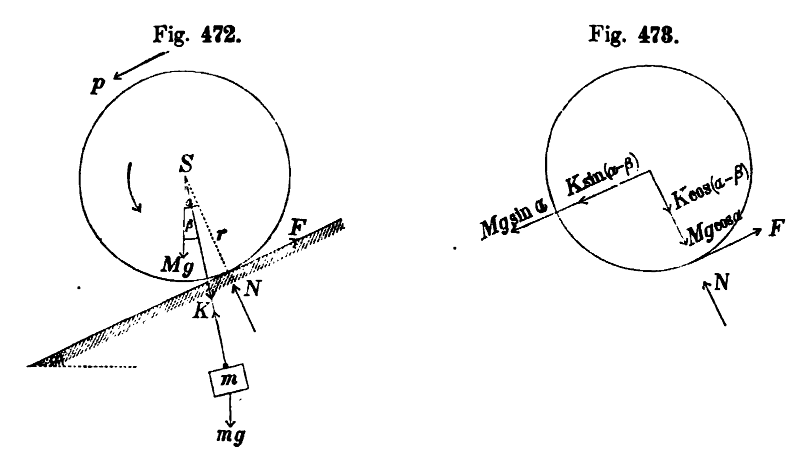


Die fortschreitende Bewegung der Scheibe ist in Fig. 471 graphisch dargestellt; für die bergab gerichteten Geschwindigkeiten sind die Ordinaten nach unten, für die bergan gerichteten nach oben hin abgetragen. Die Zeitpunkte des Eintreffens in den Stellungen M, A, C sind durch die gleichnamigen Buchstaben bezeichnet.

§ 124.

Bewegung der Fuhrwerke auf geneigten Bahnen.

Wenn an der Drehachse des rollenden Körpers noch eine Masse m aufgehängt ist, welche nur an der fortschreitenden Bewegung desselben Theil nimmt, so ist bei der Bestimmung der Beschleunigung des rollenden Körpers ausser den drei Kräften Mg, N, F (§ 122) noch die auf den Aufhängepunkt übertragene Kraft K in Rechnung zu bringen (Fig. 472). Nach dem Gesetze des Schwerpunktes ergiebt sich für die Beschleunigung der fort-



schreitenden Bewegung des rollenden Körpers aus Fig. 473 die Gleichung:

$$563)\quad p = \frac{Mg \sin\alpha + K \sin(\alpha - \beta) - F}{M}.$$

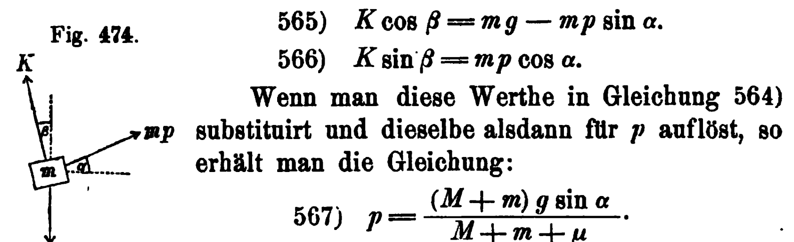
Da das statische Moment der Kraft K in Bezug auf die Drehachse des rollenden Körpers gleich Null ist, so bleibt die Gleichung 546) auch für diesen Fall gültig, ist also $F = \mu p$ zu setzen. Der obigen Gleichung kann daher auch die Form gegeben werden:

$$564)\quad (M + \mu)\, p = Mg \sin\alpha + \sin\alpha \,.\, K \cos\beta - \cos\alpha \,.\, K \sin\beta.$$

Die Masse m ist in Bezug auf den mit der Beschleunigung p fortschreitenden Raum als im relativen Gleichgewichtszustande befindlich anzusehen; es würde also die in entgegengesetzter Richtung hinzugefügte Kraft mp den beiden wirklich vorhandenen

Kräften mg und K das Gleichgewicht halten. Hiernach ergeben sich aus Fig. 474 die beiden Gleichungen:

Fig. 474.



$$565)\quad K\cos\beta = mg - mp\sin\alpha.$$

$$566)\quad K\sin\beta = mp\cos\alpha.$$

Wenn man diese Werthe in Gleichung 564) substituirt und dieselbe alsdann für p auflöst, so erhält man die Gleichung:

$$567)\quad p = \frac{(M+m)\,g\sin\alpha}{M+m+\mu}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht im Zähler die in der Bewegungsrichtung wirkende Seitenkraft der Gewichts-Summe; im Nenner die wirkliche Massen-Summe vermehrt um die auf den Umfang des rollenden Körpers reducirte Masse des letzteren. Die Beschleunigung der fortschreitenden Bewegung des Massen-Systems kann also wie bei einem einfachen materiellen Punkte gleich dem Quotienten $\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ gesetzt werden, sobald zu der beschleunigten Masse noch die auf den Umfang des rollenden Kreises reducirte rollende Masse hinzugerechnet wird.

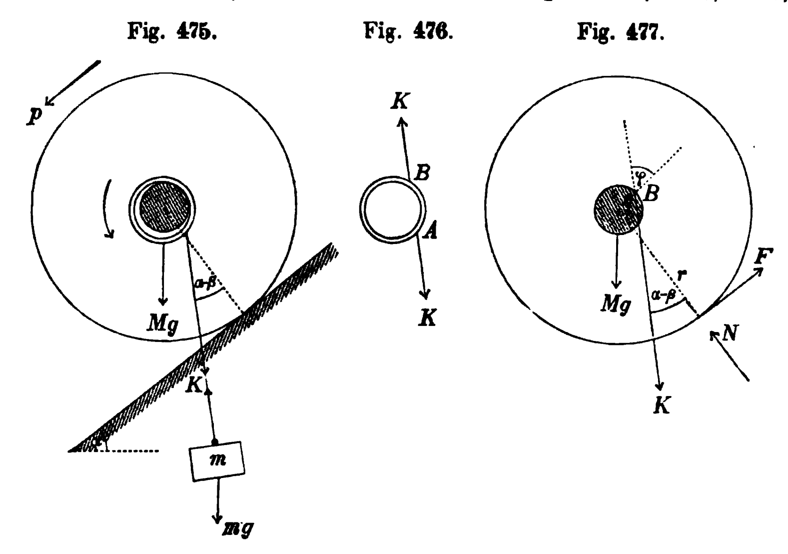
§ 125.

Wirkung des Zapfenreibungs-Widerstandes.

Bei der obigen Berechnung sind die Zapfenreibungs-Widerstände unberücksichtigt geblieben, welche an der Verbindungsstelle zwischen der fortschreitenden und der rollenden Masse unvermeidlich auftreten. Um den Einfluss der Zapfenreibung zu ermitteln, kann man sich die fortschreitende Masse m an einem gewichtlosen Ringe aufgehängt denken, welcher seinerseits an dem Zapfen des rollenden Körpers aufgehängt ist (Fig 475). Für diesen Ring sind die Bedingungen des relativen Gleichgewichtes identisch mit denen des absoluten Gleichgewichtes, da die Masse — folglich auch der Trägheitswiderstand — des Ringes gleich Null vorausgesetzt wird. Es wird daher der Ring auf die in Fig. 476 angedeutete Art von den beiden in den Punkten A und B angreifenden entgegengesetzten Kräften K im relativen Gleichgewichte gehalten, und an der Berührungsstelle B wird die Kraft K in unveränderter Richtung und Grösse auf den rollenden Körper übertragen (Fig. 477). Wenn wiederum mit p die Beschleunigung der fortschreitenden Bewegung bezeichnet wird, und mit β

der Winkel, den die Richtungslinie der Kraft K mit der Verticalen einschliesst, so bleiben die Gleichungen 563), 565), 566),

Fig. 475. Fig. 476. Fig. 477.



welche auf die fortschreitenden Bewegungen der Massen M und m sich beziehen, unmittelbar für diesen Fall gültig. Der einzige Unterschied zwischen diesem und dem vorigen Falle besteht darin, dass für die Kraft F ein anderer Werth zu substituiren ist, insofern in diesem Falle ausser der Kraft F auch die Kraft K in Bezug auf die Drehachse ein statisches Moment hat, welches von Null verschieden ist. Das statische Moment dieser letzteren Kraft ist gleich $K \cdot \varrho \sin \varphi$ (§ 93, Fig. 378), oder wenn der Zapfenreibungscoefficient $\sin \varphi$ mit f bezeichnet wird, gleich $f K \varrho$ zu setzen. Nach Gleichung 504) ist also die Winkelbeschleunigung:

$$\varepsilon = \frac{Fr - fK\varrho}{T},$$

und die dieser Winkelbeschleunigung entsprechende Peripherie-Beschleunigung des rollenden Kreises:

$$p = r\varepsilon = \frac{Fr^2 - fK\varrho r}{T} = \frac{F - f\frac{\varrho}{r}K}{\left(\frac{T}{r^2}\right)}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wenn die auf den Umfang reducirte Masse $\frac{T}{r^2} = \mu$ gesetzt wird, für F der Werth:

$$568) \quad F = \mu p + f \frac{\varrho}{r} K.$$

Wenn man diesen Werth in Gleichung 563) substituirt, so erhält man:

$$Mp = Mg \sin\alpha + \sin\alpha . K \cos\beta - \cos\alpha . K \sin\beta - \mu p - f \frac{\varrho}{r} K.$$

Nach Substitution der in den Gleichungen 565) und 566) gefundenen Werthe nimmt diese Gleichung, für p aufgelöst, die Form an:

$$569) \quad p = \frac{(M+m) g \sin\alpha - f K \frac{\varrho}{r}}{M + m + \mu}.$$

Aus dieser Gleichung würde man die Beschleunigung p berechnen können, wenn die Kraft K bekannt wäre. Durch Addition der Quadrate von den beiden Gleichungen 565) und 566) erhält man die Gleichung:

$$K^2 = m^2 g^2 + m^2 p^2 - 2 m^2 p g \sin\alpha, \quad \text{oder:}$$

$$570) \quad K = mg \sqrt{1 - \frac{p}{g}\left(2 \sin\alpha - \frac{p}{g}\right)}.$$

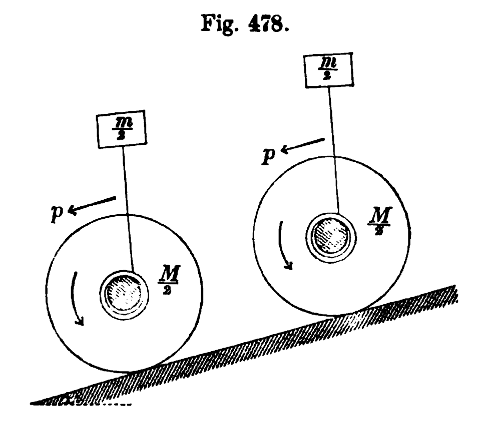
Diese Gleichung zeigt, dass der Unterschied zwischen K und mg um so kleiner ist, je weniger die Grösse p von Null verschieden ist (für $p = g \sin\alpha$ wird $K = mg \cos\alpha$, und für $p = 0$ wird $K = mg$). Um also einen Näherungswerth zu erhalten, kann man in Gleichung 569) zunächst $K = mg$ setzen und die Beschleunigung p berechnen aus der Gleichung:

$$571) \quad p = \frac{(M+m) g \sin\alpha - f m g \frac{\varrho}{r}}{M + m + \mu}.$$

Nach Substitution dieses Werthes in Gleichung 570) erhält man einen genaueren Werth für K, welcher, in Gleichung 569) substituirt, alsdann zu einem genaueren Werthe für p führt. Es zeigt sich indessen, dass bei den meisten praktischen Anwendungen diese Correction ihrer Geringfügigkeit wegen überflüssig ist, insofern die obigen Gleichungen ohnehin nur für kleine Werthe des Neigungswinkels α gültig sind (nämlich für solche Werthe, welche der Bedingung des Rollens noch genügen), und die Werthe des Reibungscoefficienten f ebenfalls nur annähernd bekannt sind. Man kann daher ohne Bedenken die Gleichung 571) unmittelbar zur Berechnung der Beschleunigung p benutzen.

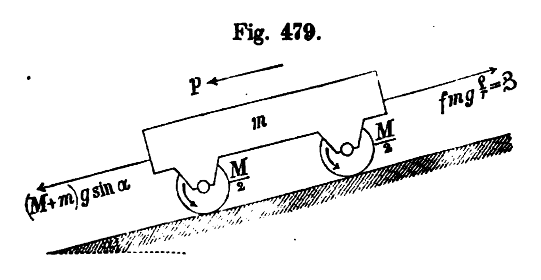
Wenn die fortschreitende Masse m — anstatt wie in Fig. **475** unterhalb des Ringes an einem Faden zu hängen — oberhalb desselben an einer auf den Ring sich stützenden Stange befestigt ist, so wird dadurch keine Aenderung in der Berechnungsweise bedingt. Wenn ferner in der Gleichung 571) die Grössen M, m, μ vertauscht werden resp. mit den Grössen $\frac{M}{2}$, $\frac{m}{2}$, $\frac{\mu}{2}$, so wird dadurch die Grösse p ebenfalls nicht geändert. Denkt man sich die in Fig. **478** dargestellten beiden Massen-Systeme ihre Bewegungen mit gleichen Anfangsgeschwindigkeiten gleichzeitig beginnend, so findet man, dass die beiden fortschreitenden Massen auch durch eine Stange verbunden oder zu einem Körper vereinigt werden können, ohne dass die Beschleunigungen der beiden Massen-Systeme dadurch verändert würden.

Fig. **478**.



Man überzeugt sich auf diese Weise, dass die Gleichung 571) auch für die Beschleunigung des in Fig. **479** dargestellten Fuhrwerkes als gültig betrachtet werden darf, dass also die Beschleunigung desselben bestimmt werden kann, wie die eines unter Einwirkung der beiden in Fig. **479** angegebenen Kräfte sich bewegenden einfachen materiellen Punktes, sobald zu den wirklichen Massen $M + m$ noch die auf den Umfang der rollenden Kreise reducirten rollenden Massen μ hinzugerechnet werden. Die Zapfenreibung äussert also ihren Einfluss als eine der fortschreitenden Bewegung des Massen-Systems entgegenwirkende Widerstandskraft von der Grösse:

Fig. **479**.



$$572)\quad \mathfrak{Z} = fmg \cdot \frac{\varrho}{r},$$

welche durch das Product aus dem wirklichen Zapfenreibungs-Widerstande $f.mg$ in das Verhältniss des Zapfenhalbmessers zum Radhalbmesser dargestellt und der auf den Radumfang reducirte Zapfenreibungs-Widerstand genannt wird.

Wenn die Räder die Formen von cylindrischen Scheiben haben, so ist $\mu = \frac{M}{2}$ zu setzen, und wenn ferner $m = 5M$, $\sin\alpha = 0{,}1$, $f = 0{,}01$, $\frac{\varrho}{r} = 0{,}1$ in Gleichung 571) gesetzt wird, so ergiebt sich für die Beschleunigung der Werth:

$$p = 9{,}81 \cdot \left(\frac{6 \,.\, 0{,}1 - 0{,}01 \,.\, 5 \,.\, 0{,}1}{6{,}5}\right) = 0^m{,}898.$$

Ohne das Vorhandensein sonstiger Widerstände würde also z. B. in 20 Secunden die Geschwindigkeit des Wagens von Null bis $17^m{,}96$ zunehmen, und die in dieser Zeit zurückgelegte Wegeslänge 179,6 Meter betragen.

Denjenigen Neigungswinkel, bei welchem ohne das Vorhandensein sonstiger Widerstände die Bewegung des Wagens eine gleichförmige sein würde, findet man aus Gleichung 571), indem man darin $p = 0$ setzt, also aus der Gleichung:

$$573) \quad \sin\alpha = f\frac{\varrho}{r}\left(\frac{m}{M+m}\right).$$

Hiernach würde z. B. bei den oben angenommenen Zahlenwerthen ein Gefälle von $\frac{1}{1200}$ (oder von $0^m{,}000\,833$ auf jeden Meter der Bahnlänge) ausreichen, um die verzögernde Wirkung des Zapfenreibungs-Widerstandes auszugleichen.

§ 126.

Widerstand der rollenden Reibung.

Bei kleinen Werthen des Reibungs-Coefficienten f und des Verhältnisses $\frac{\varrho}{r}$ hat der auf den Radumfang reducirte Zapfenreibungs-Widerstand — wie das vorige Zahlenbeispiel zeigt — eine so geringe Grösse, dass noch ein anderer — bisher unberücksichtigt gebliebener — Widerstand seinen Einfluss neben jenem bemerkbar macht und im Vergleich mit demselben nicht mehr als verschwindend klein anzusehen ist. Wäre der rollende Körper nebst dessen Unterlage absolut fest und hart, so würde bei der geringsten Neigung der Bahn schon der Schwerpunkt ausserhalb der Verticalen der Unterstützungsstelle liegen, folglich eine beschleunigte Bewegung stattfinden, und das Gleichgewicht des sich selbst überlassenen ruhenden Körpers nicht möglich sein. In Wirklichkeit wird jedoch durch den auf die Berührungsstelle sich concentrirenden Druck eine geringe Zusammendrückung daselbst

hervorgebracht; in Folge dessen erweitert sich die Berührungsstelle zu einer Fläche, welche auch bei einer geringen Neigung der Bahn noch dem Schwerpunkte eine Unterstützung gewährt (Fig. 480) und einen Gleichgewichtszustand möglich macht, zu dessen Aufrechterhaltung ohne jene Zusammendrückung eine bergaufwärts wirkende Widerstandskraft W erforderlich sein würde, von gleicher Grösse mit der bergabgerichteten Seitenkraft der Schwere (Fig. 481).

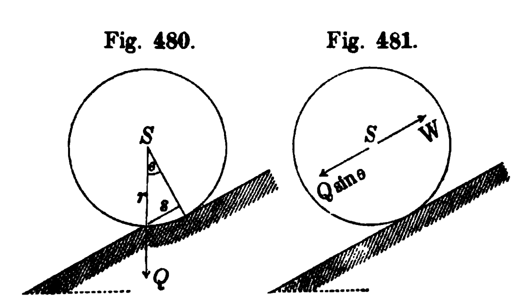


Fig. 480. Fig. 481.

Es kann also der Einfluss jener Zusammendrückung aufgefasst werden wie das Vorhandensein einer im Schwerpunkte angreifenden der fortschreitenden Bewegung des rollenden Körpers entgegenwirkenden Widerstandskraft, welche der Widerstand der rollenden Reibung genannt wird.

Um die Grösse dieses Widerstandes zu bestimmen, würde man durch Versuche denjenigen Neigungswinkel θ zu ermitteln haben, bei welchem $W = Q \sin \theta$, und die Bewegung des hinabrollenden Körpers eine gleichförmige ist. Nach Analogie des in Bezug auf die Bestimmung der gleitenden Reibung angewendeten Verfahrens würde dieser Winkel θ als der Reibungswinkel für rollende Reibung zu bezeichnen, und die Tangente dieses Winkels (wofür wegen Kleinheit derselben auch der Sinus oder die Winkelzahl θ selbst genommen werden kann) als der Coefficient der rollenden Reibung in Rechnung zu bringen sein. Im Gegensatze zu den Gesetzen der gleitenden Reibung hat sich jedoch aus solchen Versuchen ergeben, dass die Grösse dieses Winkels θ als eine mit dem Halbmesser des rollenden Körpers veränderliche Grösse anzunehmen ist, dass es nicht die Grösse $\sin \theta$, sondern vielmehr das Product:

574) $r \sin \theta = s$

ist, welches bei gleicher Material-Beschaffenheit annähernd als eine constante Grösse betrachtet werden darf. Der Reibungs-Coefficient für die rollende Reibung:

575) $\sin \theta = \frac{s}{r}$, oder: $\theta = \frac{s}{r}$

muss daher für jeden besonderen Werth des Halbmessers r nach Gleichung 575) besonders berechnet werden.

Für Eisen auf Eisen (sowie auch für hartes Holz auf hartem Holze) kann im Mittel die Grösse $s = 0^m,0005$ gesetzt werden. Demnach würde z. B. für den Halbmesser $r = 0^m,25$ der Coefficient $\theta = \frac{0,0005}{0,25} = 0,002$ zu setzen sein; für einen Halbmesser $r = 0^m,5$ dagegen wäre $\theta = \frac{0,0005}{0,5} = 0,001$ zu setzen. Wenn der Körper gleichförmig hinabrollen soll, so müsste die Bahn im ersteren Falle um einen Winkel von $0^0\, 3'\, 26''$, im letzteren Falle um einen Winkel von $0^0\, 1'\, 43''$ geneigt sein.

Abgesehen von diesem Einflusse des Halbmessers r kann die Wirkung der rollenden Reibung auf gleiche Weise wie die der gleitenden Reibung berechnet werden. Der Widerstand der rollenden Reibung ist gleich dem Producte aus dem Normaldrucke des rollenden Körpers gegen die Bahn in den Coefficienten der rollenden Reibung. Für einen auf horizontaler Bahn rollenden Körper von der Masse M ist dieser Widerstand gleich $\theta M g$ zu setzen; für einen auf horizontaler Bahn bewegten Wagen vom Totalgewichte $(M + m) g$ dagegen ist:

$$576) \quad W = \theta\,(M + m)\,g.$$

Für eine um den kleinen Winkel α geneigte Bahn würden streng genommen diese Werthe noch mit $\cos\alpha$ zu multipliciren sein; da indessen $\cos\alpha$ nur wenig von Eins verschieden ist, so können die obigen Werthe auch für schwach geneigte Bahnen als gültig betrachtet werden.

Mit Berücksichtigung des Widerstandes der rollenden Reibung erhält man also für die Beschleunigung eines bergabrollenden Körpers (statt Gleichung 548) die Gleichung:

$$577) \quad p = \frac{Mg \sin\alpha - Mg\,\theta}{M + \mu}$$

und für die Beschleunigung des bergablaufenden Wagens (statt 571) die Gleichung:

$$578) \quad p = \frac{(M + m)\,g \sin\alpha - f m g \frac{\varrho}{r} - \theta\,(M + m)\,g}{M + m + \mu},$$

ferner für denjenigen Neigungswinkel, bei welchem die Bewegung des Wagens eine gleichförmige ist, (statt 573) die Gleichung:

$$579) \quad \sin\alpha_1 = f \frac{\varrho}{r} \left(\frac{m}{M + m}\right) + \theta.$$

Setzt man in letzterer Gleichung $f = 0{,}01$, $\varrho = 0^m{,}05$, $r = 0^m{,}5$, $\frac{m}{M} = 5$ und $\theta = 0{,}001$, so wird:

$$\sin \alpha_1 = 0{,}000\,833 + 0{,}001 = 0{,}001\,833.$$

Die Bewegung des Wagens würde also eine gleichförmige sein, wenn z. B. auf 6000^m Bahnlänge das Gefälle 11^m beträgt.

Da die Unterschiede zwischen den Sinus-Zahlen und den Winkel-Zahlen als verschwindend klein zu betrachten sind, so kann man die bei etwas stärker geneigter Bahn stattfindende Beschleunigung auch in der Weise berechnen, dass man sich den ganzen Neigungswinkel α in die beiden Theile α_1 und $\alpha - \alpha_1$ zerlegt denkt, und die Bewegung so auffasst, als ob der eine Theil α_1 zum Ueberwinden der Widerstände $\mathfrak{Z}$, W, und der Rest $\alpha - \alpha_1$ zum Hervorbringen der Beschleunigung p verwendet würde. Die letztere kann alsdann berechnet werden aus der einfacheren Gleichung:

$$580)\quad p = \frac{(M + m)\, g\, (\alpha - \alpha_1)}{M + m + \mu}.$$

Bei den oben angenommenen Zahlenwerthen würde z. B. (wenn auch hier wieder $\mu = \frac{1}{2} M$ gesetzt wird) für die Beschleunigung auf einer um das Steigungsverhältniss $\alpha = \frac{1}{200}$ geneigten Bahn der Werth sich ergeben:

$$p = \frac{6}{6{,}5} \cdot 9{,}81 \left(\frac{1}{200} - \frac{11}{6000} \right) = 0^m{,}0287.$$

Für gut construirte Eisenbahnwagen ist der Widerstands-Coefficient α_1 im Mittel gleich $\frac{1}{600}$ zu setzen, wobei jedoch zu berücksichtigen ist, dass die obigen Gleichungen nur für kleine Geschwindigkeiten gelten, und dass bei grösseren Geschwindigkeiten ausser den beiden Widerständen $\mathfrak{Z}$ und W noch die Wirkung des Luftwiderstandes in Rechnung zu bringen sein würde.

Anstatt die oben gefundenen Gleichungen zu benutzen, um aus den bekannten Werthen der Widerstands-Coefficienten die unbekannte Beschleunigung p zu berechnen, kann man auch umgekehrt die letztere durch directe Versuche bestimmen und jene Gleichungen alsdann zur Berechnung der Widerstands-Coefficienten benutzen. Wenn man auf einer Bahn von bekanntem Neigungswinkel das eine Mal den ganzen Wagen, das andere Mal die Räder für sich allein hinablaufen lässt und beide Male die Zeit t beobachtet, in welcher eine bestimmte Strecke x zurückgelegt wird, so kann man zunächst aus der Gleichung für die gleichförmig beschleunigte Bewegung $\left(x = \frac{p t^2}{2}\right)$ die Beschleunigungen

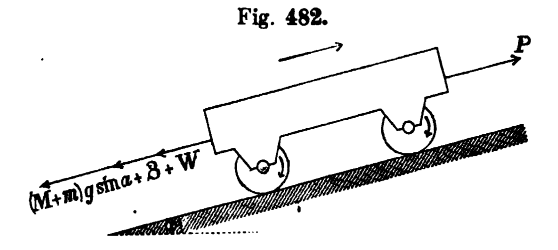
der beiden Bewegungen berechnen; und wenn man die auf solche Weise gefundenen Werthe alsdann resp. in den Gleichungen 578) und 577) für p substituirt, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen die beiden Coefficienten f und θ berechnet werden können.

Hätte man z. B. beobachtet, dass auf einer um $\frac{1}{200}$ geneigten Bahn die (wiederum als kreisförmige Scheiben vorausgesetzten) Räder jenes Wagens für sich allein eine Strecke von 100 Metern in 87,5 Secunden (also mit der Beschleunigung $0^m,02616$) zurücklegten, so würde aus Gleichung 577) nach Substitution des Werthes $p = 0^m,02616$ sich ergeben, dass $\theta = 0,001$ war; und wenn ferner beobachtet wäre, dass der ganze Wagen dieselbe Strecke in 83,6 Secunden (also mit der Beschleunigung $0^m,0287$) zurücklegte, so würde aus Gleichung 578) nach Substitution der Werthe $p = 0^m,0287$ und $\theta = 0,001$ sich ergeben, dass $f = 0,01$ war.

Die beiden Widerstände $\mathfrak{Z}$ und W wirken immer der Bewegungsrichtung entgegen. Wenn also die Bewegung bergan gerichtet ist, so nimmt die Geschwindigkeit des sich selbst überlassenen Wagens in jeder Secunde ab um die Grösse:

$$581) \quad p = \frac{(M+m)\,g \sin\alpha + \mathfrak{Z} + W}{M + m + \mu},$$

Fig. 482.



und für die zum gleichförmigen Berganziehen des Wagens erforderliche Zugkraft ergiebt sich nach Fig. 482 die Gleichung:

$$582) \quad P = (M+m)\,g \sin\alpha + \mathfrak{Z} + W,$$

worin die Grössen $\mathfrak{Z}$ und W wiederum resp. nach den Gleichungen 572) und 576) zu bestimmen sind.

Wenn z. B. bei den oben angenommenen Zahlenwerthen das Gewicht der fortschreitenden Masse $mg = 5000$ Kil., und das Gewicht der rollenden Masse $Mg = 1000$ Kil. beträgt, so ist zum gleichförmigen Berganziehen des Wagens auf einer um $\frac{1}{300}$ ansteigenden Bahnstrecke die Zugkraft erforderlich:

$$P = \frac{6000}{300} + 0,01 \,.\, 5000 \,.\, 0,1 + 0,001 \,.\, 6000 = 31 \text{ Kil.},$$

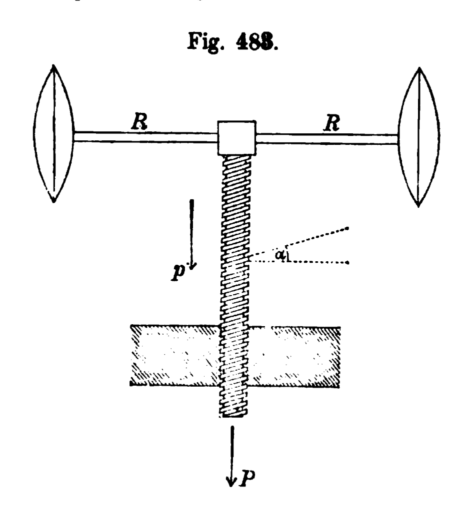
wovon 5 Kil. auf Ueberwindung des Zapfenreibungs-Widerstandes und 6 Kil. auf Ueberwindung des Widerstandes der rollenden Reibung verwendet werden.

§ 127.

Beschleunigte Bewegung der Schraube.

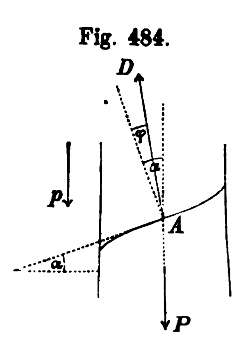
Um die Beschleunigung p zu bestimmen, welche der Schraubenspindel (Fig. 483) durch eine in der Achsenrichtung wirkende Kraft P ertheilt wird, hat man zunächst (auf ähnliche Weise wie in § 99, Fig. 394 geschehen) nach der Theorie des Reibungswinkels die Richtungen der Druckkräfte D zu bestimmen, welche an den Berührungsstellen von dem festliegenden Muttergewinde auf die Schraubenspindel übertragen werden. Für den Fall, dass die fortschreitende Bewegung im Sinne der Kraft P stattfindet, weicht die Richtung des an der Berührungsstelle A auf die Schraube übertragenen Druckes D um den Reibungswinkel φ nach obenhin von der Richtung der Normalen, folglich nach Fig. 484 um den Winkel $\alpha - \varphi$ von der Achsenrichtung ab.

Fig. 483.



Wenn man jede dieser Druckkräfte alsdann zerlegt in die tangentiale Seitenkraft $D \sin(\alpha - \varphi)$ und die parallel zur Achse gerichtete Seitenkraft $D \cos(\alpha - \varphi)$, so erhält man nach dem Gesetze des Schwerpunktes für die in der Achsenrichtung erfolgende Beschleunigung desselben die Gleichung:

Fig. 484.



$$p = \frac{P - \Sigma[D \cos(\alpha - \varphi)]}{M},$$

Fig. 485.

worin M die ganze an der Schraubenbewegung theilnehmende Masse bezeichnet. Da die Grösse $\cos(\alpha - \varphi)$ gemeinschaftlicher Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder ist, so kann dieser Gleichung auch die Form gegeben werden:

583) $\cos(\alpha - \varphi)\,\Sigma(D) = P - Mp.$

Für die Winkelbeschleunigung, mit welcher die gleichzeitig neben der fortschreitenden Bewegung stattfindende Drehbewegung geschieht, ergiebt sich ferner aus Fig. **485** nach dem Gesetze der Winkelbeschleunigung (§ 113) die Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{\Sigma[D \sin(\alpha - \varphi)\,\varrho]}{T},$$

in welcher T das Trägheitsmoment der ganzen Masse in Bezug auf die Achse der Schraube bezeichnet. Wenn die auf den mittleren Schraubenhalbmesser ϱ reducirte Masse $\frac{T}{\varrho^2}$ mit μ bezeichnet wird, so ist $T = \mu\varrho^2$ zu setzen, und der obigen Gleichung kann daher auch die Form gegeben werden:

584) $\sin(\alpha - \varphi)\,\Sigma(D) = \mu\,.\,\varrho\varepsilon.$

Diese letztere Gleichung nimmt, durch Gleichung 583) dividirt, die Form an:

585) $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{\mu\,.\,\varrho\varepsilon}{P - Mp}.$

Wie auch immer die Geschwindigkeiten der beiden Bewegungen sich ändern mögen: das Verhältniss der parallel zur Achse gerichteten zu der tangentialen Seitengeschwindigkeit des Punktes A bleibt stets gleich dem Steigungsverhältniss der mittleren Schraubenlinie (Fig. **392**, Gleichung 414). Hieraus folgt, dass auch das Verhältniss der pro Secunde erfolgenden Zunahmen dieser beiden Seitengeschwindigkeiten stets gleich $\operatorname{tg}\alpha$ bleibt. Es ist daher:

586) $\frac{p}{\varrho\varepsilon} = \operatorname{tg}\alpha.$

Wenn man den aus dieser Gleichung sich ergebenden Werth $\varrho\varepsilon = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha}$ in Gleichung 585) substituirt und dieselbe für p auflöst, so erhält man die Gleichung:

587) $p = \frac{P}{M + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}}.$

Die in der Achsenrichtung hervorgebrachte Beschleunigung ist daher wie die eines einfachen materiellen Punktes zu berechnen, dessen Masse die Grösse $M + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}$ hat. Für den Fall, dass die Bewegung im entgegengesetzten Sinne erfolgt,

würde $+\varphi$ mit $-\varphi$ zu vertauschen sein, und die Grösse p würde in diesem Falle die in der Achsenrichtung hervorgebrachte Verzögerung bedeuten.

Wenn der Trägheitshalbmesser mit R bezeichnet wird, so ist $\mu\varrho^2 = MR^2$ zu setzen, und wenn man zugleich $P = Mg$ setzt, so erhält man für die von der Schwere hervorgebrachte Vertical-Beschleunigung einer verticalen Schraubenspindel die Gleichung:

$$588) \quad p = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{\varrho^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi)}},$$

worin das Minuszeichen auf die sinkende und das Pluszeichen auf die steigende Bewegung sich bezieht. Diese Gleichung kann annähernd auch für den in Fig. 483 dargestellten Fall als gültig angesehen werden, wenn die Masse der Schraubenspindel klein ist im Verhältniss zu den in der Entfernung R von der Achse angebrachten Schwungmassen.

Setzt man z. B. $\frac{R}{\varrho} = 20$, $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2$ und $\operatorname{tg} \varphi = 0{,}08$ (oder $\alpha = 11^0\ 20'$ und $\varphi = 4^0\ 35'$), so ergiebt sich für die Beschleunigung der vertical abwärts gerichteten Bewegung der Werth:

$$p = \frac{g}{16\,900} = 0^m{,}000\,58,$$

und für die der Drehbeschleunigung entsprechende Peripheriebeschleunigung der Schwungmassen der Werth:

$$R\varepsilon = \frac{R}{\varrho}\,\frac{p}{\operatorname{tg}\alpha} = 0^m{,}058.$$

Bei der steigenden Bewegung dagegen würde die Verticalgeschwindigkeit in jeder Secunde um die Grösse $0^m{,}0014$, und die der Drehbewegung entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit der Schwungmassen in jeder Secunde um die Grösse $0^m{,}14$ abnehmen.

§ 128.

Bedingungen der beschleunigt fortschreitenden Bewegung.

Mittelst des in § 43 erklärten Verfahrens können sämmtliche auf einen festen Körper wirkende Kräfte unter allen Umständen ersetzt werden durch eine im Schwerpunkte angreifende resultirende Einzelkraft R und ein resultirendes Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M}$. Die Bewegung, welche dem anfangs im Ruhezustande befindlichen Körper durch die Kräfte ertheilt wird, ist im Allgemeinen eine fortschreitende Bewegung, verbunden mit einer gleichzeitigen Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt. Erstere kann als Wirkung der Einzelkraft R, letztere als Wirkung des Kräftepaares $\mathfrak{M}$ angesehen werden — wie am Schlusse des § 121 bereits erklärt wurde.

Soll die von den Kräften hervorgebrachte Bewegung lediglich in einer fortschreitenden Bewegung bestehen, so muss $\mathfrak{M}$ gleich Null sein, in welchem Falle die Kraft R für sich allein die Mittelkraft sämmtlicher vorhandenen Kräfte bildet. Bedingung der fortschreitenden Bewegung ist daher: **es muss die Resultirende sämmtlicher Kräfte eine Einzelkraft sein, deren Richtungslinie durch den Schwerpunkt hindurchgeht.** Mit der Richtung dieser Mittelkraft fällt zugleich die Richtung der hervorgebrachten beschleunigten fortschreitenden Bewegung zusammen.

Mit Hülfe dieses Satzes können z. B. die Stabilitäts-Bedingungen für einen auf horizontaler Unterlage in Bewegung versetzten Körper auf folgende Weise ermittelt werden. Wenn dem ruhenden Körper durch die horizontale Zugkraft H eine fortschreitende — d. h. nicht mit gleichzeitigem Umkippen verbundene — Bewegung längs der horizontalen Unterlage ertheilt werden soll, so muss die Mittelkraft R von den vier auf den Körper wirkenden Kräften: N (normaler Gegendruck der Unterlage), fN (Reibungswiderstand), Mg (Gewicht des Körpers) und H — jedenfalls in die Horizontale des Schwerpunktes fallen (Fig. 486).

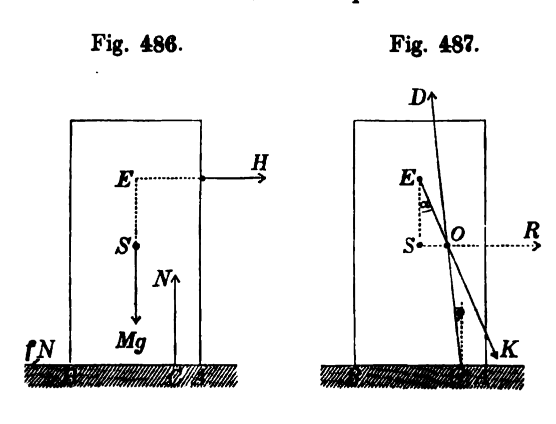


Fig. 486. Fig. 487.

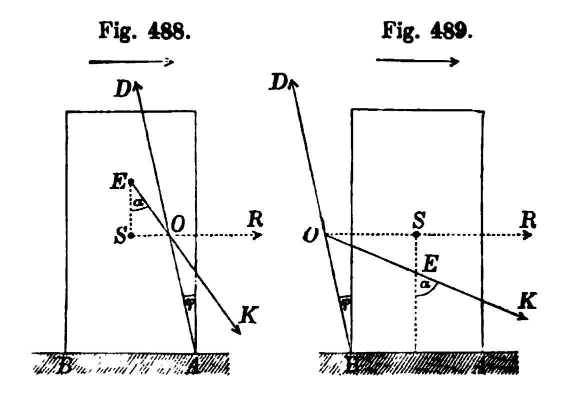
Die beiden (in derselben Vertical-Ebene wirkend vorausgesetzten) Kräfte H und Mg können ersetzt werden durch ihre Mittelkraft K; ebenso die beiden Kräfte N und fN durch ihre Mittelkraft D. Der Winkel α, welchen die Kraft K mit der Verticalen einschliesst, ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$589)\quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{Mg}.$$

Die Kraft D weicht um den Reibungswinkel φ von der Verticalen ab; für die Lage ihres Angriffspunktes bilden die Punkte A und B die äussersten Grenzen, bis zu welchen derselbe resp. nach rechts oder links sich verschieben kann.

Die Mittelkraft R ist zugleich die Mittelkraft der beiden Kräfte K und D; es muss daher der Durchschnittspunkt O, in welchem die Horizontale des Schwerpunktes von der Richtungslinie der Kraft K geschnitten wird, zugleich in der Richtungslinie der Kraft D liegen (Fig. 487). Man findet also den Angriffspunkt C, indem man von O aus eine gerade Linie zieht, welche um den Reibungswinkel φ von der Verticalen abweicht. Wenn der auf solche Weise zu bestimmende Stützpunkt C nicht ausserhalb der beiden Grenzpunkte A und B liegt, so wird ein Umkippen nicht stattfinden.

Die beiden Grenzfälle, in denen der Punkt C mit einem der beiden Grenzpunkte A oder B selbst zusammenfällt, sind in Fig. 488 und Fig. 489 dargestellt. Denkt man sich in einem dieser beiden Fälle die in dem Punkte E angreifende horizontale Zugkraft H — und in Folge dessen auch den Winkel α — noch etwas vergrössert, so findet ein Umkippen statt — und zwar bei dem in Fig. 488 dargestellten Falle ein Umkippen um die Kante A (nach rechts herüber); bei dem in Fig. 489 dargestellten Falle dagegen ein Umkippen um die Kante B (nach links herüber).



Für die Beschleunigung der fortschreitenden Bewegung, welche der Körper ausführt, sobald die Stabilitäts-Bedingungen gegen gleichzeitiges Umkippen erfüllt sind, erhält man nach dem Gesetze des Schwerpunktes die Gleichung:

$$p = \frac{R}{M} = \frac{H - fN}{M},$$

welche nach Substitution der Werthe $N = Mg$, $H = Mg \operatorname{tg} \alpha$, $f = \operatorname{tg} \varphi$ die Form annimmt:

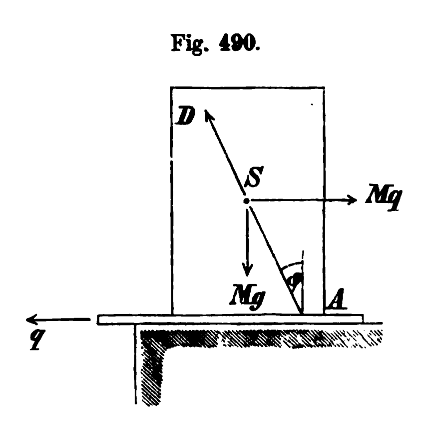
$$590) \quad p = g (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi)$$

und zeigt, dass in dem hier vorausgesetzten Falle des wirklichen

Eintretens einer fortschreitenden Bewegung der Winkel α immer grösser ist als der Winkel φ.

Auf gleiche Weise können auch die Stabilitäts-Bedingungen für einen auf beschleunigt fortschreitender Unterlage befindlichen Körper ermittelt werden. Wenn q die Beschleunigung ist, mit welcher die Unterlage von rechts nach links bewegt wird, so geschieht die relative Bewegung des Körpers in Bezug auf die fortschreitende Unterlage, wie wenn ausser den wirklich vorhandenen Kräften noch eine im Schwerpunkte angreifende von links nach rechts gerichtete Horizontalkraft $H = Mq$ auf den Körper wirkte (Fig. 490). Es ist also nur nöthig, das in Fig. 487 angegebene Constructionsverfahren auf den speciellen Fall anzuwenden, in welchem die Punkte E und O beide mit dem Schwerpunkte S zusammenfallen. Man findet auf diese Weise, dass durch einen von rechts nach links gerichteten Horizontalstoss gegen die Unterlage — wie gross auch immer die derselben dadurch ertheilte Beschleunigung sein möge — niemals ein Umsturz des auf derselben stehenden Körpers bewirkt werden kann: sobald der Winkel, den die von S nach A gezogene Linie mit der Verticalen einschliesst, nicht kleiner ist als der Reibungswinkel.

Fig. 490.



§ 129.

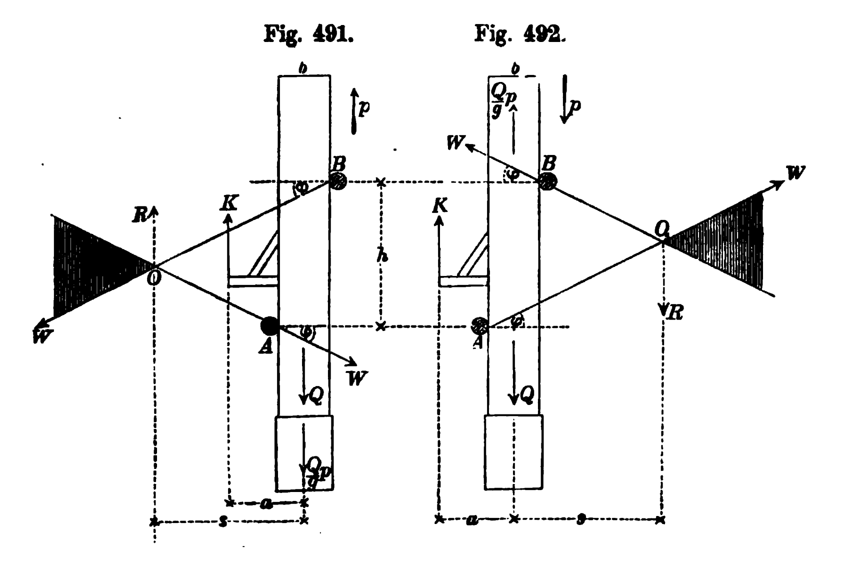
Beschleunigte Bewegung des Pochstempels.

In § 71 wurde gezeigt, wie man die zum gleichförmigen Heben des Pochstempels erforderliche Kraft berechnen kann. Wenn die wirklich angewendete Hubkraft grösser oder kleiner wäre als diese zum gleichförmigen Heben erforderliche Kraft, so würde die aufsteigende Bewegung des Pochstempels eine beschleunigte oder verzögerte sein, auf alle Fälle aber eine fortschreitende, da durch die festen Querstangen A und B, welche demselben unten und oben als Führung dienen, jede Drehbewegung von vornherein unmöglich gemacht wird.

Zur Berechnung der zum Hervorbringen einer bestimmten Beschleunigung p erforderlichen Kraft K kann man das d'Alembert'sche Gesetz (§ 107) benutzen, indem man die der Beschleunigung p entsprechende Kraft $\frac{Q}{g} \, . \, p$ in entgegengesetzter Richtung genommen hinzufügt und alsdann die Bedingung des Gleichgewichtes anwendet. Nach Fig. **491** erhält man dann als Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt O:

$$0 = \left(Q + Q\,\frac{p}{g}\right) s - K\,(s - a).$$

Fig. 491. Fig. 492.



Wenn man hierin für s den bereits in § 71 (Gleichung 254) gefundenen Werth $\frac{h}{2f}$ substituirt, so ergiebt sich für die zum Hervorbringen der Beschleunigung p erforderliche Kraft K der Werth:

$$591) \quad K = Q \left\{ \frac{1 + \frac{p}{g}}{1 - 2f\frac{a}{h}} \right\},$$

oder für die von der gegebenen Kraft K hervorgebrachte Beschleunigung p die Grösse:

$$592) \quad p = g \left\{ \frac{K}{Q} \left(1 - 2f\frac{a}{h}\right) - 1 \right\}.$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass $p = 0$ wird, wenn $K = \frac{Q}{1 - 2f\frac{a}{h}}$ ist, und negativ, wenn $K < \frac{Q}{1 - 2f\frac{a}{h}}$. Setzt man wieder $f = 0,4$ und $\frac{a}{h} = \frac{3}{4}$, so findet man übereinstimmend mit dem schon in § 71 gefundenen Resultate, dass die Bewegung eine beschleunigte oder verzögerte ist, jenachdem K grösser oder kleiner ist als $\frac{5}{2}\,Q$.

Bei der vertical abwärts gerichteten Bewegung des Pochstempels würde der Punkt O_1 (Fig. 492) der Durchschnittspunkt der beiden von den Punkten A und B ausgehenden Gegendrücke sein, und wenn diese Bewegung mit der Beschleunigung p geschieht, so ist die nach dem d'Alembert'schen Principe hinzuzufügende Kraft $Q\,.\,\frac{p}{g}$ als eine aufwärts gerichtete Kraft in Rechnung zu bringen. Man erhält also für diesen Fall nach Fig. 492 die Gleichung:

$$0 = K(s + a) - Q\left(1 - \frac{p}{g}\right)s,$$

welche auf dieselbe Weise wie oben für K resp. p den Werth liefert:

$$593)\quad K = Q\left\{\frac{1 - \frac{p}{g}}{1 + 2f\frac{a}{h}}\right\},\ \text{oder:}$$

$$594)\quad p = g\left\{1 - \frac{K}{Q}\left(1 + 2f\frac{a}{h}\right)\right\}.$$

Setzt man wieder $f = 0,4$ und $\frac{a}{h} = \frac{3}{4}$, so findet man aus dieser Gleichung, dass $K = \frac{5}{8}\,Q$ sein muss, wenn die Beschleunigung $p = 0$ sein soll, d. h. wenn die Bewegung des Sinkens gleichförmig erhalten werden soll. Wäre dagegen K grösser oder kleiner als $\frac{5}{8}\,Q$, so würde die sinkende Bewegung des Pochstempels im ersteren Falle eine verzögerte, im letzteren eine beschleunigte sein.

FÜNFTER ABSCHNITT.

Statik elastischer Körper.

ZWANZIGSTES CAPITEL.

Widerstand einer prismatischen Stange gegen Verlängerung und Verkürzung.

§ 130.

Elasticitäts-Widerstände.

In den vorigen beiden Abschnitten wurden die (sogenannten) festen Körper vorläufig als absolut feste Körper behandelt; es wurde angenommen: dass die materiellen Punkte eines solchen Körpers durch starre Linien mit einander verbunden sind, oder durch anziehende und abstossende Kräfte, welche den äusseren Kräften gegenüber als passive Widerstände sich verhalten und stets in solcher Weise ihre Wirksamkeit äussern, wie es erforderlich ist, um die Abstände der materiellen Punkte vollkommen unverändert zu erhalten, also jede Formänderung des Körpers gänzlich zu verhindern.

Diese Annahme entspricht — wie in § 39 schon erwähnt wurde — auch bei den festesten Körpern nur annäherungsweise der wirklichen Beschaffenheit jener Verbindungen. In Wirklichkeit sind die materiellen Punkte eines solchen Körpers nicht zu einem starren, unveränderlichen, sondern zu einem elastischen Systeme mit einander verbunden — durch Kräfte, welche mit den Abständen der materiellen Punkte nach bestimmten Gesetzen sich ändern. Diese Elasticitäts-Kräfte wirken zwar jeder Formänderung des Körpers als Widerstände entgegen, jedoch in einer Weise, welche nicht ausreicht, um diese Formänderung ganz zu verhüten; insofern sie diejenige Grösse, welche zur Verhinderung der entstehenden Formänderung erforderlich gewesen wäre, allemal erst

dann erreichen können, wenn eine gewisse Formänderung bereits wirklich eingetreten ist.

Wenn an den Endpunkten einer geradlinigen Stange zwei gleich grosse entgegengesetzte Zugkräfte wirken, so tritt unter allen Umständen eine Verlängerung der Stange ein — wie gross auch immer die Festigkeit des Materials, und wie klein auch immer die Intensität jener äusseren Zugkräfte sein möge. Die Elasticitäts-Widerstände der Stange wirken zwar dieser Verlängerung entgegen, erreichen aber erst bei einer bestimmten Grösse der Verlängerung diejenige Grösse, welche erforderlich gewesen wäre, um von vornherein die Wirkung der äusseren Kräfte aufzuheben und die Verlängerung im Entstehen schon zu verhindern.

Die Form eines von äusseren Kräften im Gleichgewicht gehaltenen Körpers weicht unter allen Umständen von seiner ursprünglichen Form ab. Zur vollständigen Lösung der im dritten Abschnitte behandelten Aufgabe, betreffend die Gleichgewichtszustände fester Körper, ist daher noch erforderlich, die jenen Gleichgewichtszuständen entsprechenden, von den äusseren Kräften hervorgebrachten Form-Abweichungen zu bestimmen, und die Bedingungen zu finden, unter welchen die Widerstandsfähigkeit des Körpers ausreicht, um den Gleichgewichtszustand zwischen inneren und äusseren Kräften überhaupt möglich zu machen.

Die Gesetze, nach welchen bei den verschiedenen Arten von elastischen Körpern die Elasticitäts-Widerstände mit den Abständen der materiellen Punkte oder mit den Formen der Körper sich ändern, müssen zu diesem Zwecke durch Versuche zuvor ermittelt werden. Im Uebrigen behalten die im dritten Abschnitte gefundenen allgemeinen Gesetze der Statik auch für den elastischen Körper ihre Gültigkeit. Denn der Gleichgewichts-Zustand eines von äusseren Kräften in verbogener oder verzerrter Form erhaltenen elastischen Körpers würde keine Störung erleiden, wenn mit Beibehaltung dieser Form-Abweichung der elastische Körper in einen absolut festen Körper verwandelt würde. Es müssen daher für die äusseren Kräfte, welche den elastischen Körper in diesem Gleichgewichts-Zustande erhalten, dieselben allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen gelten, welche bei einem absolut festen Körper gleicher Form anzuwenden wären. Dasselbe gilt auch von den inneren Kräften oder den Elasticitäts-Widerständen. Denkt man sich den Körper durch einen beliebigen Schnitt in zwei Theile zerlegt und an den Schnittstellen äussere Kräfte angebracht, welche an jedem der beiden Theile den früheren Gleichgewichtszustand genau wieder herstellen — diejenigen Kräfte also,

welche vorher als innere Kräfte thätig waren — so gilt nunmehr von jedem der beiden Theile, was vorher vom Ganzen galt, und durch Wiederholung dieses Verfahrens können die an jeder beliebigen Stelle des elastischen Körpers wirkenden inneren Kräfte ebenfalls der früheren Untersuchungsweise zugänglich gemacht werden. Die Kenntniss der Elasticitäts-Gesetze reicht daher aus, um die Statik elastischer Körper zurückführen zu können auf die schon bekannte Lehre vom Gleichgewichte absolut fester Körper.

§ 131.

Elasticitäts-Modulus.

Einer von den Fundamental-Versuchen der Elasticitäts-Lehre besteht darin: dass man eine am oberen Endpunkte aufgehängte geradlinige prismatische Stange mit unten angehängten Gewichten belastet und die Verlängerungen beobachtet, welche der Stange von den verschiedenen Belastungen ertheilt werden. Derartige Versuche führen zu folgenden Resultaten:

1) Solange die Spannung der Stange eine gewisse Grenze — die sogenannte Elasticitäts-Grenze (§ 132) — nicht überschreitet, wächst die Verlängerung proportional dem verlängernden Gewichte, und nimmt die Stange beim Wegnehmen der Belastung ihre ursprüngliche Länge wieder an. Da Spannungen, welche diese Grenze überschreiten, in praktisch ausgeführten Bau- oder Maschinen-Constructionen nicht vorkommen dürfen, so ist es zulässig, bei der Berechnung solcher Constructionen dieses Gesetz der Proportionalität zwischen Spannungen und Verlängerungen (Elasticitäts-Gesetz) als allgemein gültig anzunehmen.

2) Die Verlängerung der Stange ist proportional ihrer ursprünglichen Länge. Die Spannung — und in Folge dessen auch die Verlängerung — vertheilt sich gleichförmig über die ganze Länge der Stange. Die Verlängerungen der einzelnen Theile verhalten sich wie ihre ursprünglichen Längen. Das Verlängerungs-Verhältniss, oder der Quotient „Verlängerung dividirt durch ursprüngliche Länge" hat daher für jeden einzelnen Theil dieselbe Grösse wie für die ganze Länge und ist unabhängig von der Länge der Stange.

3) Die Verlängerung ist umgekehrt proportional dem Querschnitte der Stange. Auch über die Querschnitts-

linie der Stange vertheilt sich die Spannung gleichförmig. Eine Stange vom n-fachen Querschnitte kann angesehen werden als zusammengesetzt aus n Stangen vom einfachen Querschnitte, deren jede den n-ten Theil des angehängten Gewichtes trägt, folglich auch nur den n-ten Theil derjenigen Verlängerung erleidet, welche das ganze Gewicht an der einfachen Stange hervorbringen würde.

4) Die Verlängerung hängt ausserdem noch ab von der Art des Materials, aus welchem die Stange besteht. Gleichgeformten Stangen verschiedenen Materials werden durch gleiche Belastungen ungleiche Verlängerungen ertheilt. Um dieses ungleiche Verhalten der verschiedenen Arten von festen Körpern durch Zahlenwerthe zu charakterisiren, hat man den Begriff des Elasticitäts-Modulus eingeführt. Wenn man das von der Gewichtseinheit an einer Stange vom Querschnitte gleich der Flächeneinheit hervorgebrachte Verlängerungs-Verhältniss ausdrückt durch einen Bruch vom Zähler Eins, so ist der Nenner dieses Bruches der Elasticitäts-Modulus.

Der Elasticitäts-Modulus ist der reciproke Werth des vom Gewichte „Eins" an einer Stange vom Querschnitte „Eins" hervorgebrachten Verlängerungs-Verhältnisses.

Der numerische Werth des Elasticitäts-Modulus hängt natürlich ab von der Wahl der Flächeneinheit und der Gewichtseinheit.

Eine schmiedeiserne Stange von 1 Quadratmillimeter Querschnitt, belastet mit einem Gewichte von 1 Kilogramm, verlängert sich um $\frac{1}{20\,000}$ ihrer ursprünglichen Länge. Der Elasticitäts-Modulus für Schmiedeisen ist daher gleich 20 000 zu setzen, wenn der Millimeter als Längeneinheit, und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen wird.

(Eine schmiedeiserne Stange von 1 Quadratzoll Querschnitt, belastet mit einem Gewichte von 1 Pfund, verlängert sich um $\frac{1}{24\,000\,000}$ ihrer ursprünglichen Länge. Der Elasticitäts-Modulus für Schmiedeisen würde also gleich 24 000 000 zu setzen sein, wenn der Zoll — statt des Millimeters — als Längeneinheit, und zugleich das Pfund — statt des Kilogramms — als Gewichtseinheit gewählt wurde.)

Wenn der Elasticitäts-Modulus des Materials mit E bezeichnet wird — für den Millimeter als Längeneinheit und das Kilogramm als Gewichtseinheit — so ist $\frac{1}{E}$ das Verlängerungs-Verhältniss, welches 1 Kil. Belastung an einer Stange von 1 Quadratmillimeter Querschnitt hervorbringt. Nach dem Gesetze der Proportionalität zwischen Spannung und Verlängerung ist das Verlängerungs-Ver-

hältniss δ, welches eine Belastung von S Kilogrammen jener Stange ertheilt, S-mal so gross, also:

$$595) \quad \delta = S \cdot \frac{1}{E}.$$

Nach dieser Gleichung lässt sich auch für eine beliebig gegebene Stange desselben Materials, von F Quadratmillimetern Querschnitt und l Millimetern Länge, die Verlängerung λ berechnen, welche durch eine beliebig gegebene Belastung von Q Kilogrammen hervorgebracht wird. Wenn man diese Stange als ein Bündel von F einzelnen Stangen von je 1 Quadratmillimeter Querschnitt ansieht, und mit S den Gewichtsantheil bezeichnet, welchen jede einzelne dieser Stangen zu tragen hat, oder die Spannung pro Quadratmillimeter des Querschnittes, so ist:

$$596) \quad S = \frac{Q}{F}$$

zu setzen; wenn ferner das der Verlängerung λ entsprechende Verlängerungs-Verhältniss mit δ bezeichnet wird, so ist:

$$597) \quad \delta = \frac{\lambda}{l}.$$

Nach Substitution der für S und δ gefundenen Werthe nimmt Gleichung 595) die Form an:

$$598) \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{Q}{F} \cdot \frac{1}{E}, \quad \text{oder:} \quad \lambda = \frac{Ql}{FE}.$$

Eine 2000^{mm} lange schmiedeiserne Stange, deren Querschnitt ein Rechteck von 10^{mm} Breite und 40^{mm} Länge bildet, erhält durch eine Belastung von 3000 Kil. die Verlängerung:

$$\lambda = \frac{3000 \,.\, 2000}{10 \,.\, 40 \,.\, 20\,000} = 0{,}75 \text{ Millimeter.}$$

Setzt man $F = 1$ und $\lambda = l$, so erhält man aus Gleichung 598): $E = Q$; d. h. der Elasticitäts-Modulus kann auch definirt werden als dasjenige Gewicht, welches die Länge einer Stange vom Querschnitt Eins verdoppeln würde — falls die bei solcher Belastung eintretende Spannung die Elasticitäts-Grenze nicht überschritte.

Wenn man (den im Eingange dieses Paragraphen beschriebenen Versuch umkehrend) die Stange am unteren — statt am oberen — Ende befestigt und das Gewicht am oberen — statt am unteren — Ende auf die Stange wirken lässt, so bringt dasselbe eine Druckspannung und in Folge dessen eine Verkürzung der Stange hervor. Es zeigt sich bei diesen letzteren Versuchen, dass für die Bestimmung der hervorgebrachten Verkürzungen genau dieselben Gesetze und Gleichungen gelten, nach

welchen im vorigen Falle die hervorgebrachten Verlängerungen zu berechnen waren, und dass bei allen Körpern der Elasticitäts-Modulus für Druckspannung mit dem Elasticitäts-Modulus für Zugspannung gleiche Grösse hat. Da Verkürzungen als negative Verlängerungen und Druckspannungen als negative Zugspannungen betrachtet werden können, so folgt hieraus, dass die allgemeine Gleichung 598) auch für negative Werthe von Q noch ihre Gültigkeit behält. Der Spannung $+ Q$ entspricht die Verlängerung $+ \lambda$, und der Spannung $- Q$ die Verlängerung $- \lambda$.

§ 132.

Elasticitäts-Grenzen und Festigkeits-Coefficienten.

Wenn bei dem im Eingange des vorigen Paragraphen erwähnten Versuche die Belastung der Stange über eine gewisse Grenze hinaus gesteigert wird, so entsteht eine Verlängerung, welche beim Aufhören der Spannung nur theilweise wieder verschwindet. Bei noch weiter fortgesetzter Steigerung der Belastung erreicht die Spannung schliesslich einen zweiten Grenzwerth, bei welchem die Widerstandsfähigkeit des Materials ganz aufhört, und ein Zerreissen der Stange eintritt.

Diejenige Grenze S, bis zu welcher die Belastung einer Stange vom Querschnitt Eins höchstens gesteigert werden kann, ohne eine bleibende Verlängerung hervorzubringen, wird die Elasticitäts-Grenze des betreffenden Materials genannt.

Wie im vorigen Paragraphen schon erwähnt wurde, fällt diese Grenze zugleich mit derjenigen Grenze zusammen, bis zu welcher das (in Gleichung 598 enthaltene) Elasticitäts-Gesetz noch als gültig betrachtet werden darf.

Diejenige Grösse μ, bis zu welcher die Belastung einer Stange vom Querschnitt Eins höchstens gesteigert werden kann, ohne ein sofortiges Zerreissen zu bewirken, wird der Festigkeits-Coefficient des betreffenden Materials genannt.

Eine schmiedeiserne Stange von 1 Quadratmillimeter Querschnitt erleidet eine bleibende Verlängerung, wenn ihre Belastung die Grösse von 15 Kil. überschreitet, und zerreisst bei einer Belastung von 40 Kil. Für Schmiedeisen ist daher die Elasticitäts-Grenze gleich 15 Kil., und der Festigkeits-Coefficient gleich 40 Kil. zu setzen.

Wenn die Elasticitäts-Grenze S und der Festigkeits-Coefficient μ des Materials aus Versuchen bekannt sind, so findet man dasjenige Gewicht P, mit welchem eine aus diesem Material bestehende Stange von F Quadratmillimetern Querschnitt höchstens belastet werden darf, wenn keine bleibende Verlängerung hervorgebracht werden soll, aus der Gleichung:

599) $P = S \,.\, F,$

und dasjenige Gewicht Q, welches gerade ausreichen würde, um ein sofortiges Zerreissen der Stange zu bewirken, aus der Gleichung:

600) $Q = \mu \,.\, F.$

Der in Gleichung 599) angegebene Werth bezeichnet zugleich den äussersten Grenzwerth, bis zu welchem bei praktisch ausgeführten Constructionen die Belastung jener Stange gesteigert werden kann, ohne die Sicherheit der Construction zu gefährden.

Die im vorigen Paragraphen als Beispiel gewählte schmiedeiserne Stange von 400 Quadratmillimetern Querschnitt würde höchstens mit dem Gewichte $P = 15 \,.\, 400 = 6000$ Kil. belastet werden dürfen, wenn die Elasticitäts-Grenze nicht überschritten werden soll. Das zum sofortigen Zerreissen dieser Stange erforderliche Gewicht hat die Grösse $Q = 40 \,.\, 400 = 16\,000$ Kil. Zur Berechnung der hervorgebrachten Verlängerung würde die allgemeine Gleichung 598) nur so lange benutzt werden dürfen, als die Belastung die Grösse von 6000 Kil. nicht überschreitet.

Da es bei praktisch auszuführenden Constructionen in der Regel nicht möglich ist, im Voraus alle Umstände gehörig zu übersehen, welche auf eine Vergrösserung der Spannungen in den einzelnen Constructions-Theilen (oder auf eine Verminderung ihrer Widerstandsfähigkeit) demnächst hinwirken können, so pflegt man statt der Grösse S einen kleineren Werth — je nach dem Grade der verlangten Sicherheit nur die Grösse $\frac{S}{2}$ oder $\frac{S}{3}, \frac{S}{4} \dots$ — als praktisch zulässige Spannung pro Quadratmillimeter der Querschnittsfläche anzunehmen.

So z. B. wird für Schmiedeisen statt 15 Kil. in der Regel nur eine Spannung von 6 bis 8 Kil. pro Quadratmillimeter als zulässig betrachtet. Die oben als Beispiel gewählte Stange von 400 □mm Querschnitt würde daher bei praktisch auszuführenden Constructionen nur für eine Belastung von 2400 bis 3200 Kil. als hinreichend stark anzunehmen sein, obwohl dieselbe schlimmsten Falls noch eine Belastung von 6000 Kil. mit Sicherheit zu tragen im Stande wäre und erst bei einer Belastung von 16 000 Kil. sofort zerreissen würde.

Auf ähnliche Weise ist zu verfahren bei der Berechnung der Tragfähigkeit einer Stange, welche einer in ihrer Längenrichtung

wirkenden Druckkraft — statt einer Zugkraft — ausgesetzt ist. Die in analoger Weise zu definirenden Elasticitäts-Grenzen und Festigkeits-Coefficienten für Druckspannungen sind durch besondere Versuche zu ermitteln, und statt derjenigen Spannung, welche der Elasticitäts-Grenze entspricht, ist alsdann — wie beim vorigen Falle — ein nach den Umständen zu wählender Bruchtheil derselben als praktisch zulässige Druckspannung anzunehmen.

Bei langen dünnen Stangen, welche durch Druckkräfte in ihrer Längenrichtung zusammengedrückt werden, ist jedoch ausserdem noch die Möglichkeit einer gleichzeitig erfolgenden seitlichen Ausbiegung ins Auge zu fassen, und aus diesem Grunde für die praktisch zulässige Druckspannung im Allgemeinen ein kleinerer Werth anzunehmen als bei kurzen dicken Stangen. Speciellere Regeln für die Berechnung der Widerstandsfähigkeit langer dünner Stangen gegen Druckkräfte ergeben sich aus der später folgenden „Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken“.

Allgemeine Regeln für die Bestimmung der bei praktisch auszuführenden Constructionen als zulässig anzunehmenden Zug- oder Druck-Spannung lassen sich nicht angeben. Je nach der Qualität der verwendeten Material-Sorte, und je nach dem Grade der Möglichkeit, alle Umstände, welche die Sicherheit der Construction gefährden können, entweder ganz auszuschliessen, oder wenigstens der Berechnung zu unterziehen, wird eine grössere oder kleinere Spannung als praktisch zulässig anzunehmen sein. Den oberen Grenzwerth dieser zulässigen Spannung bildet unter allen Umständen die Elasticitäts-Grenze des verwendeten Materials.

Da für den Elasticitäts-Modulus, die Elasticitäts-Grenze und den Festigkeits-Coefficienten auch bei den verschiedenen Sorten eines und desselben Materials sehr verschiedene Werthe sich ergeben, so ist es nicht möglich, bestimmte ein für alle Male gültige Zahlenwerthe dieser Grössen für jeden einzelnen Körper anzugeben. Um die genaueren Werthe zu ermitteln, hat man für jeden speciellen Fall mit der zu verwendenden Material-Sorte specielle Versuche anzustellen. Die in nachfolgender Tabelle (für das Kilogramm als Gewichtseinheit und den Millimeter als Längeneinheit) zusammengestellten Zahlenwerthe, von denen die in Klammern eingeschlossenen auf Druckspannung sich beziehen, sind daher nur als ungefähre Mittelwerthe anzusehen, welche bei vorläufigen allgemeineren Untersuchungen solange benutzt werden können, bis eine genauere Kenntniss der verwendeten Material-

Sorte gestattet, die in den speciellen Fällen etwa noch erforderlichen Correctionen zu bestimmen.

	Elasticitäts-Modulus.	Spannung an der Elasticitäts-Grenze.		Festigkeits-Coefficient.	
Gusseisen	10 000	7,5	[15]	12	[70]
Schmiedeisen	20 000	15	[15]	40	[30]
Eisendraht	20 000	30		70	
Stahl	20 000	25		80	
Gussstahl	30 000	65		100	
Kupfer	10 000	3		25	[50]
Kupferdraht	12 000	12		40	
Zink	9500	—		4	
Zinn	3500	—		3	
Messing	6500	5		12	[100]
Messingdraht	10 000	13		35	
Bronze	6000	3		25	
Blei	600	1		1,5	[5]
Aluminium	6750	—		20	
Silber	7300	11		29	
Gold	8000	13		27	
Platin	16 000	27		34	
Glas	7000	—		3	
Holz	1000	2	[1,8]	8	[5]
Hanfseil	—	—		5	
Lederriemen	700	—		2,5	
Stein	—	—		[5]	
Ziegelstein	—	—		[0,6]	
Mörtel	—	—		[0,4]	

EINUNDZWANZIGSTES CAPITEL.

Widerstand gegen Biegung.

§ 133.

Spannungen im gebogenen Balken.

Wenn man das eine Ende eines prismatischen Balkens in horizontaler Lage einspannt und das andere freie Ende desselben mit einem Gewichte belastet, so wird durch diese Belastung eine

Biegung des Balkens hervorgebracht; der vorher geradlinige Balken nimmt eine krummlinige Form an, deren convexe Seite nach oben gerichtet ist (Fig. 493). Betrachtet man den Balken als ein Bündel von parallel neben einander liegenden, in unverschiebbarer Lage an einander befestigten Fasern, so findet man, dass beim Eintreten dieser Biegung die oben liegenden Fasern sich verlängern, die unten liegenden sich verkürzen müssen. Zwischen der obersten und untersten Faserschicht muss irgendwo eine mittlere Faserschicht sich befinden, welche weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung erleidet; diese mittlere Faserschicht AB (Fig. 494) wird die neutrale Faser genannt.

Fig. 493.

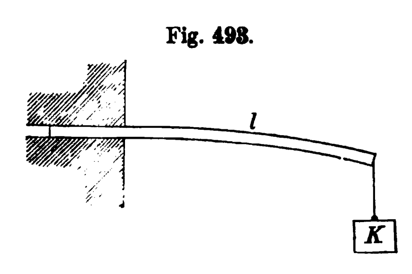
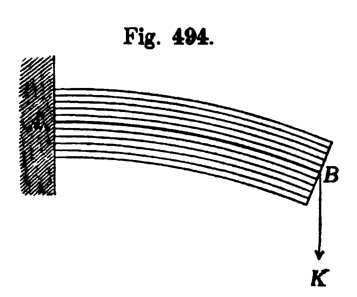


Fig. 494.



Die Verlängerungen der oberen und die Verkürzungen der unteren Fasern sind um so grösser, je weiter die Fasern von der neutralen Faser entfernt liegen. Man darf annehmen, dass die einzelnen Querschnitts-Ebenen des Balkens, welche vor dem Eintreten der Biegung rechtwinkelig zur geradlinigen Achse des Balkens standen, annäherungsweise auch nach eingetretener Biegung noch ihre ebene Form und ihre rechtwinkelige Lage zu der nunmehr gekrümmten Achsenlinie des Balkens überall beibehalten. Die beiden sehr nahe bei einander liegenden Querschnitts-Ebenen M und N, welche vorher einander parallel waren, nehmen beim Eintreten der Biegung die gegen einander convergirenden Lagen CD und EF an (Fig. 495). Die zwischen diesen beiden Querschnitts-Ebenen liegenden Fasern-Abschnitte hatten vor dem Eintreten der Biegung sämmtlich die gleiche Länge MN. Die Längenänderungen, welche diesen Fasern-Abschnitten durch die Biegung ertheilt werden, kann man finden, indem man jene ursprüngliche Länge MN von der einen Ebene EF aus auf den Fasernrichtungen abträgt, oder indem man durch den Punkt M eine Ebene GH legt, welche der Ebene EF parallel ist. Die

zwischen den beiden Ebenen CD und GH liegenden Theile stellen die Längenänderungen der einzelnen Fasern-Abschnitte dar. Nach Fig. 495 ist:

$$\frac{PQ}{GC} = \frac{u}{w}.$$

Fig. 495.

Aus der obigen Annahme folgt also, dass die Längenänderungen der einzelnen Fasern-Abschnitte sich verhalten wie ihre Abstände von der neutralen Faser, und da nach dem Elasticitäts-Gesetze die Spannung der Längenänderung proportional ist, so verhalten sich auch die **Spannungen** der einzelnen Fasern-Abschnitte wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Wenn also mit s die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnittes) für die im Abstande u von der Neutralen befindliche Faser LQ bezeichnet wird (Fig. 496), und mit S die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnittes) für die im Abstande w befindliche Faser EC, so ist:

$$601)\quad \frac{s}{S} = \frac{u}{w}, \quad \text{oder:} \quad s = S\frac{u}{w}.$$

Um die totale Spannung irgend einer Faser zu bestimmen, hat man die pro Quadratmillimeter ihrer Querschnittsfläche gefundene Spannung zu multipliciren mit der Anzahl der Quadratmillimeter, welche ihre Querschnittsfläche enthält. Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche des Balkens zerlegt in unendlich schmale parallel zur neutralen Faserschicht liegende Streifen, und

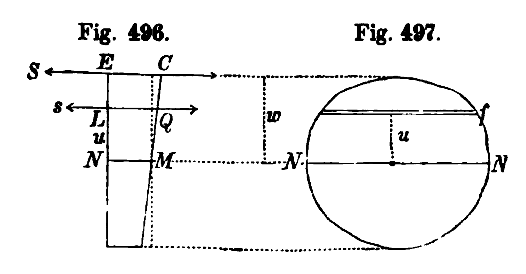


Fig. 496. Fig. 497.

sieht man den Flächeninhalt f des in der Entfernung u von der Neutralen befindlichen Streifens als Querschnitts-Fläche jener im Abstande u von der Neutralen NN liegenden Fasernschicht an

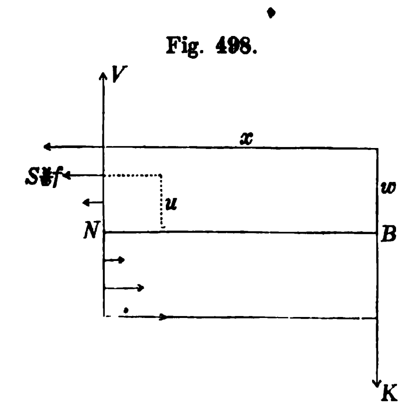
(Fig. 497), so erhält man für die totale Spannung derselben die Grösse:

$$602)\quad s\,.\,f = S\,\frac{u}{w}\,f.$$

Diese Spannung ist als eine Zug-Spannung (positive Spannung) anzusehen, wenn die betreffende Faser oberhalb der Neutralen liegt, d. h. wenn u positiv ist; als eine Druck-Spannung (negative Spannung) dagegen, wenn dieselbe unterhalb der Neutralen liegt, d. h. wenn u negativ ist. Der obige Ausdruck kann daher (für positive sowohl, als für negative Werthe von u) als allgemein gültiger Ausdruck für die Spannung irgend einer im Abstande u von der Neutralen befindlichen Faser betrachtet werden.

Wenn man sich durch eine an der Stelle N hindurchgelegte Querschnitts-Ebene den Balken in zwei Theile zerschnitten denkt, und untersucht, welche Kräfte zur Wiederherstellung des Gleichgewichtszustandes für das Stück BN an der Schnittfläche desselben angebracht werden müssten, so findet man: dass zunächst an der Schnittstelle jeder einzelnen Faser eine in die Längenrichtung derselben fallende Kraft anzubringen ist von gleicher Grösse mit der Spannung, welche vorher in der Faser an dieser Stelle vorhanden war (Fig. 498). Diese Spannungs-Widerstände der einzelnen Fasern können, wenn die Biegung — wie vorausgesetzt werden soll — eine sehr geringe ist, als Horizontal-Kräfte angesehen werden. Ausserdem ist an der Schnittfläche noch eine vertical aufwärts wirkende Kraft V anzubringen, da jene Horizontal-Kräfte für sich allein nicht ausreichen würden, um der vertical abwärts wirkenden Kraft K das Gleichgewicht zu halten. Diese Kraft V darf — bei der vorausgesetzten geringen Abweichung der Schnittfläche von der Vertical-Ebene — als eine längs der Trennungsfläche aufwärts wirkende Widerstandskraft angesehen werden, welche einer Verschiebung des Stückes BN längs jener Fläche entgegenwirkt, und wird der Widerstand gegen Abscheerung genannt. Da die Kräfte V und K die einzigen Verticalkräfte sind, welche

Fig. 498.



auf das Stück BN wirken, so ist nach den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen:

603) $V = K.$

In der Querschnittsfläche ist also ausser den Spannungswiderständen der horizontalen Fasern noch ein Widerstand gegen Abscheerung thätig von gleicher Grösse mit derjenigen Kraft (K), welche ohne das Vorhandensein dieses Widerstandes eine Verschiebung längs der Querschnittsfläche hervorbringen würde.

Die einzigen Horizontal-Kräfte, welche auf das Stück BN wirken, sind die Spannungswiderstände der einzelnen Fasern. Oberhalb der Neutralen wirken diese Kräfte von rechts nach links, unterhalb derselben von links nach rechts. Die algebraische Summe dieser Horizontal-Kräfte muss gleich Null sein. Nach Gleichung 602) ist also:

604) $\Sigma\left(\frac{S}{w}uf\right) = 0.$

Wenn man die Grösse $\frac{S}{w}$ als gemeinschaftlichen Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder fortlässt, so erhält man die Gleichung:

605) $\Sigma(fu) = 0.$

Diese Gleichung zeigt, dass die Momenten-Summe sämmtlicher Flächentheilchen der Querschnittsfläche (Fig. **497**) in Bezug auf den in der neutralen Faserschicht liegenden Horizontal-Durchmesser NN, welcher die neutrale Achse genannt wird, gleich Null ist. Nach der Lehre vom Schwerpunkte kann statt dieser Momenten-Summe auch das Product aus der ganzen Querschnittsfläche in den Abstand ihres Schwerpunktes von jener Achse gesetzt werden, und da dieses Product gleich Null ist, so folgt hieraus, dass der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in der neutralen Achse NN selbst liegt. Durch Gleichung 604) wird also die Lage der neutralen Achse bestimmt; diese Gleichung drückt aus: dass die neutrale Faserschicht diejenige ist, welche durch die Schwerpunkte sämmtlicher Querschnittsflächen hindurchgeht.

Die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen erfordern ausserdem noch: dass die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher auf das Stück BN wirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebige Achse, z. B. in Bezug auf die in Fig. **498** rechtwinkelig zur Bildfläche stehenden neutrale Achse N gleich Null ist.

Es muss also das statische Moment der Kraft K, welche für sich allein eine von links nach rechts gerichtete Drehung hervorbringen würde, gleich der Summe der statischen Momente aller Spannungswiderstände sein, deren jeder für sich allein eine von rechts nach links gerichtete Drehung um die Achse hervorbringen würde. Das statische Moment des Spannungswiderstandes der im Abstande u von der Neutralen befindlichen Faser ist gleich $\frac{Suf}{w} \cdot u$; folglich ist:

$$606)\quad \Sigma\left(\frac{Suf}{w} \cdot u\right) = K \, . \, x,$$

oder in Worten ausgedrückt: das Widerstandsmoment der Fasernspannungen ist gleich dem Momente der biegenden Kraft.

Die Grösse $\frac{S}{w}$ als gemeinschaftlicher Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder kann auch vor das Summationszeichen gesetzt werden, also ist:

$$607)\quad \frac{S}{w} \Sigma (fu^2) = Kx.$$

In dieser Gleichung bedeutet $\Sigma (fu^2)$ die Summe aller Producte aus den einzelnen Flächentheilchen der Querschnittsfläche in die Quadrate ihrer Abstände von der neutralen Achse, oder das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf den horizontalen Schwerpunktsdurchmesser derselben. Wenn man dieses Trägheits-Moment mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet, so nimmt die obige Gleichung die einfachere Form an:

$$608)\quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = Kx.$$

Für den Fall, dass ausser der Kraft K noch andere Verticalkräfte auf das Stück BN wirken, würde man statt Kx die Summe der statischen Momente aller dieser biegenden Kräfte zu setzen haben. Wenn man also allgemein mit $\mathfrak{M}$ die Momenten-Summe der biegenden Kräfte in Bezug auf die neutrale Achse des Querschnittes bezeichnet, so kann man der obigen Gleichung die noch einfachere und allgemeinere Form geben:

$$609)\quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = \mathfrak{M}.$$

In dieser Gleichung bedeutet S die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnittes) für die im Abstande w von der Neu-

tralen befindlichen Faser, also — wenn man, wie hier vorausgesetzt werden soll, unter w die Entfernung der am weitesten von der Neutralen entfernt liegenden Faser versteht — zugleich die stärkste Spannung (pro □mm), welche in der ganzen Querschnittsfläche vorkommt. Die obige Gleichung kann daher in der Form:

$$610)\quad S = \frac{w}{\mathfrak{T}}\mathfrak{M}$$

benutzt werden, um die Spannung der am stärksten gespannten Faser zu berechnen, sobald die drei Grössen w, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$ gegeben sind. Diese Spannung ist eine Zug-Spannung, wenn die Grössen w und $\mathfrak{M}$ beide positiv oder beide negativ sind, eine Druck-Spannung dagegen, wenn von den beiden Grössen w und $\mathfrak{M}$ die eine positiv, die andere negativ ist.

§ 134.

Trägheits-Momente der Querschnittsflächen.

Wenn man bei den in § 109 ausgeführten Berechnungen der Trägheits-Momente ebener Platten statt der Massen-Theilchen die Flächen-Theilchen mit den Quadraten ihrer Abstände von der Achse multiplicirt, so erhält man statt des Trägheits-Momentes der Platte das Trägheits-Moment einer ebenen Fläche von gleicher Form. Es ist daher nur nöthig, den Factor γ, welcher die auf der Flächeneinheit enthaltene Masse bezeichnete, in den dort gefundenen Ausdrücken fortzulassen, um die gesuchten Trägheits-Momente der Flächen zu erhalten. Wenn das Trägheits-Moment der Platte mit T, und das Trägheits-Moment der Fläche mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird, so ist:

$$\mathfrak{T} = \frac{T}{\gamma}.$$

Hiernach ergiebt sich z. B. für das Trägheits-Moment der rechteckigen Querschnittsfläche (Fig. 428) in Bezug auf den horizontalen Schwerpunkts-Durchmesser des Rechtecks aus Gleichung 485) der Werth:

$$611)\quad \mathfrak{T} = \frac{b\,h^3}{12}.$$

Die in Fig. 499 dargestellte Querschnittsfläche kann als Differenz der beiden Rechteckflächen BH und bh angesehen werden; das Trägheits-Moment einer solchen Querschnittsfläche in Bezug auf den horizontalen Schwerpunkts-Durchmesser ist also:

$$612)\quad \mathfrak{T} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}.$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für die in Fig. 500 dargestellte Querschnittsform. Auf ähnliche Weise können die Trägheits-Momente anderer Querschnittsflächen, welche auf die Grundform des Rechtecks sich zurückführen lassen, bestimmt werden, sobald dieselben symmetrisch in Bezug auf den horizontalen Schwerpunkts-Durchmesser geformt sind. So z. B. erhält man für das Trägheits-Moment der in Fig. 501 dargestellten Querschnittsfläche, welche als Summe zweier Rechteckflächen betrachtet werden kann, den Werth:

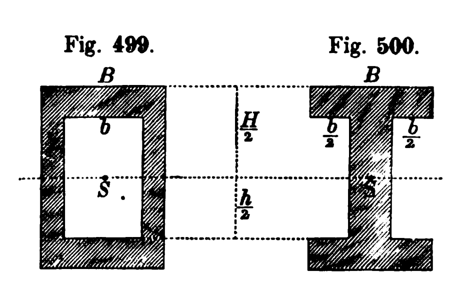


Fig. 499. Fig. 500.

$$613)\quad \mathfrak{T} = \frac{bh^3}{12} + \frac{b_1h_1^3}{12},$$

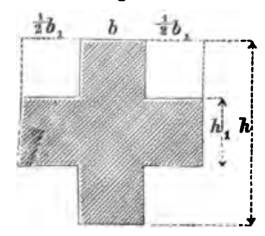


Fig. 501.

und für das Trägheits-Moment der in Fig. 502 dargestellten Querschnittsfläche ergiebt sich der Werth:

$$614)\quad \mathfrak{T} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12}.$$

Bei unsymmetrischen Formen ist zuvor die Lage des horizontalen Schwerpunkts-Durchmessers zu bestimmen. Nach den in § 48 gefundenen Regeln erhält man z. B. in Bezug auf Fig. 503 die Gleichungen:

$$b_1h_1x_1 = b_2h_2x_2 \quad \text{und}$$

$$x_1 + x_2 = \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2),$$

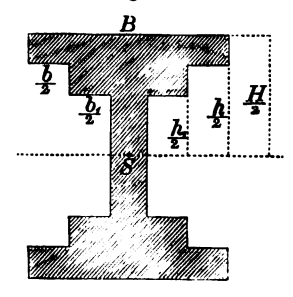


Fig. 502.

aus denen für x_1 und x_2 die Werthe sich ergeben:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2}b_2h_2(h_1 + h_2)}{b_1h_1 + b_2h_2},$$

$$x_2 = \frac{\frac{1}{2}b_1h_1(h_1 + h_2)}{b_1h_1 + b_2h_2}.$$

Für die Trägheitsmomente $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ der beiden einzelnen Rechtecke in Bezug auf den horizontalen Schwerpunkts-Durchmesser der ganzen

Fläche erhält alsdann durch Anwendung des in Gleichung 483) enthaltenen Satzes die Gleichungen:

Fig. 503.

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 x_1^2 \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{T}_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 x_2^2,$$

worauf das Trägheits-Moment der ganzen Fläche zu bestimmen ist aus der Gleichung:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2.$$

Das Trägheits-Moment einer kreisförmigen Querschnittsfläche (Fig. 432) in Bezug auf den Durchmesser derselben ist nach Gleichung 488):

$$615)\quad \mathfrak{T} = \frac{\pi}{4} R^4,$$

oder, wenn mit D der Durchmesser des Kreises bezeichnet wird:

$$616)\quad \mathfrak{T} = \frac{\pi}{64} D^4.$$

Fig. 504.

Die Ringfläche (Fig. 504) kann als Differenz zweier Kreisflächen von den Durchmessern D und d angesehen werden. Das Trägheits-Moment derselben ist also:

$$617)\quad \mathfrak{T} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4).$$

§ 135.

Berechnung der Maximal-Spannung.

Aus Gleichung 608) ergiebt sich, dass die grösste in einem Querschnitt vorkommende Spannung an den verschiedenen Stellen des Balkens verschiedene Grössen hat; denn die Grösse S hängt ab von dem Momente der biegenden Kraft und wird am grössten da, wo der Hebelarm x seinen grössten Werth annimmt, d. h. in demjenigen Querschnitte, welcher mit der Befestigungsstelle zusammenfällt. Setzt man $x = l$, so erhält man die Gleichung:

$$618)\quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = K l,$$

in welcher die Grösse S nunmehr die grösste in dem ganzen Balken überhaupt vorkommende Spannung bezeichnet.

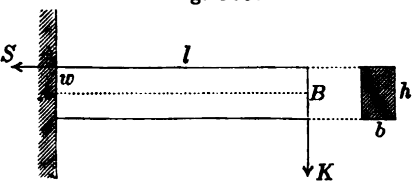
Für einen Balken von rechteckigem Querschnitte (Fig. 505) ist $w = \frac{h}{2}$ und nach Gleichung 611): $\mathfrak{T} = \frac{b h^3}{12}$ zu setzen, nimmt also die obige Gleichung die Form an:

$$619)\quad \frac{S b h^2}{6} = K l.$$

Wenn man z. B. $K = 125$ Kil., $l = 800^{mm}$, $b = 20^{mm}$, $h = 100^{mm}$ setzt, so erhält man für die grösste in dem Balken vorkommende Spannung den Werth:

$$S = \frac{6 K l}{b h^2} = \frac{6 \cdot 125 \cdot 800}{20 \cdot 100^2} = 3 \text{ Kil.}$$

Fig. 505.

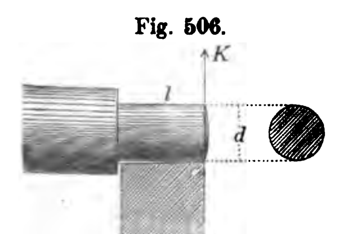


Dieser Werth ist unabhängig von der Beschaffenheit des Materials. Bei einer Vergleichung desselben mit der für das betreffende Material als zulässig zu betrachtenden Spannung findet man alsdann: ob die Widerstandsfähigkeit des Balkens der biegenden Kraft gegenüber eine hinreichende Grösse hat, oder umgekehrt: wie gross die letztere höchstens sein darf, wenn jene Grenze nicht überschritten werden soll. So z. B. würde man für einen schmiedeeisernen Balken von den oben angenommenen Dimensionen finden, dass die Kraft K bis auf das Doppelte (also bis auf 250 Kil.) vergrössert werden kann, ohne dass die (für Schmiedeisen) als praktisch zulässig anzunehmende Spannung von 6 Kil. pro $\square^{mm}$ überschritten wird.

Wenn die biegende Kraft und die Grösse der zulässigen Spannung gegeben sind, so kann die allgemeine Gleichung 618) auch zur Berechnung der erforderlichen Querschnitts-Dimensionen benutzt werden.

Für einen Balken von kreisförmigem Querschnitte (Fig. 506) ist $w = \frac{d}{2}$ und nach Gleichung 616) $\mathfrak{T} = \frac{\pi}{64} d^4$ zu setzen; man erhält also nach Gleichung 618):

Fig. 506.



$$620)\quad \frac{S \pi}{32} d^3 = K l.$$

Aus dieser Gleichung kann man die Grösse d als erforderlichen Durchmesser des cylindrischen Balkens berechnen.

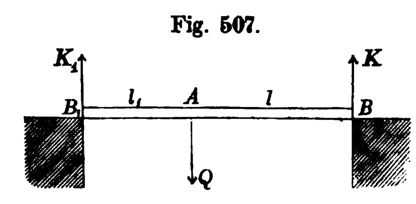
Setzt man z. B. $l = 1{,}5\, d$, $K = 1000$ Kil. und als praktisch zulässige Spannung (für Gusseisen) $S = 3$ Kil., so erhält man:

$$d = \sqrt{\frac{48 \cdot K}{S \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 1000}{3 \cdot 3{,}14}} = 71^{mm}{,}4.$$

Auf diese Weise würde der erforderliche Durchmesser eines Wellenzapfens zu berechnen sein, wenn man (der grösseren Sicherheit wegen) annimmt, dass der Gegendruck des Zapfenlagers an dem äusseren Ende des Zapfens seinen Angriffspunkt hat (was bei ungenauer Bearbeitung des Zapfenlagers vorkommen kann).

Die grösste Spannung in einem an beiden Endpunkten unterstützten Balken BB_1, der an irgend einem Zwischenpunkte A mit einem Gewichte Q belastet ist (Fig. 507), kann ebenfalls nach Gleichung 618) berechnet werden, wenn mit K der Gegendruck des einen Stützpunktes, und mit l die Entfernung desselben von dem Belastungspunkte bezeichnet wird. Denkt man sich den Theil AB_1 in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, dass der Theil AB in demselben Biegungszustande sich befindet, wie der in Fig. 505 dargestellte Balken — nur mit dem Unterschiede, dass die biegende Kraft hier nach oben wirkt, und in Folge dessen die grösste Zugspannung in der unteren Faser stattfindet. Wenn man für den Gegendruck K alsdann den aus der Gleichung des Hebels: $K(l + l_1) = Ql_1$ sich ergebenden Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

Fig. 507.

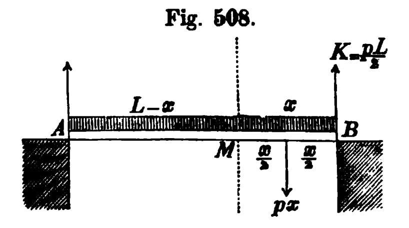


$$621)\quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = \frac{Qll_1}{l+l_1}.$$

(Da $K_1 l_1 = Kl$ ist, so gelangt man zu eben derselben Gleichung, wenn man die in dem Theile AB_1 stattfindende grösste Spannung aufsucht.)

Wenn die Belastung eines an beiden Endpunkten unterstützten Balkens gleichförmig über seine Länge L vertheilt ist, und mit p die auf jeder Längeneinheit enthaltene Belastung bezeichnet wird, so ist $K = \frac{pL}{2}$ der Gegendruck jedes der beiden Stützpunkte, und px die Belastung des Theils $BM = x$ (Fig. 508). Denkt man sich den Theil AM in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, dass der aus der Wand hervor-

Fig. 508.



ragende Theil BM angesehen werden kann als ein Balken, der unter Einwirkung zweier biegenden Kräfte sich befindet, nämlich der aufwärts biegenden Kraft K und der abwärts biegenden Kraft px. Die in dem Querschnitte M hervorgebrachten Biegungsspannungen entsprechen also der Differenz der statischen Momente dieser beiden Kräfte, und in der allgemeinen Gleichung 609) ist für die Grösse $\mathfrak{M}$ in diesem Falle der Werth zu substituiren:

$$\mathfrak{M} = Kx - px\frac{x}{2} = \frac{pL}{2} \cdot x - \frac{px^2}{2}.$$

Für die in der Entfernung x von dem einen Endpunkte stattfindende grösste Spannung ergiebt sich also die Gleichung:

$$622) \quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = \frac{p}{2}x(L-x).$$

Das Product der beiden Abschnitte x und $L - x$ wird am grössten, wenn $x = L - x = \frac{L}{2}$ gesetzt wird. Die grösste in dem Balken überhaupt vorkommende Spannung findet also in der Mitte des Balkens statt und ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$623) \quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = \frac{pL^2}{8}.$$

Das eigene Gewicht eines prismatischen Balkens bildet eine gleichförmig über die Länge desselben vertheilte Belastung. Wenn mit γ das Gewicht eines Cubikmillimeters und mit F die Querschnittsfläche des Balkens bezeichnet wird, so ist das Gewicht eines Theiles von 1 Millimeter Länge:

$$p = \gamma \cdot F \cdot 1.$$

Die grösste Biegungsspannung, welche durch das eigene Gewicht des Balkens in demselben hervorgebracht wird, ergiebt sich also aus der Gleichung:

$$624) \quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = \frac{\gamma F L^2}{8}.$$

Für einen parallelepipedischen Balken von der Höhe h und der Breite b nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\frac{Sbh^2}{6} = \frac{\gamma b h L^2}{8}, \quad \text{oder:} \quad L = \frac{4}{3}\left(\frac{S}{\gamma}\right)\left(\frac{h}{L}\right).$$

Die Länge, bei welcher der Balken noch im Stande ist, sein eigenes Gewicht zu tragen, wird also bedingt: einerseits durch den Quotienten $\frac{S}{\gamma}$, welcher von der Beschaffenheit des Materials abhängt, andererseits durch den Quotienten $\frac{h}{L}$ oder das Verhältniss der Höhe zur Länge. Für Schmiedeisen ist

$\gamma = 0^{Kil.},000\,007\,7$ zu setzen, und wenn man als zulässige Spannung $S = 6$ Kil. annimmt, so erhält man für einen Balken, dessen Höhe gleich dem zehnten Theile der Länge ist, als zulässige Länge:

$$L = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{0{,}000\,0077} \cdot \frac{1}{10} = 103\,900^{mm} = 103{,}9 \text{ Meter.}$$

Für einen Balken von der in Fig. 499 dargestellten Querschnittsform wäre $\mathfrak{T} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$, $w = \frac{H}{2}$, $F = BH - bh$ zu setzen, und die zulässige Länge zu berechnen aus der Gleichung:

$$S\left(\frac{BH^3 - bh^3}{6H}\right) = \gamma\,(BH - bh)\,\frac{L^2}{8}, \quad \text{oder:}$$

$$L = \frac{4}{3}\left(\frac{S}{\gamma}\right)\left(\frac{H}{L}\right)\left\{\frac{1 - \frac{bh^3}{BH^3}}{1 - \frac{bh}{BH}}\right\}.$$

Setzt man beispielsweise $\frac{b}{B} = \frac{h}{H} = 0{,}9$, so erhält man:

$$L = \frac{4}{3}\left(\frac{S}{\gamma}\right)\left(\frac{H}{L}\right) 1{,}81.$$

Dem hohlen Balken würde also unter sonst gleichen Umständen eine 1,81 mal so grosse Länge gegeben werden dürfen als dem massiven Balken.

Setzt man $\frac{1}{2} L = l$ und $l - x = z$ in der oben für $\mathfrak{M}$ gefundenen Gleichung, so nimmt dieselbe die Form an:

$$625) \quad \mathfrak{M} = p\left(\frac{l^2 - z^2}{2}\right).$$

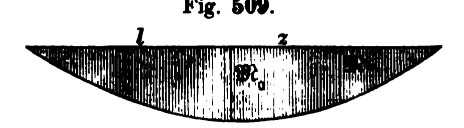
Aus dieser Gleichung ergiebt sich für das dem Werthe $z = 0$ entsprechende grösste Biegungsmoment die Grösse:

$$626) \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{p l^2}{2},$$

und wenn man die erstere Gleichung durch die letztere dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$627) \quad \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} = 1 - \frac{z^2}{l^2}.$$

Fig. 509.



Die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem $\mathfrak{M}$ mit z sich ändert, führt zu einer Parabel, deren Ordinate in der Mitte das Maximalmoment $\frac{p l^2}{2}$ darstellt (Fig. 509). Da die grössten Biegungsspannungen in den verschiedenen Querschnitten sich ver-

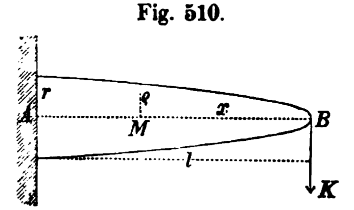
halten wie die Grössen der daselbst stattfindenden Biegungsmomente, so führt die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die Grösse S mit x sich ändert, ebenfalls zu einer solchen Parabel, und zwar würde die Pfeilhöhe dieser letzteren die Grösse $S_0 = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot \mathfrak{M}_0$ erhalten.

§ 136.

Träger von gleichem Widerstande.

Aus der allgemeinen Gleichung 610) ist zu ersehen, dass die grösste in einem bestimmten Querschnitte vorkommende Spannung S dem Producte der beiden Grössen $\mathfrak{M}$ und $\frac{w}{\mathfrak{T}}$ gleich ist, also einerseits von dem Momente der biegenden Kraft, andererseits von der Querschnittsform an der betreffenden Stelle des Balkens abhängt. Man kann dem Balken eine solche Form geben, dass das Product der beiden Grössen $\mathfrak{M}$ und $\frac{w}{\mathfrak{T}}$ für alle Stellen des Balkens gleiche Werthe annimmt. In diesem Falle wird die grösste Spannung ebenfalls in allen Querschnittsflächen gleiche Werthe erhalten, und der Balken wird alsdann ein „Träger von gleichem Widerstande“ genannt. Wenn also mit $\mathfrak{M}_1$ und $\frac{w_1}{\mathfrak{T}_1}$ resp. die Werthe bezeichnet werden, welche die veränderlichen Grössen $\mathfrak{M}$ und $\frac{w}{\mathfrak{T}}$ an einer bestimmten willkürlich zu wählenden Stelle des Balkens annehmen, so ergiebt sich als allgemeine Bedingungsgleichung für einen Träger von gleichem Widerstande die Gleichung:

Fig. 510.



$$628) \quad \mathfrak{M} \frac{w}{\mathfrak{T}} = \mathfrak{M}_1 \frac{w_1}{\mathfrak{T}_1}.$$

Für den in Fig. 510 dargestellten Fall kann $\mathfrak{M}_1 = Kl$ und $\mathfrak{M} = Kx$ gesetzt werden, nimmt also die obige Gleichung die Form an:

$$629) \quad \frac{xw}{\mathfrak{T}} = \frac{lw_1}{\mathfrak{T}_1}.$$

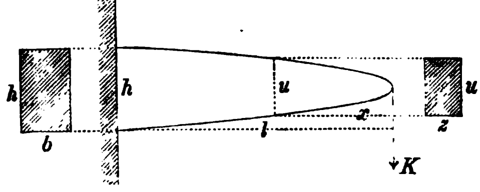
Wenn der Balken überall einen kreisförmigen Querschnitt erhalten soll, so ist nach der in Fig. 510 gewählten Bezeichnung

$w = \varrho$, $\mathfrak{T} = \frac{\pi}{4}\,\varrho^4$, $w_1 = r$, $\mathfrak{T}_1 = \frac{\pi}{4}\,r^4$ zu setzen, und man erhält die Gleichung:

$$630)\quad \frac{\varrho^3}{r^3} = \frac{x}{l},$$

aus welcher für jeden beliebigen Werth von x der zugehörige Werth von ϱ berechnet werden kann, sobald die Grösse r nach den im vorigen Paragraphen gefundenen Regeln zuvor bestimmt worden ist (aus der Gleichung $S\frac{\pi}{4}r^3 = Kl$).

Fig. 511.



Für rechteckige Querschnittsformen ist nach Fig. 511 zu setzen: $w = \frac{u}{2}$, $\mathfrak{T} = \frac{z\,u^3}{12}$, $w_1 = \frac{h}{2}$, $\mathfrak{T}_1 = \frac{b\,h^3}{12}$, und die Gleichung 629) nimmt nach Substitution dieser Werthe die Form an:

$$631)\quad \frac{x}{z\,u^2} = \frac{l}{b\,h^2}.$$

Fig. 512.

Fig. 513.

Setzt man hierin $z = b$, so erhält man für einen Träger von constanter Breite (Fig. 512 als Aufriss und Fig. 513 als Grundriss) die Gleichung:

$$632)\quad \frac{u^2}{h^2} = \frac{x}{l},$$

aus welcher für jeden Werth von x die zugehörige Höhe des Balkens bestimmt werden kann. Die Begrenzungslinie des verticalen Längen-Durchschnittes ist in diesem Falle eine Parabel, deren Scheitelpunkt B mit dem Angriffspunkte der Kraft K zusammenfällt.

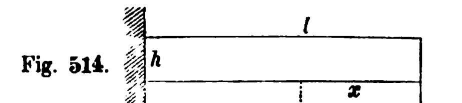


Fig. 514.

Fig. 515.

Setzt man $u = h$ in Glei-

chung 631), so erhält man für einen Träger von constanter Höhe (Fig. 514 als Aufriss und Fig. 515 als Grundriss) die Gleichung:

$$633)\quad \frac{z}{b} = \frac{x}{l},$$

aus welcher sich ergiebt, dass der Balken in diesem Falle eine dreieckige Grundrissform erhält.

Der Querschnitt an der Befestigungsstelle ist in beiden Fällen nach den im vorigen Paragraphen gefundenen Regeln zu berechnen (aus der Gleichung $\frac{S b h^2}{6} = Kl$).

Bei gleichförmig über die Länge des Balkens vertheilter Belastung von der Grösse p pro Längeneinheit ist:

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1} = \frac{\frac{1}{2} p x^2}{\frac{1}{2} p l^2}$$

zu setzen, und bei rechteckigem Querschnitte sind die Dimensionen desselben zu berechnen aus der Gleichung:

$$634)\quad \frac{z u^2}{b h^2} = \frac{x^2}{l^2}.$$

Wenn hierin $z = b$ gesetzt wird, so erhält man für die veränderliche Höhe des Querschnitts die Gleichung:

$$\frac{u}{h} = \frac{x}{l}.$$

Für diesen Fall nimmt also der Balken die in Fig. 516 (als Aufriss) und Fig. 517 (als Grundriss) dargestellte Form an.

Fig. 516.

Fig. 517.

Wenn dagegen $u = h$ gesetzt wird, so ist die veränderliche Breite zu berechnen aus der Gleichung:

$$\frac{z}{b} = \frac{x^2}{l^2},$$

welche zeigt, dass im letzteren Falle die Begrenzung der Grundrissform durch zwei Parabeln gebildet wird, deren Scheitelpunkte mit dem freien Endpunkte zusammenfallen, und deren gemeinschaftliche Achse

rechtwinkelig zur Achse des Balken gerichtet ist (Fig. **518** und Fig. **519**).

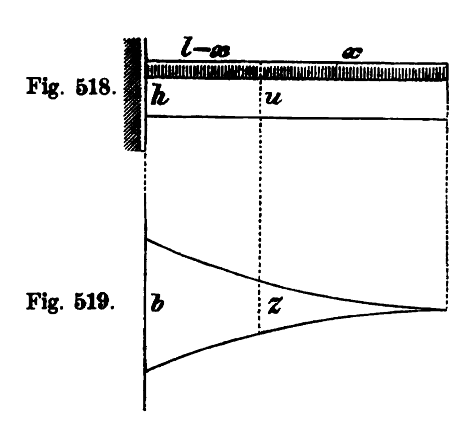


Fig. 518.

Fig. 519.

Für den an beiden Endpunkten unterstützten Balken mit gleichförmig über die Länge vertheilter Belastung ist (nach Fig. **509** und Fig. **520**):

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} = \frac{\frac{1}{2} p (l^2 - x^2)}{\frac{1}{2} p l^2}$$

zu setzen, und bei rechteckigem Querschnitte sind die Dimensionen desselben zu berechnen aus der Gleichung:

$$635) \quad \frac{z u^2}{b h^2} = 1 - \frac{x^2}{l^2}.$$

Wenn man hierin $z = b$ setzt, so erhält man für die veränderliche Höhe des Querschnitts die Gleichung:

$$\frac{u^2}{h^2} + \frac{x^2}{l^2} = 1,$$

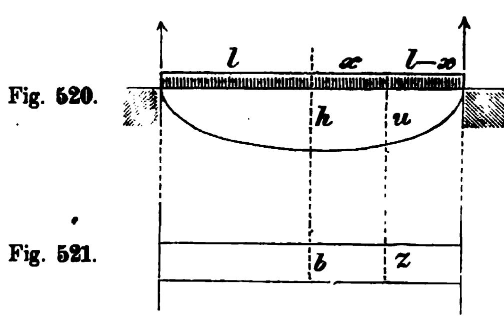


Fig. **520**.

Fig. **521**.

welche zeigt, dass in diesem Falle der verticale Längendurchschnitt von einer Ellipse begrenzt ist (Fig. **520** und Fig. **521**).

Wenn man dagegen $u = h$ setzt, so erhält man für die veränderliche Breite die Gleichung:

$$\frac{z}{b} = 1 - \frac{x^2}{l^2},$$

welche zeigt, dass in diesem Falle das Grundrissprofil durch zwei Parabeln gebildet wird, deren gemeinschaftliche horizontale Achse rechtwinkelig zur Längenrichtung in der Mitte zwischen den beiden Auflagerpunkten liegt (Fig. **522** und Fig. **523**).

Bei der in Fig. 524 dargestellten Art der Belastung nimmt bei jeder Lage des Gewichtes Q das Biegungsmoment stets an der Belastungsstelle den grössten Werth an, und dasselbe hat an dieser Stelle die Grösse:

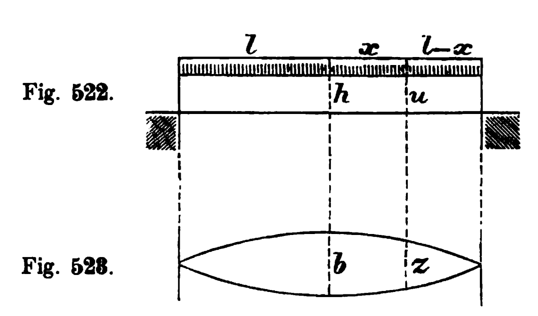


Fig. 522.

Fig. 523.

$$\mathfrak{M} = \frac{Q(l+x)}{2l}(l-x),$$

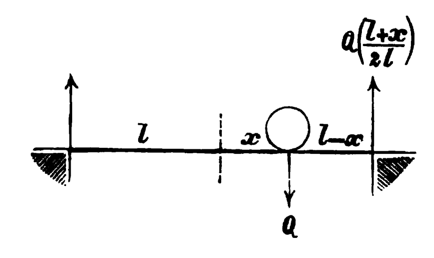
oder:

$$\mathfrak{M} = \frac{Q(l^2-x^2)}{2l}.$$

Indem man $\frac{Q}{l} = p$ setzt, erhält man wie im vorigen Falle für das Verhältniss der Biegungsmomente die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} = \frac{\frac{1}{2}p(l^2-x^2)}{\frac{1}{2}pl^2}.$$

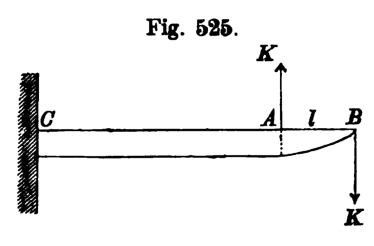
Fig. 524.



Wenn also die Bedingung gestellt wäre, dass für alle Lagen der Belastung die Maximalspannung gleiche Werthe annehmen soll, so würde man dem Balken dieselbe Form wie im vorigen Falle zu geben haben.

Wenn an dem freien Ende eines in horizontaler Lage am anderen Endpunkte befestigten Balkens ein Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M} = Kl$ wirkt, so hat für alle Stellen dieses Balkens das Moment der biegenden Kraft die constante Grösse $\mathfrak{M} = Kl$, und als Körper von gleichem Widerstande muss der Balken in diesem Falle eine prismatische Form erhalten. Bei dem in Fig. 525 dargestellten Falle würde daher dem Theile AC eine prismatische Form zu geben sein, während der Theil AB einen nach Gleichung 629) zu bestimmenden veränderlichen Querschnitt, z. B. bei constanter Breite ein parabolisches Profil (oder bei constanter Höhe eine dreieckige Grundrissform) erhalten würde.

Fig. 525.

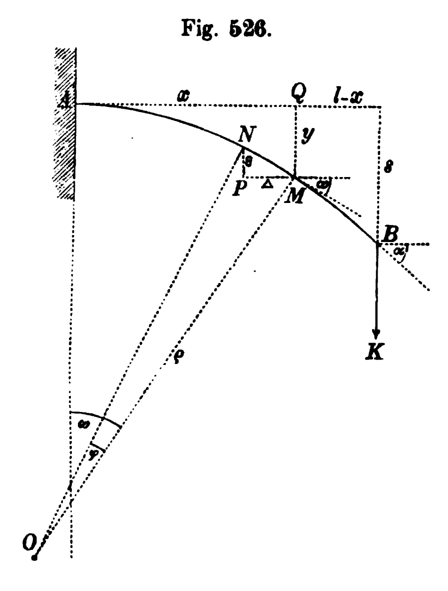


Die in diesem Paragraphen gefundenen Resultate bedürfen insofern noch einer Correction, als auf den erforderlichen Widerstand gegen Abscheerung (Gleichung 603) bei diesen Rechnungen keine Rücksicht genommen wurde. Mit Berücksichtigung desselben findet man, dass in allen diesen Fällen der Querschnitt des Balkens nach dem Endpunkte hin nicht bis auf die Grösse Null abnehmen darf, sondern nur bis zu derjenigen Grösse, welche aus der „Theorie des Widerstandes gegen Abscheerung" später sich ergeben wird.

§ 137.
Elastische Linie.

Die krumme Linie AB (Fig. 495), nach welcher die neutrale Faser eines gebogenen Balkens gekrümmt ist, wird die „elastische Linie" genannt. Das unendlich kleine Bogenstück MN dieser elastischen Linie kann als ein Kreisbogen angesehen werden, dessen Mittelpunkt O mit dem Convergenzpunkte der beiden Normalen CD und EF zusammenfällt, und dessen Halbmesser $ON = \varrho$ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie für diese Stelle bildet. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke CGM und MNO ergiebt sich die Proportion:

Fig. 526.



$$636)\quad \frac{CG}{NM} = \frac{MG}{ON}.$$

Der Quotient auf der linken Seite ist das Verlängerungsverhältniss derjenigen Faser, deren Spannung (pro Quadratmillimeter) mit S bezeichnet wurde, also (nach Gleichung 595) gleich $\frac{S}{E}$. Wenn man ferner $MG = w$ und $ON = \varrho$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$637)\quad \frac{S}{E} = \frac{w}{\varrho}, \text{ oder: }$$

$$\frac{S}{w} = \frac{E}{\varrho}.$$

Nach Substitution dieses Werthes für den Quotienten $\frac{S}{w}$ nimmt die allgemeine Gleichung 609) die Form an:

$$638)\quad \frac{E\mathfrak{T}}{\varrho} = \mathfrak{M}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für den Krümmungshalbmesser des unendlich kleinen Bogenstückes $\widehat{MN}$ der elastischen Linie AB (Fig. 526) der Werth:

$$639)\quad \varrho = \frac{E\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}} = \frac{E\mathfrak{T}}{K(l-x)}.$$

Bei der vorausgesetzten geringen Grösse der Durchbiegung kann in der Gleichung:

$$\widehat{MN} = \varrho\varphi, \quad \text{oder:} \quad \varphi = \frac{\widehat{MN}}{\varrho}$$

statt des Bogens $\widehat{MN}$ auch die Horizontal-Projection desselben $MP = \Delta$ gesetzt werden, und wenn man ausserdem darin den für ϱ gefundenen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$640)\quad \varphi = \frac{K(l-x)\Delta}{E\mathfrak{T}}.$$

Denkt man sich die Horizontal-Projection $AQ = x$ des ganzen Bogens AM in ihre unendlich kleinen Theile Δ zerlegt und in der obigen Gleichung statt x der Reihe nach die einzelnen Vielfachen von Δ substituirt, so erhält man durch Summation aller der auf solche Weise für die zugehörigen unendlich kleinen Winkelgrössen gebildeten Ausdrücke die Gleichung:

$$641)\quad \Sigma(\varphi) = \Sigma\left(\frac{K(l-x)\Delta}{E\mathfrak{T}}\right).^{*)}$$

Die auf der linken Seite stehende Winkelsumme ist gleich dem Winkel ω, welchen der Krümmungshalbmesser OM mit der Verticalen (oder die elastische Linie an der Stelle M mit der Horizontalen) einschliesst. In dem Ausdrucke auf der rechten Seite ist die Grösse $\frac{K}{E\mathfrak{T}}$ (bei der vorausgesetzten prismatischen Form des Balkens) ein gemeinschaftlicher Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder. Man erhält also die Gleichung:

$$642)\quad \omega = \frac{K}{E\mathfrak{T}}\Sigma[(l-x)\Delta] = \frac{K}{E\mathfrak{T}}[l\,\Sigma(\Delta) - \Sigma(x\Delta)].$$

---

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung würde diese Gleichung die Form erhalten:

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{x} \frac{K}{E\mathfrak{T}}(l-x)\,dx.$$

Hierin ist $\Sigma(\Delta) = x$ und (nach § 109) $\Sigma(x\Delta) = \frac{x^2}{2}$ zu setzen, also ist:

$$643) \quad \omega = \frac{K}{E\mathfrak{T}}\left(l x - \frac{x^2}{2}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = l$, so erhält man für den Winkel α, welchen die elastische Linie an dem Endpunkte B mit der Horizontalen einschliesst, die Gleichung:

$$644) \quad \alpha = \frac{K l^2}{2 E\mathfrak{T}}.$$

In dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreieck MNP ist die verticale Kathete $\varepsilon = \Delta$ tg ω, oder — da wegen vorausgesetzter geringer Grösse der Durchbiegung statt tg ω auch die Winkelzahl ω selbst gesetzt werden kann —:

$$645) \quad \varepsilon = \omega \,.\, \Delta.$$

Wenn man hierin für ω den in Gleichung 643) gefundenen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$646) \quad \varepsilon = \frac{K}{E\mathfrak{T}}\left(l x - \frac{x^2}{2}\right)\Delta.$$

Denkt man sich wiederum die Horizontal-Projection AQ des Bogens AM in ihre unendlich kleinen Theile zerlegt, so kann man die zu jedem dieser Theile gehörige Vertical-Projection des betreffenden Bogentheiles mittelst der obigen allgemeinen Gleichung bestimmen, indem man jedes Mal den zugehörigen Werth von x substituirt, und man erhält durch Summation aller auf solche Weise gefundenen Gleichungen:

$$647) \quad \Sigma(\varepsilon) = \frac{K}{E\mathfrak{T}}\left[l\,\Sigma(x\Delta) - \frac{1}{2}\,\Sigma(x^2\Delta)\right].^{*)}$$

Die auf der linken Seite stehende Grösse ist als Summe der Vertical-Projectionen aller Theile des Bogens AM gleich y zu setzen; ferner ist (nach § 109) $\Sigma(x\Delta) = \frac{x^2}{2}$ und $\Sigma(x^2\Delta) = \frac{x^3}{3}$; man erhält also die Gleichung:

$$648) \quad y = \frac{K}{E\mathfrak{T}}\left(\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung würde diese Gleichung die Form erhalten:

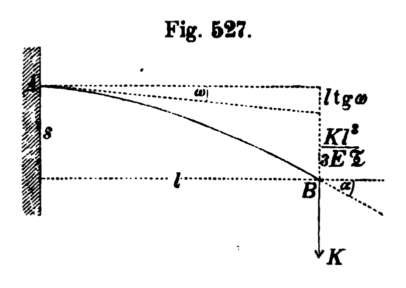
$$\int^{y} dy = \frac{K}{E\mathfrak{T}}\left(l\int_0^x x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx\right).$$

Für $x=l$ wird $y=s$, die Senkung des Endpunktes B ist also:

$$649)\quad s=\frac{Kl^3}{3E\mathfrak{T}}.$$

Wenn der Balken an der Befestigungsstelle — anstatt in horizontaler Lage — in einer um den sehr kleinen Winkel ω nach unten hin von der Horizontalen abweichenden Lage eingespannt ist (Fig. 527), so kann der Neigungswinkel α am Endpunkte B angesehen werden als zusammengesetzt aus zwei Theilen: der eine Theil ist derjenige Neigungswinkel, um welchen ohne das Vorhandensein einer Durchbiegung die Achse des Balkens bei B von der Horizontalen abweichen würde, also gleich ω; der andere von der Durchbiegung herrührende Theil ist nach Gleichung 644) zu bestimmen. Man erhält also für diesen Fall die Gleichung:

Fig. 527.



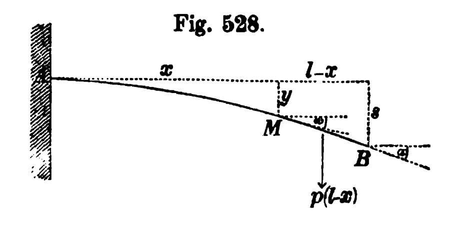
$$650)\quad \alpha=\omega+\frac{Kl^2}{2E\mathfrak{T}}.$$

Ebenso kann die Grösse s in diesem Falle angesehen werden als zusammengesetzt aus dem Theile l tg ω (wofür wegen vorauszusetzender Kleinheit des Winkels ω auch $l\,\omega$ gesetzt werden kann), welcher ohne das Vorhandensein der Durchbiegung die Höhendifferenz der beiden Endpunkte bilden würde, und dem von der Durchbiegung herrührenden Theile, welcher aus Gleichung 649) zu bestimmen ist. Für diesen Fall gilt also die Gleichung:

$$651)\quad s=l\,\omega+\frac{Kl^3}{3E\mathfrak{T}}.$$

Zu gleichem Resultate würde man gelangen, wenn man in Fig. 526 den Theil AM in eine feste Wand eingeschlossen ansähe, und für den Theil MB als einen schräg eingespannten Balken die Länge $l-x$ mit l, die Höhendifferenz $s-y$ mit s bezeichnete und die letztere aus den beiden Gleichungen 648) und 649) berechnete.

Fig. 528.



Für den Fall, dass die Belastung gleichförmig über die Länge des Balkens vertheilt ist (Fig. 528), hat man in Gleichung 638) statt des Momentes $\mathfrak{M}=K(l-x)$ das Moment:

$$\mathfrak{M} = p\,(l-x)\,\frac{(l-x)}{2} = \frac{p}{2}\,(l^2 - 2\,l\,x + x^2)$$

zu substituiren und erhält dann statt der Gleichungen 640) und 641) resp. die Gleichungen:

$$\varphi = \frac{p}{2\,E\,\mathfrak{T}}\,(l^2 - 2\,l\,x + x^2)\,\Delta \quad \text{und}$$

$$\omega = \frac{p}{2\,E\,\mathfrak{T}}\,[l^2\,\Sigma\,(\Delta) - 2\,l\,\Sigma\,(x\,\Delta) + \Sigma\,(x^2\,\Delta)]\ ^{*)},$$

aus welcher letzteren resp. für die Winkel ω und α die Werthe sich ergeben:

652) $\omega = \frac{p}{2\,E\,\mathfrak{T}}\left(l^2\,x - l\,x^2 + \frac{x^3}{3}\right)$ und 653) $\alpha = \frac{p\,l^3}{6\,E\,\mathfrak{T}}$.

Statt der Gleichungen 646) und 647) erhält man also für diesen Fall die Gleichungen:

$$\varepsilon = \frac{p}{2\,E\,\mathfrak{T}}\left(l^2\,x - l\,x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Delta \quad \text{und}$$

$$\Sigma\,(\varepsilon) = y = \frac{p}{2\,E\,\mathfrak{T}}\,[l^2\,\Sigma\,(x\,\Delta) - l\,\Sigma\,(x^2\,\Delta) + \frac{1}{3}\,\Sigma\,(x^3\,\Delta)]\ ^{**)}$$

aus welcher letzteren für die Senkungen der Punkte M und B resp. die Werthe sich ergeben:

654) $y = \frac{p}{2\,E\,\mathfrak{T}}\left(\frac{l^2\,x^2}{2} - \frac{l\,x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$.

655) $s = \frac{p\,l^4}{8\,E\,\mathfrak{T}}$.

Für einen schräg eingespannten Balken, dessen Achse an der Befestigungsstelle um den Winkel ω von der Horizontalen nach unten hin abweicht, ergeben sich ferner die den Gleichungen 650) und 651) analog gebildeten Gleichungen:

656) $\alpha = \omega + \frac{p\,l^3}{6\,E\,\mathfrak{T}}$ und 657) $s = l\,\omega + \frac{p\,l^4}{8\,E\,\mathfrak{T}}$.

---

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung würde diese Gleichung die Form erhalten:

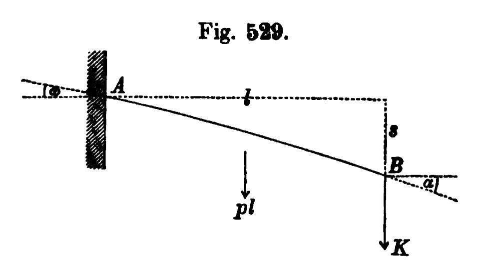
$$\int_0^{\omega} d\omega = \frac{p}{2\,E\,\mathfrak{T}}\left(l^2\int_0^x dx - 2\,l\int_0^x x\,dx + \int_0^x x^2\,dx\right).$$

**) Oder nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung:

$$\int_0^y dy = \frac{p}{2\,E\,\mathfrak{T}}\left(l^2\int_0^x x\,dx - l\int_0^x x^2\,dx + \frac{1}{3}\int_0^x x^3\,dx\right).$$

Wenn bei dem schräg eingespannten Balken (Fig. 529) die gleichförmig über die Länge vertheilte Belastung pl und die am Endpunkte aufgehängte Last K gleichzeitig wirken, so setzt jede von den beiden Grössen α und s aus drei Theilen sich zusammen: der erste entspricht der natürlichen Neigung des Balkens (im ungebogenen Zustande), der zweite und dritte Theil entsprechen den Beiträgen, welche jede von den beiden Belastungen einzeln genommen zu diesen Grössen liefert. Man erhält also für diesen Fall die Gleichungen:

Fig. 529.

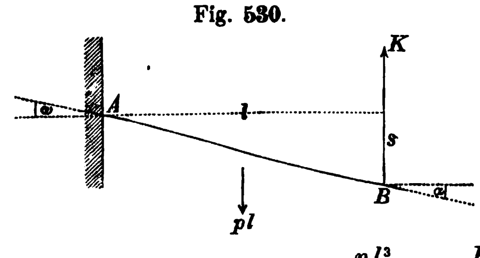


$$658)\quad \alpha = \omega + \frac{p\,l^3}{6\,E\mathfrak{T}} + \frac{K\,l^2}{2\,E\mathfrak{T}},$$

$$659)\quad s = l\,\omega + \frac{p\,l^4}{8\,E\mathfrak{T}} + \frac{K\,l^3}{3\,E\mathfrak{T}},$$

und für den in Fig. 530 dargestellten Fall, in welchem die vertical aufwärts wirkende Kraft K als negativ in Rechnung zu bringen ist, die Gleichungen:

Fig. 530.



$$660)\quad \alpha = \omega + \frac{p\,l^3}{6\,E\mathfrak{T}} - \frac{K\,l^2}{2\,E\mathfrak{T}},$$

$$661)\quad s = l\,\omega + \frac{p\,l^4}{8\,E\mathfrak{T}} - \frac{K\,l^3}{3\,E\mathfrak{T}}.$$

§ 138.

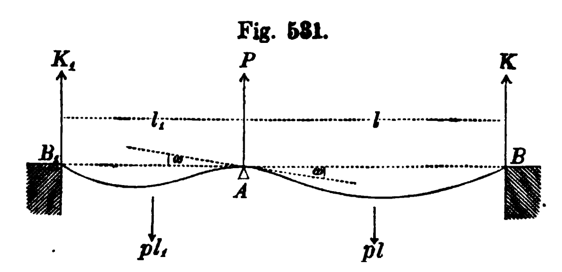
Balken auf drei Stützen.

Denkt man sich den Theil AB_1 (Fig. 531) in eine Wand eingeschlossen, so findet man, dass der Theil AB in demselben Zustande sich befindet wie der in Fig. 530 dargestellte schräg eingespannte Balken. Die Wirkung der Kraft K ist jedoch in diesem Falle so beschaffen, dass sie den Endpunkt B in gleicher Höhe mit dem Punkte A hält; folglich ist in Gleichung 661) für diesen Fall $s = 0$ zu setzen; man erhält also die Gleichung:

$$662)\quad 0 = \omega + \frac{p\,l^3}{8\,E\mathfrak{T}} - \frac{K\,l^2}{3\,E\mathfrak{T}}.$$

Denkt man sich ein anderes Mal den Theil AB in eine Wand eingeschlossen, so findet man, dass der Theil AB_1 in der Lage eines schräg eingespannten Balkens sich befindet, dessen Achse bei A um den Winkel ω nach oben hin von der Horizontalen abweicht. Für diesen Theil ist daher $-\omega$ statt $+\omega$, ausserdem l_1 statt l und K_1 statt K zu setzen; also ist:

Fig. 581.



$$663)\quad 0 = -\omega + \frac{p\,l_1^3}{8\,E\mathfrak{T}} - \frac{K_1\,l_1^2}{3\,E\mathfrak{T}}.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen 662) und 663) erhält man die Gleichung:

$$664)\quad 0 = \frac{p}{8}(l^3 + l_1^3) - \left(\frac{K\,l^2 + K_1\,l_1^2}{3}\right).$$

Die Gleichung der statischen Momente sämmtlicher auf den Balken wirkenden Kräfte in Bezug auf den Punkt A ist:

$$665)\quad 0 = \frac{p}{2}(l^2 - l_1^2) - K\,l + K_1\,l_1.$$

Durch Auflösung der beiden letzteren Gleichungen erhält man für die Gegendrücke der Endstützen die Werthe:

$$666)\quad K = \frac{p\,(3\,l^3 - l_1^3 + 4\,l^2\,l_1)}{8\,l\,(l + l_1)}.$$

$$667)\quad K_1 = \frac{p\,(3\,l_1^3 - l^3 + 4\,l_1^2\,l)}{8\,l_1\,(l + l_1)}.$$

Die Mittelstütze A trägt den Rest der Belastung, also ist:

$$668)\quad P = p\,(l + l_1) - (K + K_1).$$

Setzt man $l_1 = l$, so erhält man für die Gegendrücke der drei Stützen die Werthe:

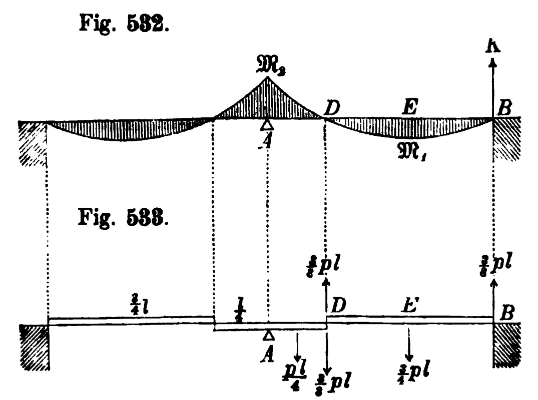
$$K_1 = \frac{3}{8}\,p\,l, \quad P = \frac{10}{8}\,p\,l, \quad K = \frac{3}{8}\,p\,l.$$

Zugleich ergiebt sich aus den beiden Gleichungen 662) und 663), dass in diesem Falle $+\omega = -\omega$, also $\omega = 0$ wird (wie überhaupt in allen Fällen, wo die Verticale der Mittelstütze das Ganze in zwei symmetrische Hälften zerlegt).

Das Moment der biegenden Kraft für eine im Abstande z vom Endpunkte B befindliche Stelle der Balkenhälfte AB ist:

$$669)\quad \mathfrak{M} = Kz - pz \cdot \frac{z}{2}.$$

Wenn man nach dieser allgemeinen Gleichung für jeden Werth von z den zugehörigen Werth von $\mathfrak{M}$ berechnet und als Ordinate abträgt, so erhält man als graphische Darstellung des Momentes eine Curve von der in Figur 532 dargestellten Form. Diejenige Stelle D, an welcher das Moment Null ist, findet man aus der Gleichung:



$$670)\quad 0 = Kz - \frac{pz^2}{2},$$

oder:

$$z = 2\frac{K}{p} = \frac{3}{4}l.$$

Für kleinere Werthe von z ist $\mathfrak{M}$ positiv, für grössere negativ. In demjenigen Querschnitte, für welchen $\mathfrak{M} = 0$ ist, findet keine Biegungsspannung statt, insofern nach Gleichung 610) für diese Stelle auch $S = 0$ wird. Man würde also, ohne den Gleichgewichtszustand zu stören, an dieser Stelle den Balken durchschneiden können — vorausgesetzt, dass auf irgend eine Weise, z. B. auf die in Fig. 533 dargestellte Art, eine Uebertragung der Verticalkraft (Gleichung 603) von dem einen Stücke auf das andere möglich gemacht wird.

Der Theil BD befindet sich also genau in demselben Zustande, wie der an beiden Endpunkten frei aufliegende Balken Fig. 508, bei welchem das Moment der biegenden Kraft in der Mitte seinen grössten Werth annimmt, nämlich (nach Gleichung 623):

$$671)\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{p\left(\frac{3}{4}l\right)^2}{8} = \frac{9}{128}pl^2.$$

Der Theil AD befindet sich in demselben Zustande wie ein bei A horizontal eingespannter, mit gleichförmig vertheilter Belastung versehener Balken, an dessen freiem Endpunkte überdies eine Last $\frac{3}{8}pl$ angehängt ist. Das Moment an der Stelle A ist

also (seiner absoluten Grösse nach) aus der Gleichung zu bestimmen:

$$672)\quad \mathfrak{M}_2 = \frac{pl}{4}\cdot\frac{l}{8} + \frac{3}{8}pl\cdot\frac{l}{4} = \frac{16}{128}pl^2.$$

Die Momente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ — folglich auch die an den Stellen E und A stattfindenden Biegungsspannungen — verhalten sich also wie 9 zu 16, und wenn man die Belastung p allmählich vergrössert, so wird an der Stelle A schon der Bruch erfolgen, während die gleichzeitig an der Stelle E stattfindende grösste Biegungsspannung erst $\frac{9}{16}$ der Bruchspannung beträgt.

Da die Tragfähigkeit des Balkens von dem Werthe des grössten der beiden Biegungsmomente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ abhängt, so würde man dieselbe vergrössern können, wenn man auf irgend eine Weise bewirken könnte, dass das grösste Biegungsmoment einen kleineren Werth erhielte, und der auf solche Art zu erreichende Vortheil würde am grössten werden, wenn man bewirkte, dass die beiden Maximal-Momente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ einander gleich würden.

Zu diesem Zwecke würde es bei der in Fig. 533 dargestellten Anordnung nur nöthig sein, die Schnittstelle D nach einer anderen Stelle F zu verlegen (Fig. 534), und die Entfernung $BF = z$ so zu wählen, dass die nunmehrigen beiden Maximal-Momente:

Fig. 534.

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{pz^2}{8} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{p(l-z)^2}{2} + \frac{pz}{2}(l-z)$$

einander gleich werden. Aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke ergiebt sich für z der Werth:

$$673)\quad z = 0{,}8284\,.\,l.$$

Bei dieser Theilung des Balkens würde jede der Endstützen den Gegendruck:

$$674)\quad K = \frac{pz}{2} = 0{,}4142\,pl$$

leisten, und das grösste Biegungsmoment würde die Grösse erhalten:

$$675)\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{pz^2}{8} = 0{,}0858\,pl^2 = \mathfrak{M}_2.$$

Eine Vergleichung der beiden Werthe 672) und 675) zeigt, dass durch diese Anordnung das Maximal-Moment — und in Folge dessen auch die Maximal-Spannung — im Verhältniss $\frac{0,0858}{0,125} = 0,686$, d. h. um etwa 31,4 Procent verkleinert wird.

Genau dieselbe Wirkung lässt sich bei dem continuirlichen — nicht durchschnittenen — Balken auf drei Stützen durch eine Höhendifferenz zwischen Mittelstütze und Endstütze erreichen. Um die erforderliche Höhendifferenz zu finden, ist es nur nöthig, aus Gleichung 661) — nachdem darin wegen symmetrischer Anordnung wiederum $\omega = 0$ gesetzt — für die Grösse s denjenigen Werth zu bestimmen, für welchen $K = 0,4142\, p\, l$ wird. Man erhält durch Substitution dieses Werthes die Gleichung:

$$676)\quad s = \frac{p\, l^4}{8\, E\mathfrak{T}} - \frac{0,4142\, p\, l^4}{3\, E\mathfrak{T}} = -\, 0,01307\, \frac{p\, l^4}{E\mathfrak{T}},$$

welche — nach der aus Fig. 530 zu entnehmenden Bedeutung der Grösse s — zeigt, dass die Mittelstütze um die Grösse $0,01307\, \frac{p\, l^4}{E\mathfrak{T}}$ gesenkt werden muss.

Wenn die Stärke des Trägers dem Maximal-Momente entsprechend gewählt werden soll, so ist die Grösse $\mathfrak{T}$ aus der Gleichung:

$$\frac{S}{w}\, \mathfrak{T} = 0,0858\, p\, l^2$$

zu bestimmen, und nach Substitution des hieraus für $\mathfrak{T}$ sich ergebenden Werthes nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$s = -\, 0,1523\, \frac{S\, l^2}{w\, E}.$$

Setzt man hierin $S = 6$ Kil., $E = 20\,000$, $l = 100\,000^{mm}$ und $w = 5000^{mm}$, so wird:

$$s = -\, 91,4 \text{ Millimeter.}$$

Bei einem schmiedeisernen Träger von 200 Metern Länge und 10 Metern Höhe würde also die Mittelstütze um 91,4 Millimeter tiefer liegen müssen, als die Endstützen, wenn bei zunehmender Belastung die Biegungsspannung an den drei schwachen Punkten gleichzeitig die zulässige Grösse von 6 Kil. pro Quadratmillimeter erreichen soll.

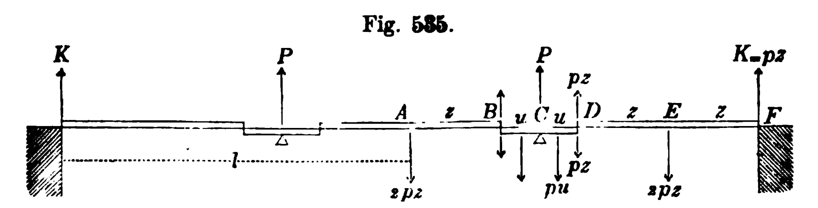
§ 139.

Balken auf vier Stützen.

Denkt man sich den Balken auf die in Fig. 535 angedeutete Art in einzelne Theile zerschnitten, von denen die auf den beiden Mittelstützen ruhenden den drei andern als Stützen dienen, und denkt man sich die Schnittstellen, sowie die beiden Mittelstützen,

so gelegt, dass das Moment der biegenden Kraft an den drei Stellen A, C, E gleiche absolute Werthe erhält, so findet man,

Fig. 585.



dass die beiden Grössen u und z, welche die Art der Theilung charakterisiren, auf folgende Weise sich bestimmen lassen.

An jeder von den beiden Stellen A und E hat das Biegungs-Moment die Grösse:

$$677)\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{p z^2}{2},$$

und an der Mittelstütze C hat dasselbe die Grösse:

$$678)\quad \mathfrak{M}_2 = p z \cdot u + p u \cdot \frac{u}{2}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden Momente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ erhält man die Gleichung:

$$679)\quad z^2 = 2 z u + u^2.$$

Zwischen den drei Grössen u, z, l findet ausserdem die aus der Figur sich ergebende Beziehung statt:

$$680)\quad 3 z + 2 u = l.$$

Wenn man die beiden Gleichungen 679) und 680) für z und u auflöst, so erhält man die Werthe:

$$681)\quad z = 0{,}2612\, l, \qquad 682)\quad u = 0{,}1082\, l,$$

und nach Substitution derselben in Gleichung 677) oder 678) für jedes von den beiden Biegungs-Momenten den Werth:

$$683)\quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = 0{,}0341\, p l^2.$$

Zugleich ergiebt sich hieraus für den Gegendruck jeder von den beiden Endstützen der Werth:

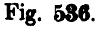
$$684)\quad K = p z = 0{,}2612\, p l,$$

und für den Gegendruck jeder von den beiden Mittelstützen der Werth:

$$685)\quad P = p l - K = 0{,}7388\, p l.$$

Es soll untersucht werden: in welche Lage bei dem continuirlichen — nicht durchschnittenen — Balken (Fig. 587) die vier Stützen gebracht werden müssen, wenn von den einzelnen

Theilen dieses Balkens ein jeder genau in demselben Spannungszustande sich befinden soll wie das gleichliegende Stück des durch


Fig. 536.

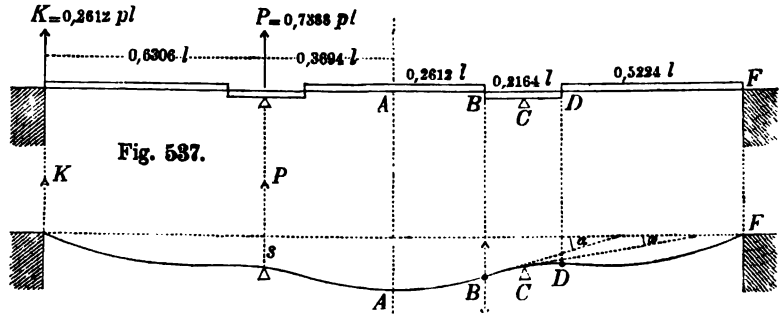


Fig. 537.

Schnitte getheilten Balkens in Fig. 536. Zunächst ergiebt sich, dass zu diesem Zwecke für die Horizontal-Entfernungen der Stützen in Fig. 537 dieselben Grössen wie in Fig. 536 gewählt werden müssen. Denkt man sich alsdann in Fig. 537 die Stützen in verticaler Richtung so lange gehoben oder gesenkt, bis die Vertheilung der Drücke auf die einzelnen Stützen genau dieselbe geworden ist wie in Fig. 536, so wird auch das Moment der biegenden Kraft an jeder Stelle des continuirlichen Balkens genau denselben Werth annehmen, wie an der gleichliegenden Stelle des durch Schnitte getheilten Balkens. An den Stellen B und D in Fig. 537 wird das Moment gleich Null sein, und das Stück DF wird genau in demselben Biegungszustande wie ein an beiden Enden frei aufliegender Balken sich befinden.

Denkt man sich die linke Seite des ganzen Balkens in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, dass das Stück AB genau in demselben Biegungszustande wie der in Fig. 538 dargestellte Balken sich befindet. Eine Vergleichung der Figuren 538 und 530 zeigt ferner, dass man den Winkel α nach Gleichung 660) berechnen kann, indem man darin die Grösse $+\alpha$ mit $-\alpha$, die Grösse l mit $0,2612\, l$ vertauscht und ausserdem $K = 0,2612\, pl$, $\omega = 0$ setzt. Man erhält also die Gleichung:

$$686)\quad -\alpha = \frac{p\,(0,2612\,.\,l)^3}{6\,E\mathfrak{T}} - \frac{0,2612\,pl\,.\,(0,2612\,.\,l)^2}{2\,E\mathfrak{T}}.$$

Den Biegungszustand des Stückes BC veranschaulicht Fig. 539, aus deren Vergleichung mit Fig. 529 zu ersehen ist, dass man

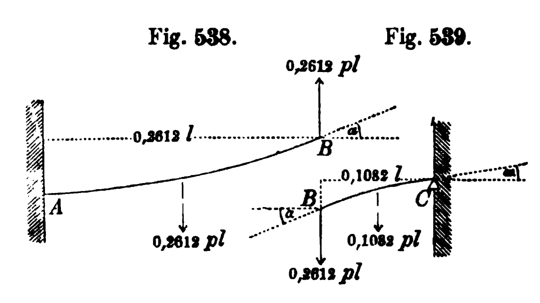


Fig. 538. Fig. 539.

den Winkel α auch nach Gleichung 658) berechnen kann, indem man darin die Grösse l mit $0,1082 \,.\, l$ vertauscht und:

$$K = 0,2612\, p\, l$$

setzt. Es ist also:

$$687) \quad \alpha = \omega + \frac{p \,.\, (0,1082 \,.\, l)^3}{6\, E\mathfrak{T}} + \frac{0,2612\, p\, l \,.\, (0,1082 \,.\, l)^2}{2\, E\mathfrak{T}}.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen 686) und 687) erhält man eine Gleichung, aus deren Auflösung für ω der Werth sich ergiebt:

$$688) \quad \omega = 0,004\,201 \frac{p\, l^3}{E\mathfrak{T}}.$$

Bei einer Vergleichung der Fig. 540, welche den Biegungszustand des Theiles CF darstellt, mit Fig. 530 findet man endlich, dass die der Mittelstütze zu ertheilende Senkung s aus Gleichung 661) berechnet werden kann, wenn man darin die Grössen $+s$, $+\omega$, l resp. vertauscht mit den

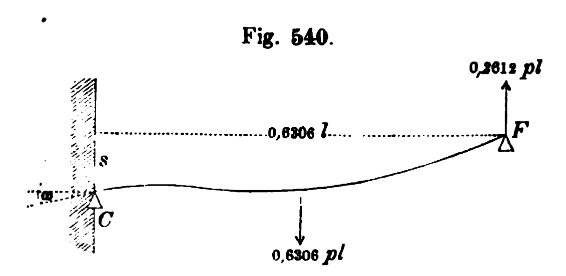


Fig. 540.

Grössen $-s$, $-\omega$, $0,6306\, l$, und ausserdem $K = 0,2612\, p\, l$ setzt, also aus der Gleichung:

$$689) \quad -s = -0,6306\, l\, \omega + \frac{p \,.\, (0,6306 \,.\, l)^4}{8\, E\mathfrak{T}} - \frac{0,2612\, p\, l \,.\, (0,6306 \,.\, l)^3}{3\, E\mathfrak{T}}.$$

Wenn hierin für ω der in Gleichung 688) gefundene Werth substituirt wird, so ergiebt sich für die erforderliche Senkung der Mittelstütze die Grösse:

$$690) \quad s = 0,004\,716 \frac{p\, l^4}{E\mathfrak{T}}.$$

In der Voraussetzung, dass der Querschnitt des Trägers dem Maximal-Momente (Gleichung 683) entsprechend gewählt wurde, kann man hierin für die Grösse $\mathfrak{T}$ den aus der Gleichung:

$$\frac{S}{w}\,\mathfrak{T} = 0{,}0341\; p\, l^2$$

sich ergebenden Werth substituiren, und die obige Gleichung nimmt alsdann die Form an:

$$691)\quad s = 0{,}1383\, \frac{S l^2}{E w}.$$

In dieser Gleichung bedeutet w die halbe Höhe des (constant und symmetrisch vorausgesetzten) Querschnittes, l die halbe Länge des Trägers, S die zulässige Spannung und E den Elasticitäts-Modulus.

Wenn für gleichförmig vertheilte Belastung die Tragfähigkeit eines auf vier Pfeilern ruhenden Brückenträgers von 300 Metern Länge ein Maximum werden soll, so muss (nach Fig. 536) die Mittelöffnung eine Weite von $110^m,82$ und jede von den beiden Seitenöffnungen eine Weite von $94^m,59$ erhalten. Wenn der Träger aus Schmiedeisen construirt ist, so kann $E = 20\,000$, $S = 6$ Kil. gesetzt werden, und wenn die Höhe des Trägers 10 Meter beträgt, so ist $w = 5000^{mm}$, $l = 150\,000^{mm}$ zu setzen in Gleichung 691), und es wird:

$$s = 186{,}7 \text{ Millimeter.}$$

Es müssen also ausserdem die beiden Mittelstützen um 186,7 Millimeter tiefer gelegt werden als die beiden Endstützen.

§ 140.

Kreisbogen als elastische Linie.

Der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie hat (nach Gleichung 639) die Grösse:

$$692)\quad \varrho = E \cdot \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}}$$

und zwar an derjenigen Stelle, an welcher das Moment der biegenden Kraft die Grösse $\mathfrak{M}$, und das Trägheits-Moment der Querschnittsfläche die Grösse $\mathfrak{T}$ hat. Wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}}$ für alle Stellen des Balkens gleiche Werthe annimmt, so ist auch der Krümmungshalbmesser an allen Stellen gleich gross, und die elastische Linie wird in diesem Falle ein Kreisbogen.

Bei einem Balken von constantem Querschnitte ist das Trägheits-Moment $\mathfrak{T}$ an allen Stellen von gleicher Grösse. Ein prismatischer Balken wird daher nur dann nach einer Kreislinie sich krümmen, wenn auch das Moment $\mathfrak{M}$ an allen Stellen des Balkens gleich gross ist, wie z. B. bei dem Theile AC des in Fig. 525 dargestellten Balkens.

Wenn dagegen die Grösse $\mathfrak{M}$ mit der Entfernung vom Endpunkte des Balkens sich ändert, so muss auch der Querschnitt ein veränderlicher sein, und wenn mit $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{M}_1$ resp. die Werthe bezeichnet werden, welche die Grössen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$ an einer bestimmten willkürlich zu wählenden Stelle — z. B. an dem einen Endpunkte — des Balkens annehmen, so drückt die Gleichung:

$$693)\quad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{M}_1}, \quad \text{oder:} \quad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1}$$

die allgemeine Bedingung aus, unter welcher die elastische Linie ein Kreisbogen wird.

Setzt man in Gleichung 628), als allgemeiner Gleichung für einen Träger von gleichem Widerstande, die Grössen w und w_1 einander gleich, so wird jene Gleichung identisch mit Gleichung 693). Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Bei constanter Höhe ist ein Träger, der unter Einwirkung der biegenden Kräfte nach einem Kreisbogen sich krümmt, zugleich ein Träger von gleichem Widerstande in Bezug auf jene biegenden Kräfte.

So z. B. hat der in Fig. 514 und Fig. 515 dargestellte Träger von gleichem Widerstande zugleich diejenige Form, welche der Bedingungs-Gleichung 693) entspricht; es wird also unter Einwirkung eines am freien Endpunkte aufgehängten Gewichtes jener Balken nach einem Kreisbogen sich krümmen.

Für den in Fig. 511 dargestellten Fall nimmt die allgemeine Bedingungs-Gleichung 693) die Form an:

$$694)\quad \frac{z u^3}{b h^3} = \frac{x}{l}.$$

Setzt man $z = b$, so erhält man für den in Fig. 512 und Fig. 513 dargestellten Träger von constanter Breite die Gleichung:

$$695)\quad \frac{u^3}{h^3} = \frac{x}{l},$$

bei deren Vergleichung mit Gleichung 632) man erkennt, dass in diesem Falle die Form des Trägers von constanter Krümmung und die Form des Trägers von gleichem Widerstande von einander verschieden sind.

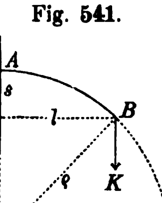
Die Senkung des Belastungspunktes kann für den in Fig. 541 dargestellten Balken von constanter Krümmung nach der Gleichung der Kreislinie

$$l^2 = 2\varrho s - s^2$$

berechnet werden. Wegen vorauszusetzender Kleinheit der Durchbiegung darf in dieser Gleichung das Glied s^2 weggelassen, und

die Grösse l als Länge des Balkens angesehen werden. Hiernach ergiebt sich für die Senkung des Belastungspunktes B der Werth:

Fig. 541.



$$696)\quad s = \frac{l^2}{2\varrho}.$$

Wenn man hierin für ϱ den in Gleichung 637) gefundenen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$697)\quad s = \frac{l^2 S}{2 w E}.$$

Für einen symmetrisch in Bezug auf die neutrale Achse geformten Querschnitt von der Höhe h ist $2w = h$ zu setzen, wird also:

$$698)\quad s = \frac{l^2}{h} \cdot \frac{S}{E}.$$

Wenn man statt dessen in Gleichung 696) für ϱ den Werth aus Gleichung 692) einführt, und für den constanten Quotienten $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}}$ den Werth $\frac{\mathfrak{T}_1}{Kl}$ substituirt, welchen derselbe an der Befestigungsstelle A annimmt, so erhält man die Gleichung:

$$699)\quad s = \frac{K l^3}{2 E \mathfrak{T}_1}.$$

Bei dem Träger von constanter Krümmung ist also die Senkung des Belastungspunktes 1,5-mal so gross als bei dem prismatischen Träger (Gleichung 649).

§ 141.

Berechnung der Federwerke.

Bei der Berechnung einer Feder sind als gegebene Grössen zu betrachten: die drei Grössen l, s, K, nämlich: die Länge der Feder, und die Grösse der Durchbiegung, welche von einer gegebenen Kraft K hervorgebracht wird (Fig. 542); ausserdem die Grösse des Elasticitäts-Modulus E, sowie die grösste (zulässige) Spannung S, welche bei jener Durchbiegung nicht überschritten werden soll. Diejenige Form ist als die zweckmässigste anzusehen, bei welcher der Material-Aufwand möglichst klein, und die Biegsamkeit möglichst gross ist. Die Feder ist daher, um der ersteren Bedingung zu genügen, als Träger von gleichem Widerstande, und um der letzteren Bedingung zu genügen, als Träger von constanter

Krümmung zu construiren. Da die dreieckige Feder von constanter Dicke beide Vorzüge vereinigt, so ist diese Form als die zweckmässigste zu wählen. Die zu berechnenden Grössen sind also die Dimensionen h und b des rechteckigen Querschnittes an der Befestigungsstelle (Fig. 543). Erstere ist zu bestimmen nach Gleichung 698), welche für h aufgelöst die Form annimmt:

Fig. 542. Fig. 543.

$$700)\quad h = \frac{l^2}{s} \cdot \frac{S}{E}.$$

Die Grösse b kann alsdann nach Gleichung 619) berechnet werden, welche für b aufgelöst die Form annimmt:

$$701)\quad b = \frac{6\,K\,l}{S\,h^2}.$$

Wenn z. B. eine gussstählerne Feder von 400 Millimetern Länge so beschaffen sein soll, dass derselben durch eine Kraft von 24 Kil. eine Durchbiegung von 60 Millimetern ertheilt wird, so ergiebt sich aus Gleichung 700), wenn für Gussstahl der Elasticitäts-Modulus $E = 30\,000$, und als zulässige Spannung pro Quadratmillimeter $S = 45$ Kil. gesetzt wird, für die Dicke der Feder der Werth:

$$h = \frac{400^2}{60} \cdot \frac{45}{30\,000} = 4 \text{ Millimeter},$$

und für die erforderliche Breite an der Befestigungsstelle ergiebt sich aus Gleichung 701) der Werth:

$$b = \frac{6\,.\,24\,.\,400}{45\,.\,4^2} = 80 \text{ Millimeter}.$$

Denkt man sich eine Dreieckfeder auf die in Fig. 544 angedeutete Art durch Parallel-Schnitte in Streifen von gleicher Breite getheilt, hierauf je zwei mit gleichen Ziffern bezeichnete Theile zu einem Stücke vereinigt und die einzelnen Stücke alsdann auf die in Fig. 545 angedeutete Art über einander gelegt, so erhält man ein zusammengesetztes Federwerk (Fig. 546), welches unter Einwirkung einer am freien Endpunkte B angreifenden Kraft K in jeder Beziehung genau ebenso sich verhält, wie die einfache (nicht durchschnittene) Dreieckfeder BDE.

Denn der Theil AB befindet sich bei dem zusammengesetzten Federwerke Fig. 546 genau in demselben Zustande wie bei der einfachen Dreieckfeder Fig. 544, krümmt sich also in beiden Fällen nach einem Kreisbogen von demselben Halbmesser. Soll der prismatisch geformte Theil AC der oberen Feder ebenfalls nach einem Kreisbogen von diesem Halbmesser sich biegen, so muss in dem

Punkte A eine aufwärts gerichtete Kraft K auf die obere Feder wirken, weil nur in diesem Falle das Moment der biegenden Kraft für alle Stellen zwischen A und C gleiche Werthe erhält. Diese aufwärts gerichtete Kraft K kann man sich zunächst dadurch hergestellt denken, dass man das aus den unteren Blättern gebildete Federwerk durch eine an dessen freiem Endpunkte A nach unten wirkende Kraft K in gebogenen Zustand versetzt und dasselbe in diesem Zustande unter die obere Feder als Stütze setzt, worauf dann die an der Stelle A für den Gleichgewichtszustand jedes der beiden Theile erforderlichen Kräfte K als Druck und Gegendruck von den beiden Theilen auf einander gegenseitig ausgeübt werden. Wenn man die gleiche Betrachtung alsdann in Bezug auf das zweite und successive auf jedes der folgenden Blätter wiederholt, so findet man, dass jedes derselben nach einem Kreisbogen sich krümmt, und dass die Halbmesser dieser Kreisbögen genau dieselbe Grösse haben wie bei demjenigen Kreisbogen, nach welchem die einfache Dreieckfeder Fig. 544 sich biegen würde. Da überdies jedes einzelne Blatt zugleich die Form eines Körpers von gleichem Widerstande hat, so ist auch die Biegungsspannung an allen Stellen von gleicher Grösse und zwar ebenso gross wie bei der ungetheilten Dreieckfeder.

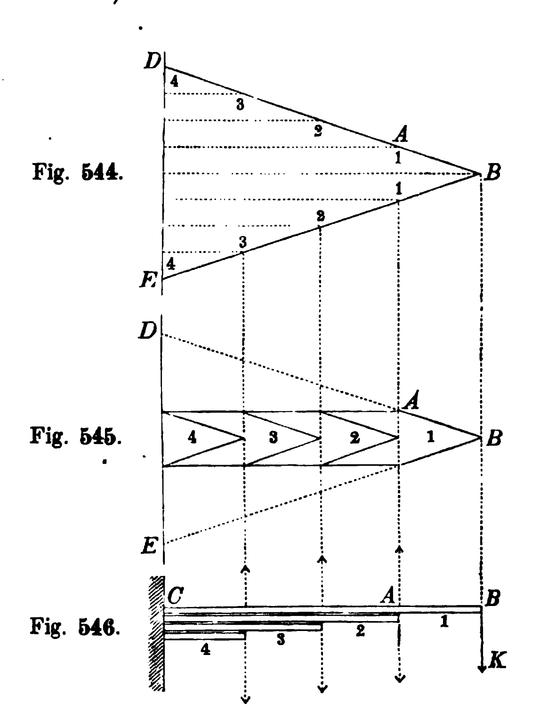


Fig. 544.

Fig. 545.

Fig. 546.

Anstatt das Ende jedes einzelnen Blattes bei constanter Dicke dreieckig zuzuspitzen, kann man annähernd auch bei constanter Breite durch eine nach dem Endpunkte hin abnehmende Dicke den gleichen Zweck erreichen. Wenn diese Abnahme der Dicke

genau dem in Gleichung 695) enthaltenen Gesetze entspricht, so wird jedes Blatt wie im vorigen Falle nach einem Kreisbogen sich biegen, und das zugeschärfte Endstück nur wenig abweichen von der Form eines Körpers von gleichem Widerstande.

Wäre bei den im vorigen Zahlenbeispiele angenommenen Zahlenwerthen $K = 120$ Kil. (statt $K = 24$ Kil.) gegeben gewesen, so würden aus den Gleichungen 700) und 701) resp. die Werthe $h = 4$ Millimeter und $b = 400$ Millimeter sich ergeben haben. Statt der einfachen Dreieckfeder von 400^{mm} Basis würde in diesem Falle ein auf die in Fig. 545 angedeutete Art zusammengesetztes Federwerk gleiche Dienste leisten, bestehend z. B. aus 4 Blättern von je 100^{mm} Breite, oder aus 5 Blättern von je 80^{mm} Breite, oder aus 8 Blättern von je 50^{mm} Breite.

ZWEIUNDZWANZIGSTES CAPITEL.

Zusammengesetzte Spannungen.

§ 142.

Widerstand gegen Zerknicken.

Wenn an den beiden Enden einer geradlinigen prismatischen Stange vom Querschnitte F zwei gleichförmig über die Endflächen vertheilte gleich grosse Druckkräfte K wirken, so entsteht in der Stange pro Flächeneinheit ihres Querschnittes eine Druckspannung:

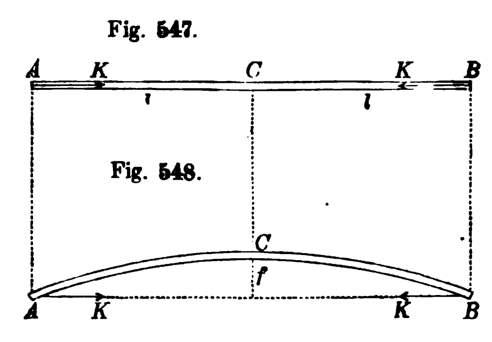


Fig. 547.

Fig. 548.

$$702) \quad S_1 = \frac{K}{F},$$

welche längs der ganzen Stange in jedem Querschnitte und in allen Theilen dieses Querschnittes eine und dieselbe Grösse hat (Fig. 547).

Angenommen: die Stange würde auf irgend eine Weise in eine gekrümmte Form gebracht, und die Krümmung so lange vergrössert, bis die Pfeilhöhe der Biegungscurve die Grösse f erreicht (Fig. 548); angenommen ferner: die Stange würde in diesem gebogenen Zustande der Wirkung der beiden Kräfte K ausgesetzt, und die letzteren würden so lange vergrössert, bis dieselben für

sich allein ausreichen, die Stange in einem solchen gebogenen Zustande zu erhalten, bei welchem die Pfeilhöhe der Biegungscurve gleich f ist. Die grösste Druckspannung, welche unter diesen Umständen in der Stange entsteht, lässt sich auf folgende Weise berechnen.

Die an irgend einer Stelle eines bestimmten Querschnittes stattfindende Spannung kann in diesem Falle angesehen werden als aus zwei Spannungen zusammengesetzt: nämlich aus der gleichförmig über die Querschnittsfläche vertheilten Druckspannung S_1, welche wie im vorigen Falle aus Gleichung 702) bestimmt werden kann und aus der in Folge der Krümmung an dieser Stelle entstehenden Biegungsspannung, welche von dem Momente der biegenden Kraft abhängt und an der concaven Stelle der Krümmung ebenfalls eine Druckspannung bildet. Das Moment der biegenden Kraft erreicht an der Stelle C seinen grössten Werth:

$$703)\quad \mathfrak{M} = Kf;$$

es wird daher die in Folge der Biegung hinzukommende Druckspannung ebenfalls an dieser Stelle (und zwar an der concaven Seite) ihren grössten Werth annehmen. Setzt man in der allgemeinen Gleichung 610) für $\mathfrak{M}$ den obigen Werth, so erhält man für diese allein von der Biegung herrührende grösste Druckspannung S_2 die Gleichung:

$$704)\quad S_2 = \frac{u'}{\mathfrak{T}} \cdot Kf.$$

Die grösste in der Stange überhaupt vorkommende Druckspannung S ist nunmehr zu berechnen aus der Gleichung:

$$705)\quad S = S_1 + S_2.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass die Elasticitäts-Widerstände der Stange auf zwei verschiedene Arten jenen Druckkräften K das Gleichgewicht halten können: das eine Mal auf die in Fig. **547** angedeutete Art, bei welcher die hervorgebrachte Druckspannung nur die Grösse S_1 erreicht; das andere Mal auf die in Fig. **548** angedeutete Art, bei welcher die grössere Druckspannung $S_1 + S_2$ entsteht. Wenn also diejenige Querschnittsgrösse F berechnet werden sollte, bei welcher die Widerstandsfähigkeit der Stange jenen Druckkräften gegenüber eine hinreichende Grösse besitzt, so würde zunächst die Frage entschieden werden müssen, ob jene Druckkräfte auf die erste oder auf die zweite Art die Widerstandsfähigkeit der Stange in Anspruch nehmen werden. Im ersten Falle

würde in Gleichung 702) für S_1 die Grösse der zulässigen Druckspannung zu setzen und die Grösse F unmittelbar aus dieser Gleichung zu berechnen sein. Im zweiten Falle dagegen würde man dem Querschnitt eine solche Grösse zu geben haben, bei welcher erst die Summe der beiden Spannungen S_1 und S_2 die Grösse der zulässigen Druckspannung erreicht.

Bei langen dünnen Stangen reicht die geringste zufällige Krümmung schon hin, um zu bewirken, dass durch die Druckkräfte eine seitliche Ausbiegung hervorgebracht, und der Widerstand gegen Zerknicken in Anspruch genommen wird. Wenn also nicht durch besonders günstige Umstände — wie etwa durch feste Wände, welche die Stange von allen Seiten umgeben und die Form derselben geradlinig erhalten — jede Möglichkeit einer seitlichen Ausbiegung ausgeschlossen ist, so wird man bei der Querschnitts-Berechnung allemal die zweite Methode vorziehen und der Sicherheit wegen von der Voraussetzung ausgehen, dass jede Druckkraft ausser der direct hervorgebrachten Druckspannung S_1 noch eine Biegungsspannung S_2 erzeugt, entsprechend — nach Gleichung 704) — dem grössten Werthe, welchen der Hebelarm f im ungünstigsten Falle erreichen kann.

Für diese Grösse f lässt sich auf folgende Weise ein oberer Grenzwerth ermitteln, in Bezug auf welchen mit Bestimmtheit behauptet werden kann, dass bei genügender Stärke der Stange in Wirklichkeit niemals eine Durchbiegung entstehen kann, bei welcher der Hebelarm der Kraft K jenen Grenzwerth erreichte. Denkt man sich nämlich die Stange an allen Stellen gleich stark gekrümmt — in welchem Falle also die Biegungscurve ein Kreisbogen wird — und denkt man sich zugleich diese Krümmung so stark, dass die solcher Krümmung entsprechende Biegungsspannung für sich allein schon die Elasticitäts-Grenze erreicht, so würde offenbar bei dem Hinzutreten der gleichförmig vertheilten Druckspannung S_1 die Elasticitäts-Grenze überschritten werden. Könnte durch die Druckkräfte K ein solcher Zustand der Stange jemals herbeigeführt werden, so würde die Stärke der Stange jedenfalls ungenügend zu nennen sein. Wenn man also die einer solchen Krümmung entsprechende Pfeilhöhe f in Gleichung 704) als Hebelarm der Kraft K in Rechnung bringt, so wird der aus jener Gleichung hervorgehende Werth von S_2 jedenfalls grösser sein als die Biegungsspannung, welche bei genügender Stärke der Stange in Wirklichkeit durch die Kräfte K hervorgebracht

werden kann, und die aus dieser Annahme sich ergebende Querschnittsgrösse F wird etwas grösser ausfallen als in Wirklichkeit erforderlich ist.

Wenn man in Gleichung 595) dem Buchstaben S die Bedeutung der „Druckspannung an der Elasticitäts-Grenze" giebt, so bedeutet δ das Verkürzungsverhältniss, welches der Elasticitäts-Grenze entspricht. Man kann also den gesuchten Werth von f aus Gleichung 697) berechnen, indem man darin δ statt $\frac{S}{E}$ und f statt s substituirt, woraus sich die Gleichung ergiebt:

$$706)\quad f = \frac{l^2 \delta}{2w}.$$

Wenn man diesen Werth für f und ausserdem den aus Gleichung 702) für K sich ergebenden Werth in Gleichung 704) substituirt, so nimmt letztere die Form an:

$$707)\quad S_2 = \frac{\delta l^2 F}{2\mathfrak{T}} \cdot S_1,$$

und für die grösste Druckspannung in der Stange ergiebt sich nach Gleichung 705) der Werth:

$$708)\quad S = S_1\left(1 + \frac{\delta}{2}\frac{Fl^2}{\mathfrak{T}}\right).$$

Wenn man die ganze Länge der Stange $2l = L$ setzt und das Verhältniss $\frac{S}{S_1}$ mit n bezeichnet, so erhält man für letztere Zahl die allgemeine Gleichung:

$$709)\quad n = \frac{S}{S_1} = 1 + \frac{\delta}{8}\frac{FL^2}{\mathfrak{T}}.$$

In dieser Gleichung bedeutet S_1 diejenige Druckspannung, welche ohne das Hinzutreten der Biegung in der Stange entstanden sein würde, und die Verhältnisszahl n giebt an: wie vielmal die Druckspannung vergrössert werden kann durch das Hinzutreten der Biegung.

Die Zahl n giebt daher zugleich an: den wievielten Theil von der sonst zulässigen Druckspannung man als Belastung für jede Flächeneinheit des Querschnittes als zulässig in Rechnung bringen darf, wenn die Stange eine genügende Widerstandsfähigkeit gegen das Zerknicken besitzen soll.

Wenn man die Werthe des Coefficienten δ aus der Tabelle des § 132 bestimmt und in Gleichung 709) substituirt, so erhält man die Gleichungen resp. für:

Gusseisen: $\delta = \frac{15}{10\,000}$, 710) $n = 1 + \frac{1}{5333}\frac{FL^2}{\mathfrak{T}}$,

Schmiedeisen: $\delta = \frac{15}{20\,000}$, 711) $n = 1 + \frac{1}{10666}\frac{FL^2}{\mathfrak{T}}$,

Holz: $\delta = \frac{1,8}{1000}$, 712) $n = 1 + \frac{1}{4444}\frac{FL^2}{\mathfrak{T}}$.

In diesen Gleichungen bedeutet $\mathfrak{T}$ das Trägheits-Moment der Querschnittsfläche in Bezug auf diejenige Schwerpunktsachse, welche rechtwinkelig zur Biegungs-Ebene steht, d. h. rechtwinkelig zu derjenigen Ebene, in welcher eine Biegung der Stange am leichtesten hervorgebracht werden kann.

Wenn z. B. der Querschnitt ein Rechteck, und H die grössere, B die kleinere Seite desselben ist, so würde $\mathfrak{T} = \frac{HB^3}{12}$ zu setzen sein, wenn dagegen H die kleinere, B die grössere Seite wäre, so würde $\mathfrak{T} = \frac{BH^3}{12}$ zu setzen sein. Für letzteren Fall würde man also $\frac{F}{\mathfrak{T}} = \frac{BH}{\frac{1}{12}BH^3} = \frac{12}{H^2}$ zu substituiren haben und die Gleichungen erhalten resp. für:

Gusseisen: 713) $n = 1 + 0,002\,25 \left(\frac{L}{H}\right)^2$,

Schmiedeisen: 714) $n = 1 + 0,001\,125 \left(\frac{L}{H}\right)^2$,

Holz: 715) $n = 1 + 0,0027 \left(\frac{L}{H}\right)^2$,

aus denen sich z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe ergeben:

	$\frac{L}{H} =$	10	20	30	40	50
Gusseisen:	$n =$	1,225	1,9	3,025	4,6	6,625
Schmiedeisen:	$n =$	1,1125	1,45	2,0125	2,8	3,8125
Holz:	$n =$	1,27	2,08	3,43	5,32	7,75.

Setzt man als zulässige Druckspannung für Schmiedeisen $S = 6$ Kil., so würde z. B. eine parallelepipedische schmiedeiserne Stange, deren kleinere Querschnitts-Dimensionen H den zwanzigsten Theil der Länge L beträgt, nur mit dem Gewichte:

$$S_1 = \frac{S}{n} = \frac{6}{1,45} = 4,14 \text{ Kil.}$$

für jeden Quadratmillimeter des Querschnittes belastet werden dürfen; und wenn z. B. $H = 10^{mm}$, $B = 40^{mm}$ ist, so würde die Druckkraft K (Fig. 548) die Grösse:

$$K = F \,.\, S_1 = 400 \,.\, 4,14 = 1656 \text{ Kil.}$$

nicht überschreiten dürfen, wenn noch hinreichende Sicherheit gegen das Zerknicken vorhanden sein soll.

Wenn die Querschnittsfläche in der Differenz zweier Rechteckflächen besteht (Fig. 499), so ist $\frac{F}{\mathfrak{T}} = \frac{BH - bh}{\frac{1}{12}BH^3 - \frac{1}{12}bh^3}$ zu setzen, und die für Schmiedeeisen gefundene Gleichung 711) nimmt für diesen Fall die Form an:

$$716) \quad n = 1 + 0{,}001\,125 \frac{(BH - bh)L^2}{BH^3 - bh^3}.$$

Hiernach ergiebt sich z. B. für eine quadratische schmiedeiserne Röhre, deren Wandstärke $\frac{1}{20}$ der äusseren Dicke beträgt, die Gleichung:

$$717) \quad n = 1 + 0{,}000\,62 \left(\frac{L}{H}\right)^2,$$

und wenn zugleich die äussere Dicke H gleich dem zwanzigsten Theile der Länge L ist, so wird:

$$n = 1{,}248.$$

Eine solche Röhre würde also unter den obigen Voraussetzungen nur mit dem Gewichte:

$$S_1 = \frac{6}{1{,}248} = 4{,}8 \text{ Kil.}$$

pro Quadratmillimeter ihres Querschnittes belastet werden dürfen.

Für eine runde schmiedeiserne Röhre vom äusseren Durchmesser D und vom inneren Durchmesser d würde $\frac{F}{\mathfrak{T}} = \frac{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)}{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)} = \frac{16}{D^2 + d^2}$ zu setzen sein, und ergiebt sich nach Gleichung 711) der Werth:

Fig. 549.

$$718) \quad n = 1 + 0{,}0015 \left(\frac{L^2}{D^2 + d^2}\right).$$

Setzt man hierin $\frac{d}{D} = 0{,}9$ und $\frac{L}{D} = 20$, so wird $n = 1{,}3315$ und $S_1 = 4{,}5$ Kil.

Für $d = 0$ und $\frac{L}{D} = 20$ dagegen wird $n = 1{,}6$ und $S_1 = 3{,}75$ Kil.

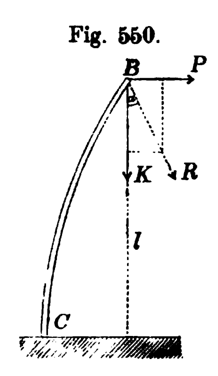
Denkt man sich in Fig. 548 die eine Hälfte der Stange in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, dass dadurch in dem Spannungszustande der anderen Hälfte — folglich auch in der bei C stattfindenden grössten Druckspannung — keine Aenderung hervorgebracht werden würde. Die allgemeine Gleichung 709) gilt daher auch für den in Fig. 549 dargestellten Fall, und wenn man wiederum $L = 2l$ setzt, so erhält man für diesen Fall die Gleichung:

$$719) \quad n = 1 + \frac{\delta}{2} \frac{Fl^2}{\mathfrak{T}}.$$

Für eine massive runde schmiedeiserne Stange, deren Länge $BC = l$ das Zwanzigfache des Durchmessers beträgt, würde also in diesem Falle $n = 3,4$ und $S_1 = \frac{6}{3,4} = 1,76$ Kil. zu setzen sein; und wenn der Querschnitt der Stange z. B. 100 Quadratmillimeter enthielte, so würde bei der in Fig. 549 dargestellten Befestigungsweise nur eine Belastung $K = 176$ Kil. als zulässig zu betrachten sein (während dieselbe Stange bei der in Fig. 548 dargestellten Belastungsweise ein Gewicht $K = 375$ Kil. mit hinreichender Sicherheit tragen würde).

Wenn an dem freien Ende der Stange ausser der parallel zur Richtung derselben wirkenden Kraft K noch eine rechtwinkelig zu derselben gerichtete Kraft P wirkt (Fig. 550), so setzt sich die grösste in der Stange vorkommende Druckspannung an der Befestigungsstelle C aus drei Spannungen zusammen, von denen die beiden ersten wie im vorigen Falle zu bestimmen sind, während für die von der Kraft P hervorgebrachte dritte Spannung S_3 aus Gleichung 610) der Werth sich ergiebt:

Fig. 550.



$$720)\quad S_3 = \frac{w}{\mathfrak{T}} P l.$$

Betrachtet man die Kräfte K und P als Seitenkräfte der den Winkel α mit der Stangenrichtung einschliessenden Kraft R, und setzt man $P = K \operatorname{tg} \alpha$, oder [da nach Gleichung 702) $K = S_1 F$ ist] $P = S_1 F \operatorname{tg} \alpha$, so erhält man die Gleichung:

$$721)\quad S_3 = \frac{w\, l\, F \operatorname{tg} \alpha}{\mathfrak{T}} \cdot S_1.$$

Um die zulässige Grösse der Kraft K zu bestimmen, hat man die Summe der drei Spannungen S_1 (Gleichung 702), S_2 (Gleichung 707), S_3 (Gleichung 721) gleich der zulässigen Spannung S zu setzen und erhält dann für das Verhältniss der letzteren zur ersteren die Gleichung:

$$722)\quad n = \frac{S}{S_1} = 1 + \frac{F l^2}{\mathfrak{T}} \left(\frac{\delta}{2} + \frac{w}{l} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Wenn man aus dieser Gleichung die Grösse S_1 berechnet hat, so kann man die Grösse R aus Gleichung 702) bestimmen, indem man darin für K den Werth $R \cos \alpha$ substituirt, woraus sich die andere Gleichung ergiebt:

$$723)\quad R = \frac{F S_1}{\cos \alpha}.$$

Setzt man z. B. $\alpha = 45^{\circ}$, so erhält man für eine runde schmiedeiserne Stange, deren Länge das Zwanzigfache des Durchmessers beträgt, aus Gleichung 722) $n = 163{,}4$, also $S_1 = \frac{6}{163{,}4} = 0{,}0367$ Kil. und nach Gleichung 693) $R = F \,.\, 0{,}052$; also z. B. für $F = 1000 \square^{mm}$ wird $R = 52$ Kil.

Fig. 551. Fig. 552.

Für den Fall, dass statt der einzelnen Kraft P ein Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M} = Ka$ an dem freien Ende der Stange wirkt (Fig. 551), hat man nach Gleichung 610):

$$724) \quad S_3 = \frac{w}{\mathfrak{T}} Ka$$

zu setzen und im Uebrigen die Grösse n wie beim vorigen Falle zu bestimmen. Setzt man nach Gleichung 702) $K = FS_1$, so erhält man die Gleichung:

$$725) \quad n = \frac{S}{S_1} = 1 + \frac{Fl^2}{\mathfrak{T}} \left[\frac{\delta}{2} + \left(\frac{w}{l}\right) \cdot \left(\frac{a}{l}\right) \right],$$

welche auch für den in Fig. 552 dargestellten Fall gültig ist, da man durch Hinzufügung der beiden entgegengesetzten Kräfte K in dem Punkte B ein Kräftepaar vom Momente Ka und ausserdem eine im Punkte B angreifende Einzelkraft K erhält.

Wenn z. B. bei den im vorigen Falle angenommenen Werthen $\frac{a}{l} = \frac{1}{25}$ gesetzt wird, so erhält man $n = 9{,}8$ und $S_1 = \frac{6}{9{,}8} = 0{,}612$ und als zulässige Belastung des Punktes D (Fig. 552) die Grösse $K = F \,.\, S_1 = 612$ Kil.

Wenn die Stange aus einem Material besteht, für welches die zulässige Zug-Spannung kleiner ist als die zulässige Druck-Spannung (wie z. B. bei dem Gusseisen), so würde man bei allen diesen Fällen der Sicherheit wegen ausserdem noch zu untersuchen haben, ob bei dem vorauszusetzenden Biegungszustande der Stange die an der convexen Seite der Biegungscurve bei der Befestigungsstelle C entstehende grösste Zug-Spannung die für letztere als zulässig anzunehmende Grösse nicht überschreitet.

§ 143.

Widerstand gegen Abscheerung.

Denkt man sich die an den festen Punkten A und B befestigten beiden rechtwinkelig zu einander gerichteten Stangen

AC und BC (Fig. 553) durch einen Gelenkbolzen C mit einander verbunden und an diesem Verbindungspunkte ein Gewicht K aufgehängt, so entsteht in der Stange AC der Zug-Widerstand:

726) $Z = K \cos \alpha$,

und die Stange BC leistet den Druck-Widerstand:

727) $D = K \sin \alpha$.

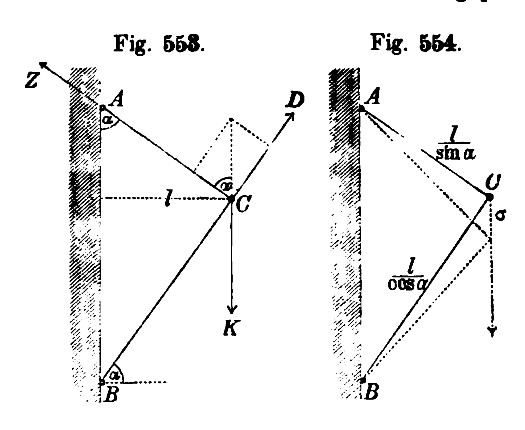


Fig. 553. Fig. 554.

In Folge der mit diesen Spannungen verbundenen Längenänderungen der beiden Stangen senkt sich der Belastungspunkt um eine Grösse σ (Fig. 554), welche als aus zwei Theilen σ_1 und σ_2 zusammengesetzt angesehen werden kann. Den ersten Theil σ_1 findet man, indem man annimmt, dass nur die Stange AC ihre Länge ändert (Fig. 555), den anderen Theil σ_2, indem man annimmt, dass nur die Stange BC ihre Länge ändert (Fig. 556). Es soll angenommen werden, dass die Querschnittsflächen der Stangen resp. den von ihnen zu leistenden Widerständen Z und D proportional gewählt wurden, dass also die Spannung pro Flächeneinheit des Querschnittes in beiden Stangen dieselbe Grösse hat.

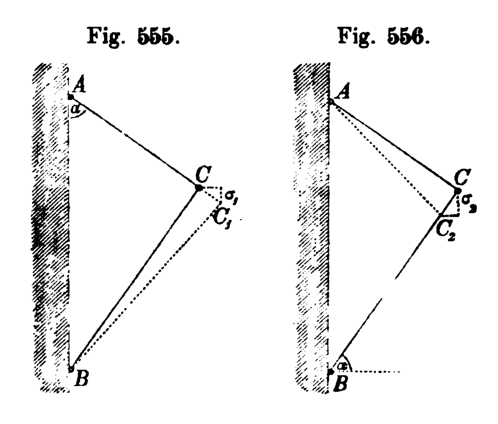


Fig. 555. Fig. 556.

In diesem Falle ist das Verlängerungs-Verhältniss der Stange AC ebenso gross wie das Verkürzungs-Verhältniss der Stange BC; wenn also dieses Verhältniss mit δ bezeichnet wird, so ist:

$$728) \quad \delta = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CC_2}}{\overline{BC}}.$$

Da die Längenänderungen als verhältnissmässig sehr kleine Grössen zu betrachten sind, so kann nach Fig. 555 gesetzt werden:

$$729)\quad \sigma_1 = \overline{CC_1} \,.\, \cos\alpha = \delta \,.\, \overline{AC} \,.\, \cos\alpha = \delta \frac{l}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha$$

und aus Fig. 556 ergiebt sich für die Senkung σ_2 der Werth:

$$730)\quad \sigma_2 = \overline{CC_2} \,.\, \sin\alpha = \delta \,.\, \overline{BC} \,.\, \sin\alpha = \delta \frac{l}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha.$$

Durch Addition dieser beiden Grössen erhält man für die totale Senkung den Werth:

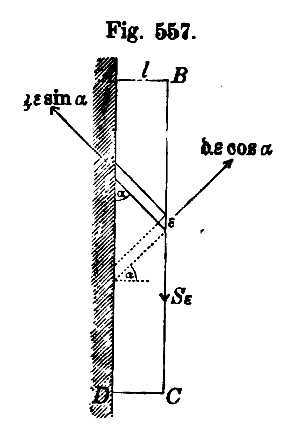
$$731)\quad \sigma = \delta l \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \right) = \frac{2\delta l}{\sin 2\alpha}.$$

In dem speciellen Falle, wenn $\alpha = 45^\circ$ ist, wird also:

$$732)\quad \sigma = 2\delta l.$$

Wie in Fig. 553 die Elasticitäts-Widerstände der beiden Stangen AC und BC, so kann man sich die Zug- und Druck-Widerstände der gezogenen und gedrückten Fasern wirkend vorstellen in einem sehr kurzen Balkenstücke $ABCD$ (Fig. 557), welches am einen Ende in einer festen Wand befestigt, einer am anderen Ende wirkenden abscheerenden Kraft ausgesetzt ist. Man kann sich dieses Balkenstück zerlegt denken in parallele Streifen, deren Richtung den Winkel α mit der Verticalen einschliesst, und annehmen, dass in diesen Streifen Zug-Spannungen entstehen, während gleichzeitig in einer Richtung rechtwinkelig zu ihrer Längenrichtung Druck-Spannungen in diesen Streifen hervorgebracht werden. Das Zusammenwirken dieser Zug- und Druck-Widerstände kann man sich in ähnlicher Weise geschehend vorstellen, wie wenn jeder von den gezogenen Streifen an seinem Endpunkte unterstützt wäre durch einen rechtwinkelig zu ihm gerichteten gedrückten Streifen, dessen Material zugleich einen Theil des in den unterhalb liegenden gezogenen Streifen enthaltenen Materials bildet.

Fig. 557.



Wenn die verticale Endfläche eines der gezogenen Streifen mit ε bezeichnet wird, so ist $\varepsilon \sin\alpha$ der Querschnitt des gezogenen, und $\varepsilon \cos\alpha$ der Querschnitt des zugehörigen gedrückten

Streifens. Wenn ferner mit S die auf jede Flächeneinheit der verticalen Endfläche wirkende abscheerende Kraft bezeichnet wird, und resp. mit $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{d}$ die in den gezogenen und gedrückten Streifen entstehenden Zug- und Druck-Spannungen pro Flächeneinheit, so nehmen die Gleichungen 726) und 727) für diesen Fall die Form an:

$$\mathfrak{z}\,.\,\varepsilon \sin\alpha = S\varepsilon\,.\,\cos\alpha, \quad \mathfrak{d}\,.\,\varepsilon\cos\alpha = S\varepsilon\,.\,\sin\alpha, \quad \text{oder:}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{S}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \mathfrak{d} = S\,.\,\operatorname{tg}\alpha.$$

Die Grössen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{d}$ hängen also ab von der willkürlich angenommenen Grösse des Winkels α. Man darf voraussetzen, dass in Wirklichkeit die gezogenen und gedrückten Fasern solche Richtungen annehmen, bei welchen für die Zug- und Druck-Spannungen in denselben g l e i c h e Grössen sich ergeben. Unter dieser Voraussetzung würde $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ oder $\alpha = 45^\circ$ zu setzen sein und wird:

$$733)\quad \mathfrak{z} = S = \mathfrak{d}.$$

Zugleich kann in diesem Falle die Senkung der Endfläche nach Gleichung 732) bestimmt werden, wenn wiederum der Quotient $\frac{S}{E} = \delta$ gesetzt wird, oder aus der Gleichung:

$$734)\quad \sigma = 2\,\frac{S}{E}\,l,$$

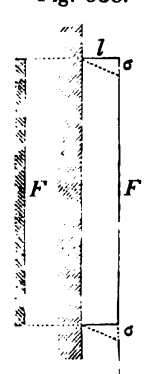


Fig. 558.

welche zeigt, dass diese der Abscheerungsspannung S entsprechende Verschiebung doppelt so gross ist, als die der Längsspannung S entsprechende Verlängerung des Balkens sein würde.

Wenn die ganze Endfläche mit F und die ganze auf die Endfläche wirkende abscheerende Kraft mit K bezeichnet wird (Fig. 558), so ist $K = SF$ zu substituiren, und man erhält die Gleichungen:

$$735)\quad \sigma = 2\,\frac{Kl}{FE} \quad \text{und} \quad 736)\quad \mathfrak{z} = \frac{K}{F} = \mathfrak{d},$$

deren letztere zeigt, dass die von der auf Abscheerung wirkenden Kraft K hervorgebrachten Zug- und Druck-Spannungen dieselbe Grösse haben, wie wenn diese Kraft K in horizontaler Richtung wirkend den Balken in seiner Längenrichtung spannte, in welchem Falle ebenfalls pro Flächeneinheit des Querschnittes die Spannung $S = \frac{K}{F}$ in dem-

selben entstehen würde. Hieraus folgt z. B. in Bezug auf die in Fig. 512 und Fig. 515 dargestellten Formen eines Trägers von gleichem Widerstande: dass der Querschnitt des Balkens nach dem Endpunkte hin nicht bis auf die Grösse Null abnehmen darf, sondern nur bis auf diejenige Grösse:

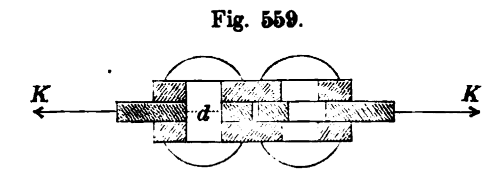
$$737)\quad F = \frac{K}{S},$$

bei welcher die Widerstandsfähigkeit des Balkens gegen die abscheerende Wirkung der am freien Ende desselben angreifenden Kraft K noch eine hinreichende Grösse behält.

Zur vollständigen Lösung der in § 135 behandelten Aufgabe, betreffend die Maximalspannung im gebogenen Balken, würde noch erforderlich sein, zu untersuchen: nach welchem Gesetze die Abscheerungskraft $V = K$ (Fig. 498) auf die Querschnittsfläche des Balkens sich vertheilt, und auf welche Weise die in jedem Querschnitte durch die abscheerende Wirkung der Kraft K hervorgebrachten Zug- oder Druck-Spannungen mit den der biegenden Wirkung dieser Kraft entsprechenden horizontalen Biegungsspannungen zu den resultirenden Spannungen sich zusammensetzen. Es zeigt sich indessen bei diesen Untersuchungen, dass die auf solche Weise zu bestimmenden wirklichen Maximalspannungen in den meisten Fällen nur um Weniges grösser sind als die in § 135 gefundenen Werthe, und dass bei einem prismatischen Balken, dessen Länge gross ist im Verhältniss zu dessen Querschnittsdimensionen, in der Regel die abscheerende Wirkung der biegenden Kraft ganz unberücksichtigt gelassen werden darf.

Die Gleichung 737) kann auch benutzt werden zur Bestimmung der erforderlichen Querschnittsflächen der Niete bei Blechverbindungen, wobei zu unterscheiden ist zwischen dem Falle, in welchem bei etwa erfolgender Trennung der Verbindung eine Abscheerung des Nietes längs einer Querschnittsfläche, und dem Falle, in welchem eine Abscheerung längs zwei Querschnittsflächen zugleich entstehen würde — wie z. B. bei der in Fig. 559 dargestellten Verbindung. In letzterem Falle ist die erforderliche Querschnittsfläche des Nietes zu berechnen aus der Gleichung:

Fig. 559.



$$2\,F\,S = K,$$

und für die Grösse d, als erforderlichen Durchmesser des Nietes, ergiebt sich die Gleichung:

$$738)\quad 2 \cdot \frac{\pi}{4}\,d^2 \,.\, S = K, \quad \text{oder:} \quad d = \sqrt{\frac{2K}{S\pi}},$$

in welcher für die zulässige Spannung S im Allgemeinen ein etwas kleinerer Werth in Rechnung zu bringen ist, als bei Stangen, welche in ihrer Längenrichtung gezogen werden, insofern die oben gemachte Voraussetzung: dass die abscheerende Kraft gleichförmig über die Querschnittsfläche sich vertheilt, hier nicht in aller Strenge zutrifft.

Setzt man z. B. $K = 1000$ Kil. und als zulässige Abscheerungsspannung für Schmiedeisen $S = 4$ Kil. pro Quadratmillimeter, so erhält man als erforderlichen Durchmesser des Nietes:

$$d = \sqrt{\frac{2 \,.\, 1000}{4 \,.\, 3{,}14}} = 12{,}6 \text{ Millimeter.}$$

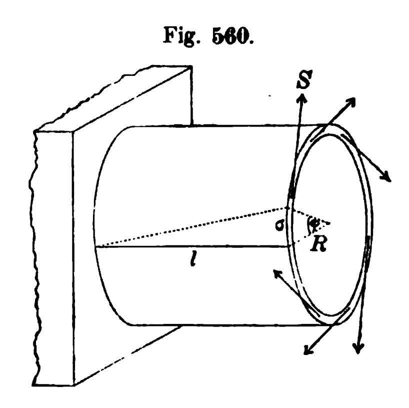
Selbstverständlich ist in solchen Fällen, wo mehrere in einer Reihe befindliche Niete an dem Widerstande gegen die abscheerende Kraft sich betheiligen, für K derjenige Bruchtheil der ganzen Kraft in Rechnung zu bringen, welcher bei der Vertheilung auf das einzelne Niet fällt.

§ 144.

Widerstand gegen Torsion.

Die Gültigkeit der im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen beschränkt sich auf solche Fälle, in denen die Länge l des aus der festen Wand hervorragenden Balkenstückes oder Blechstreifens (Fig. 558) eine sehr geringe Grösse hat, und die gleichzeitig entstehenden Biegungsspannungen in Folge dessen nicht in Betracht kommen. Wenn man sich dagegen jenen Blechstreifen kreisförmig in sich zurücklaufend zu einer Röhre umgeformt denkt, wobei jede von den auf die einzelnen Flächeneinheiten der Endfläche wirkenden Abscheerungskräften S nunmehr eine in tangentialer Richtung an der ringförmigen Endfläche wirkende Kraft bildet (Fig. 560), so findet man, dass in diesem Falle die Gleichungen 733) und 734) für jede beliebige Länge der Röhre gültig bleiben. Denn wenn man sich die ganze Röhre in unendlich kurze Stücke von gleicher Länge zerlegt denkt, so zeigt es sich, dass jedes einzelne von diesen Ringstücken genau in demselben Zustande wie jedes der übrigen sich befindet, dass also die ganze Verschiebung der

Fig. 560.



Endfläche, als Summe der unendlich kleinen Verschiebungen, welche für jeden einzelnen Ring nach § 143 sich ergeben würden, unmittelbar aus Gleichung 734) bestimmt werden kann, wenn man darin für l die ganze Länge der Röhre setzt. Für den der Abscheerungsspannung S entsprechenden Verdrehungswinkel φ ergiebt sich hiernach die Gleichung:

$$739) \quad \sigma = R \,.\, \varphi = 2\,\frac{S}{E}\,l,$$

welche zeigt, dass bei gegebener Länge der Röhre die einem bestimmten Verdrehungswinkel der Endfläche entsprechende Abscheerungsspannung S dem Halbmesser R proportional ist.

Wenn also bei einem massiven Cylinder, dessen eine Endfläche an einer festen Wand befestigt ist, die freie Endfläche um einen bestimmten Winkel φ verdreht wird, so entstehen in den einzelnen Hohlcylindern, aus welchen man sich den massiven Cylinder zusammengesetzt denken kann, Abscheerungsspannungen von verschiedenen Grössen, deren Verhältniss gleich dem Verhältniss der Halbmesser dieser Hohlcylinder ist, und wenn mit s die Abscheerungsspannung pro Flächeneinheit in der Querschnittsfläche des Hohlcylinders vom Halbmesser ϱ bezeichnet wird (Fig. 561), so ist:

Fig. 561.

$$740) \quad \frac{s}{S} = \frac{\varrho}{R}, \quad \text{oder:} \quad s = \frac{S}{R}\cdot\varrho.$$

Diese Spannung s bildet zugleich den in jeder Flächeneinheit dieser ringförmigen Querschnittsfläche auftretenden tangential gerichteten Widerstand, welcher der Verdrehung des Cylinders entgegenwirkt. Der in einem Flächentheilchen f dieser Ringfläche auftretende Torsionswiderstand (Fig. 562) ist also:

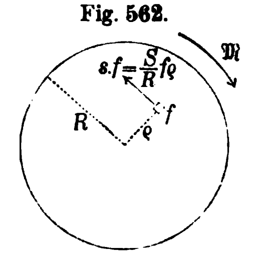


Fig. 562.

$$741) \quad s f = \frac{S}{R}.f\varrho,$$

und das statische Moment dieses Widerstandes in Bezug auf die Achse des Cylinders ist:

$$742) \quad s f\varrho = \frac{S}{R}.f\varrho^2.$$

Das Moment $\mathfrak{M}$ eines auf die freie Endfläche des Cylinders wirkenden Kräftepaares, welches diese Verdrehung hervorbringen

(oder den Cylinder in diesem Torsionszustande erhalten) soll, muss gleich der Summe der statischen Momente aller der in den einzelnen Flächentheilchen der ganzen Querschnittsfläche auftretenden Torsionswiderstände sein, also ist:

$$743)\quad \mathfrak{M} = \Sigma\left(\frac{S}{R} f \varrho^2\right),$$

oder, da die Grösse $\frac{S}{R}$ gemeinschaftlicher Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder ist:

$$744)\quad \mathfrak{M} = \frac{S}{R} \Sigma(f \varrho^2).$$

Wenn man die Grösse $\Sigma(f\varrho^2)$ als Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf die geometrische Achse des Cylinders mit $\mathfrak{T}_0$ bezeichnet, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$745)\quad \mathfrak{M} = \frac{S}{R} \mathfrak{T}_0.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die von dem Kräftepaare $\mathfrak{M}$ hervorgebrachte grösste Abscheerungs-Spannung S berechnen, welche zugleich (nach Gleichung 733) mit den grössten in dem ganzen Cylinder vorkommenden Zug- und Druck-Spannungen ihrer Grösse nach übereinstimmt.

Um ferner den von diesem Kräftepaare hervorgebrachten Torsionswinkel φ zu bestimmen, hat man den aus obiger Gleichung für S sich ergebenden Werth:

$$746)\quad S = \frac{R}{\mathfrak{T}_0} \cdot \mathfrak{M}$$

in Gleichung 739) zu substituiren, welche alsdann für φ aufgelöst, die Form annimmt:

$$747)\quad \varphi = \frac{2\,\mathfrak{M}\,l}{E\,\mathfrak{T}_0}.$$

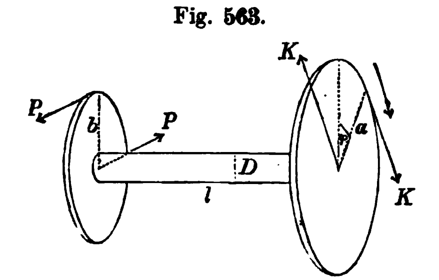
Für einen Hohlcylinder vom äusseren Halbmesser R und inneren Halbmesser r würde nach Gleichung 457) $\mathfrak{T}_0 = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$ zu setzen sein; für den massiven Cylinder dagegen $\mathfrak{T}_0 = \frac{\pi}{2} R^4$. Wenn man den letzteren Werth in Gleichung 746) substituirt, so nimmt dieselbe für R aufgelöst die Form an:

$$748)\quad R = \sqrt[3]{\frac{2\,\mathfrak{M}}{S\pi}}$$

und kann in dieser Form benutzt werden zur Berechnung des er-

forderlichen Durchmessers einer Welle, deren Torsionswiderstand durch zwei gleiche entgegengesetzt drehende Kräftepaare vom Momente $\mathfrak{M} = Ka = Pb$ in Anspruch genommen wird, und welche unter Einwirkung dieser beiden einander im Gleichgewicht haltenden Drehkräfte eine gleichförmige Drehbewegung ausführt (Fig. 563).

Fig. 563.



Wenn z. B. $K = 1000$ Kil., $a = 400^{mm}$ und (als zulässige Abscheerungsspannung für Schmiedeisen) $S = 4$ Kil. gesetzt wird, so ergiebt sich für den erforderlichen Durchmesser der Werth:

$$D = 2R = 2\sqrt[3]{\frac{2 \,.\, 1000 \,.\, 400}{4 \,.\, 3{,}14}} = 80 \text{ Millimeter},$$

welcher unabhängig ist von der Länge der Welle. Der Torsionswinkel dagegen hängt ab vom Abstande der Drehungsebenen der beiden Kräftepaare von einander, und wenn man z. B. $l = 10\,000^{mm}$ setzt, so erhält man aus Gleichung 739) für φ den Werth:

$$\varphi = \frac{2Sl}{RE} = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 10\,000}{40 \,.\, 20\,000} = 0{,}1, \quad \text{oder:} \quad \varphi = 5^0\, 43'\, 4''.$$

Nach Gleichung 376) kann für das Moment des treibenden (oder des widerstehenden) Kräftepaares auch der Werth gesetzt werden (für den Millimeter als Längeneinheit):

$$\mathfrak{M} = \frac{N}{n} \cdot \frac{60 \,.\, 75\,000}{2\pi},$$

worin n die Umdrehungszahl der Welle pro Minute und N die von dem treibenden Kräftepaare auf die Welle übertragene mechanische Arbeit in Pferdekräften ausgedrückt bezeichnet. Wenn man diesen Werth in Gleichung 748) substituirt, so erhält man für den Durchmesser der Welle die Gleichung:

$$749) \quad D = 2R = 154\sqrt[3]{\frac{N}{nS}}.$$

Eine schmiedeiserne Welle z. B., welche in jeder Minute 100 Umdrehungen macht und dabei eine mechanische Arbeit von 50 Pferdekräften von einer Welle auf die andere überträgt, muss den Durchmesser erhalten:

$$D = 154\sqrt[3]{\frac{50}{100 \,.\, 4}} = 77 \text{ Millimeter}.$$

DREIUNDZWANZIGSTES CAPITEL.

Berechnungen von Dach- und Brücken-Constructionen.

§ 145.

Methode der statischen Momente.

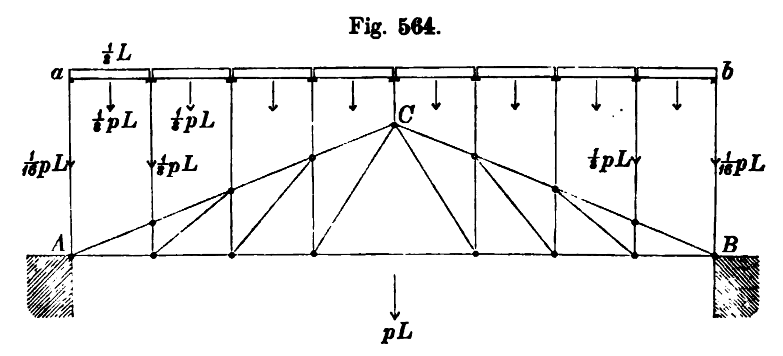
Die Biegungsspannungen, welche in einem an seinen beiden Endpunkten unterstützten Balken durch eine gleichförmig über die Länge desselben vertheilte Belastung hervorgebracht werden, sind immer ungleichförmig über die Querschnittsfläche desselben vertheilt. Während bei Zunahme der Belastung die Spannung der am weitesten von der Neutralen entfernten Faser schon die Elasticitätsgrenze erreicht, befinden sich die in der Nähe der Neutralen liegenden Fasern noch in Spannungszuständen, bei welchen die Widerstandsfähigkeit des in ihnen enthaltenen Materials nur theilweise in Anspruch genommen wird. Wenn also das zum Tragen der Belastung bestimmte Material in Form eines massiven Tragbalkens verwendet wird, so ist die Materialverwendung insofern eine ungünstige und unvortheilhafte zu nennen: als auf diese Weise niemals die volle Ausnutzung der ganzen Widerstandsfähigkeit des verwendeten Materials zu erreichen ist.

Diesen Uebelstand kann man dadurch vermeiden, dass man den massiven Tragbalken ersetzt durch ein System von geradlinigen Stangen, die auf solche Weise mit einander verbunden sind, dass in jeder Stange nur Zug- oder Druck-Spannungen — niemals aber Biegungsspannungen — entstehen können. Die letztere Bedingung lässt sich dadurch erfüllen, dass je zwei Stangen, da wo sie zusammentreffen, durch einfache Gelenkbolzen (Scharniere) mit einander verbunden, und ausschliesslich diese Gelenkpunkte als Belastungspunkte gewählt werden. Denn wenn man sich in einer solchen Stangen-Verbindung irgend eine (als gewichtlos zu betrachtende) Stange durchschnitten denkt und an jeder Schnittstelle eine Kraft hinzugefügt, welche den früheren Gleichgewichtszustand wieder herstellt, so fällt diese Kraft stets mit der Längenrichtung der Stange zusammen, da sie andernfalls die Stange um den Gelenkpunkt drehen würde (vergl. Fig. 211). Die Spannung einer Stange, welche in ihrer Längenrichtung gezogen oder gedrückt wird, vertheilt sich gleichförmig, sowohl über die Querschnittsfläche, als auch über die ganze Länge der Stange. Es ist

also möglich, durch passende Wahl der Querschnittsflächen der einzelnen Stangen zu erreichen, dass die Widerstandsfähigkeit des in der ganzen Stangen-Verbindung enthaltenen Materials vollkommen ausgenutzt wird.

Um die Spannungen der einzelnen Stangen zu finden, hat man zunächst die äusseren Kräfte zu bestimmen, welche auf die ganze Stangen-Verbindung einwirken. Diese äusseren Kräfte bestehen erstens: in den Gewichten, welche die einzelnen Belastungspunkte zu tragen haben; zweitens: in den Gegendrücken der beiden festen Stützpunkte. Um diese äusseren Kräfte zu bestimmen, kann man sich die ganze gleichförmig über die Spannweite AB vertheilte Belastung, welche von der Stangen-Verbindung getragen werden soll, dargestellt denken durch einen horizontalen Balken ab (Fig. 564), welcher auf solche Art in einzelne Stücke zer-

Fig. 564.

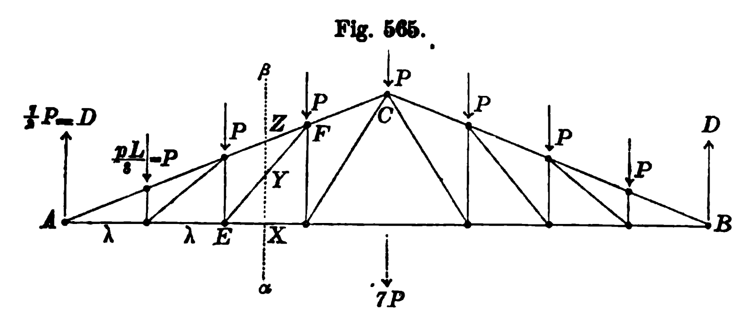


schnitten ist, dass jede Schnittstelle vertical über einem der Belastungspunkte sich befindet, d. h. über einem derjenigen Gelenkpunkte, welche zur Aufnahme der Belastungen bestimmt sind. Jede dieser Schnittstellen hat man sich durch eine Verticalstange unterstützt zu denken, welche den Druck der auf ihrem oberen Endpunkte ruhenden Last auf den betreffenden Belastungspunkt überträgt (vergl. § 61).

Man findet auf diese Weise, dass z. B. bei der in Fig. 564 dargestellten Anordnung jeder von den sieben Belastungspunkten das Gewicht $P = \frac{pL}{8}$ zu tragen hat, während an jedem der beiden Endpunkte A und B das Gewicht $\frac{pL}{16}$ unmittelbar von dem betreffenden Auflagerpunkte getragen wird. Die Gegendrücke, welche von den beiden Auflagerpunkten auf die Stangen-Verbin-

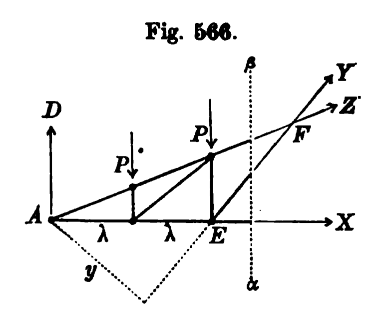
dung übertragen werden, sind auf dieselbe Weise zu bestimmen, wie bei einem einfachen Tragbalken, welcher mit dem Gewichte $7P$ belastet ist, und sind wegen symmetrischer Vertheilung derselben ein jeder gleich der Hälfte dieses Gewichtes (Fig. 565).

Fig. 565.



Die Spannung einer beliebig auszuwählenden Stange, z. B. die Spannung Y der Stange EF, lässt sich nunmehr auf folgende Weise bestimmen. Man denkt sich durch eine Schnittfläche $\alpha\beta$ die ganze Construction in zwei Theile zerlegt und an den Schnittstellen die Kräfte X, Y, Z angebracht, welche das Gleichgewicht wieder herstellen (Fig. 566). Diese Kräfte X, Y, Z fallen nach der oben gegebenen Erklärung mit den Längenrichtungen der drei durchschnittenen Stangen zusammen und bilden die Spannungen derselben. Das links von der Schnittfläche liegende Stück $A\alpha\beta$ (Fig. 566) wird im Gleichgewichte gehalten von den drei bekannten Kräften D, P, P und den drei noch unbekannten Kräften X, Y, Z. Es muss also die algebraische Summe der statischen Momente dieser sechs Kräfte in Bezug auf einen beliebig zu wählenden Drehpunkt der Kräfte-Ebene gleich Null sein.

Fig. 566.



Um die unbekannte Kraft Y zu bestimmen, stellt man die Gleichung der statischen Momente auf und wählt als Drehpunkt denjenigen Punkt, in welchem die Richtungslinien der beiden anderen unbekannten Kräfte X, Z einander schneiden, also den Punkt A. Man erhält dann eine Gleichung:

$$750)\quad 0 = P \,.\, \lambda + P \,.\, 2\lambda - Y \,.\, y,$$

aus welcher die Kraft Y als einzige darin vorkommende unbekannte Grösse sofort berechnet werden kann, sobald die Länge des Hebelarms y durch directe Messung vorher bestimmt wurde. Für die gesuchte Spannung Y ergiebt sich hieraus der Werth:

$$Y = \frac{3\lambda}{y} \cdot P.$$

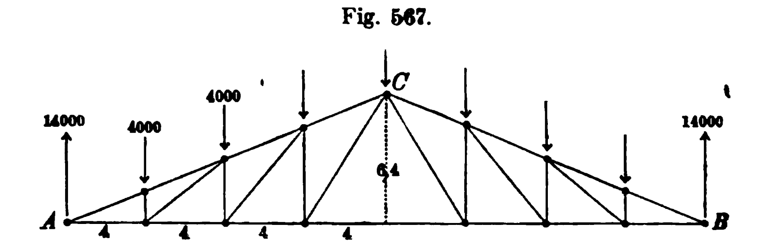
Das gleiche Verfahren ist bei der Bestimmung der Spannung jeder von den übrigen Stangen anzuwenden. Bei der Bestimmung der Spannung X würde man den Durchschnittspunkt F, in welchem die Richtungslinien der beiden Kräfte Y, Z zusammentreffen, als Drehpunkt zu wählen haben, und bei der Bestimmung der Spannung Z den Durchschnittspunkt E der Richtungen X, Y. Die Schnittfläche $\alpha\beta$ ist wo möglich stets so zu legen, dass dieselbe höchstens drei Stangen trifft, darunter die Stange, deren Spannung bestimmt werden soll. Es würde also z. B. für die Bestimmung der Spannung einer von den verticalen Stangen die Schnittfläche schräg zu legen sein. Wenn nur zwei Stangen durch die Schnittfläche getroffen werden, so kann irgend ein beliebiger in der Richtung der mitdurchschnittenen Stange liegender Punkt als Drehpunkt gewählt werden.

§ 146.

Berechnung dreieckförmiger Dach-Constructionen.

Wenn die Spannweite des Daches 32 Meter beträgt und die Vertical-Ebenen der einzelnen Binder je 5 Meter von einander entfernt liegen, so hat derjenige Theil des Daches, welcher von einem einzelnen Binder getragen wird, im Grundriss gesehen die Form eines Rechtecks von 32 Metern Länge und 5 Metern Breite, also von 5 . 32 = 160 Quadratmetern Flächeninhalt. Wenn ferner als Totalbelastung des Daches (incl. Wind- und Schneedruck) 200 Kil. für jeden Quadratmeter der Grundrissfläche gerechnet

Fig. 567.

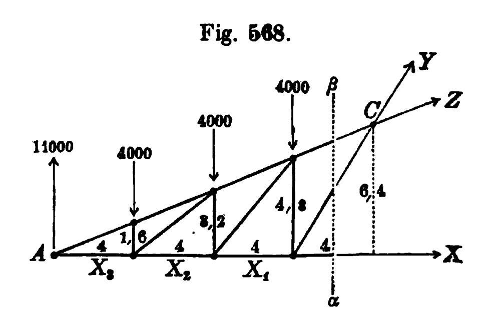


werden, so beträgt die ganze Belastung des in Fig. 567 dargestellten einzelnen Binders 200 . 160 = 32 000 Kil. Nach der in

Bezug auf Fig. 564 gegebenen Erklärung hat also die Belastung jedes Belastungspunktes die Grösse $P = \frac{32\,000}{8} = 4000$ Kil., und der von jedem der beiden Auflagerpunkte A, B auf die Stangen-Verbindung übertragene Gegendruck hat die Grösse $D = \frac{7 \,.\, 4000}{2} = 14\,000$ Kil.

Um die Spannung X der horizontalen Stange des Mittelfeldes zu bestimmen, zerlegt man durch den Vertical-Schnitt $\alpha\beta$ die ganze Construction in zwei Theile und stellt für den einen derselben, z. B. für den in Fig. 568 dargestellten Theil, die Gleichung der statischen Momente auf, indem man den Durchschnittspunkt der Richtungslinien von den beiden mitdurchschnittenen Stangen, also den Punkt C als Drehpunkt wählt. Man erhält dann die Gleichung:

Fig. 568.

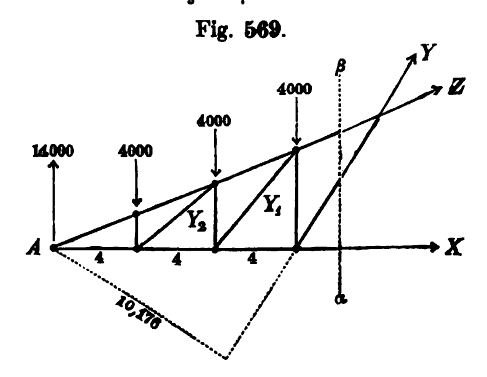


$$0 = -X \,.\, 6{,}4 + 14\,000 \,.\, 16 - 4000\,(12 + 8 + 4), \quad \text{oder:}$$
$$X = +\,20\,000 \text{ Kil.}$$

Auf gleiche Weise ergeben sich für die Spannungen der anderen horizontalen Stangen die Gleichungen:

$$0 = -X_1 \,.\, 4{,}8 + 14\,000 \,.\, 12 - 4000\,(8 + 4)$$
$$X_1 = +\,25\,000 \text{ Kil.}$$
$$0 = -X_2 \,.\, 3{,}2 + 14\,000 \,.\, 8 - 4000 \,.\, 4$$
$$X_2 = +\,30\,000 \text{ Kil.}$$
$$0 = -X_3 \,.\, 1{,}6 + 14\,000 \,.\, 4$$
$$X_3 = +\,35\,000 \text{ Kil.}$$

Fig. 569.



Zur Bestimmung der Spannung Y hat man den Durchschnittspunkt der beiden Kraftrichtungen X, Z, also den Punkt A als Drehpunkt zu wählen (Fig. 569). Für den Hebelarm der Kraft Y in Bezug auf diesen Punkt findet man (entweder durch directe Messung in der

Zeichnung, oder auch durch Berechnung desselben aus der Aehnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke) die Grösse $10^m,176$ (oder $\frac{12 \cdot 6{,}4}{\sqrt{4^2 + 6{,}4^2}}$). Man erhält also die Gleichung:

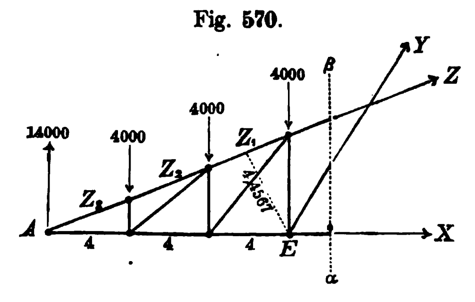
$$0 = - Y \cdot 10{,}176 + 4000\,(4 + 8 + 12), \text{ oder:}$$
$$Y = + 9434 \text{ Kil.}$$

Auf gleiche Weise ergeben sich für die Spannungen Y_1, Y_2 resp. die Gleichungen:

$$0 = - Y_1 \cdot 6{,}146 + 4000\,(4 + 8)$$
$$Y_1 = + 7810 \text{ Kil.}$$
$$0 = - Y_2 \cdot 2{,}499 + 4000 \cdot 4$$
$$Y_2 = + 6403 \text{ Kil.}$$

Für die Spannung Z erhält man aus Fig. 570, indem man die algebraische Summe der statischen Momente in Bezug auf den Punkt E als Drehpunkt gleich Null setzt, die Gleichung:

Fig. 570.



$$0 = Z \cdot 4{,}4567 + 14\,000 \cdot 12 - 4000\,(8 + 4), \text{ oder:}$$
$$Z = - 26\,925 \text{ Kil.}$$

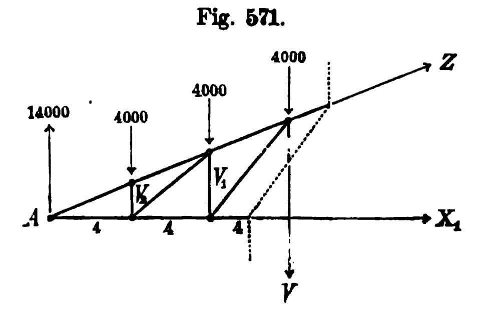
Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Spannung Z eine **Druck**spannung ist.

Auf gleiche Weise ergeben sich für die Spannungen Z_1, Z_2, Z_3, resp. die Gleichungen:

$$0 = Z_1 \cdot 2{,}971 + 14\,000 \cdot 8 - 4000 \cdot 4$$
$$Z_1 = - 32\,310 \text{ Kil.}$$
$$0 = - Z_2 \cdot 1{,}4855 + 14\,000 \cdot 4$$
$$Z_2 = - 37\,695 \text{ Kil.}$$
$$0 = - Z_3 \cdot 1{,}4855 + 14\,000 \cdot 4$$
$$Z_3 = - 37\,695 \text{ Kil.}$$

Um die Spannung V zu bestimmen, hat man sich die Schnittfläche auf die in Fig. 571 angegebene Weise gelegt zu denken und den Durchschnittspunkt der beiden Kraftrichtungen X_1, Z, also den Punkt A als Drehpunkt zu wählen; man erhält dann die Gleichung:

Fig. 571.



$$0 = V \,.\, 12 + 4000\,(4 + 8 + 12), \quad \text{oder:}$$
$$V = -\,8000 \text{ Kil.}$$

Auf gleiche Weise erhält man für die Spannungen der beiden anderen verticalen Stangen die Gleichungen:

$$0 = V_1 \,.\, 8 + 4000\,(4 + 8), \qquad V_1 = -\,6000 \text{ Kil.}$$
$$0 = V_2 \,.\, 4 + 4000 \,.\, 4, \qquad V_2 = -\,4000 \text{ Kil.}$$

Wenn mit S die zulässige Spannung (in Kilogrammen pro Quadratmillimeter) bezeichnet wird für das Material, aus welchem die Stangen bestehen, so findet man für irgend eine Stange, deren Spannung eine positive (oder Zug-) Spannung ist, die erforderliche Querschnittsfläche in Quadratmillimetern ausgedrückt: indem man die gefundene Spannungszahl derselben durch die Zahl S dividirt. Wenn die Stangen — wie vorausgesetzt werden soll — aus Schmiedeisen bestehen, so ist $S = 6$ Kil. zu setzen. Man erhält also die Querschnittsflächen sämmtlicher gezogenen Stangen, indem man die Spannungszahlen derselben durch die Zahl 6 dividirt.

So z. B. erhält man für die erforderliche Querschnittsfläche der horizontalen Stange des Mittelfeldes die Grösse:

$$F = \frac{X}{S} = \frac{20\,000}{6} = 3333 \text{ Quadratmillimeter.}$$

Um die erforderliche Querschnittsfläche irgend einer Stange zu finden, deren Spannung eine negative (oder Druckspannung) ist, hat man den absoluten Werth der für dieselbe gefundenen Spannungszahl zu dividiren durch den Quotienten $\frac{S}{n}$, dessen Nenner n den Coefficienten des Widerstandes gegen Zerknicken bedeutet (§ 142). Dieser Coefficient hängt ab von der Form des gewählten Querschnittes. Um Material zu sparen, hat man die Querschnittsformen der gedrückten Stangen womöglich so zu wählen, dass der Coefficient n nur wenig grösser als Eins wird.

Um z. B. zu erreichen, dass für diejenige Stange, deren Spannung mit Z ($= -\,26\,925$ Kil.) bezeichnet wurde, und deren Länge 4308 Millimeter beträgt, der Coefficient n den Werth 1,5 annimmt, und die pro Quadratmillimeter zulässige Druckspannung den Werth $\frac{S}{n} = \frac{6}{1,5} = 4$ Kil., könnte man der Stange die Form einer quadratischen Röhre geben, und erhielte für die Grössen B, b resp. als äussere und innere Weite dieser Röhre zunächst die Gleichung:

$$751) \quad B^2 - b^2 = \frac{26\,925}{4} = 6731 \text{ Quadratmillimeter.}$$

Wenn man ferner in Gleichung 716) die Werthe: $n = 1{,}5$, $L = 4308$, $H = B$, $h = b$ substituirt, so erhält man die zweite Gleichung:

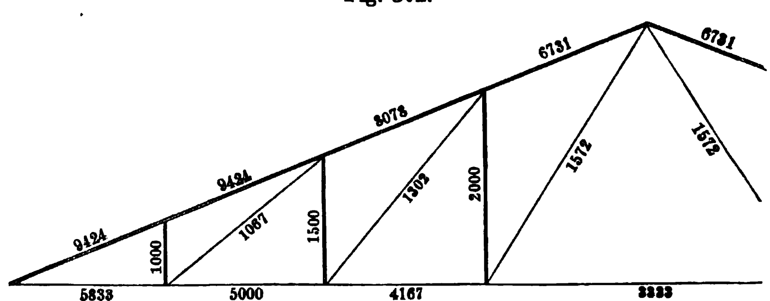
$$752) \quad B^2 + b^2 = 41\,760.$$

Aus der Auflösung dieser beiden Gleichungen ergeben sich die Werthe $B = 155{,}7$ Millimeter und $b = 132{,}3$ Millimeter.

Auf ähnliche Weise würde man auch z. B. bei der Wahl der in Fig. 500 dargestellten Querschnittsform die Dimensionen des Querschnittes so bestimmen können, dass der Coefficient n den Werth 1,5 annimmt.

Wenn für sämmtliche gedrückte Stangen solche Querschnittsformen gewählt werden, für welche der Coefficient n den Werth 1,5 annimmt, so erhält man die Querschnittsgrössen derselben, indem man die Spannungszahlen dividirt durch die Zahl $\frac{6}{1{,}5} = 4$. Die Zahlenwerthe, welche unter dieser Voraussetzung für die erforderlichen Querschnittsflächen der einzelnen Stangen sich ergeben, sind in Fig. 572 eingetragen, in welcher die ge-

Fig. 572.

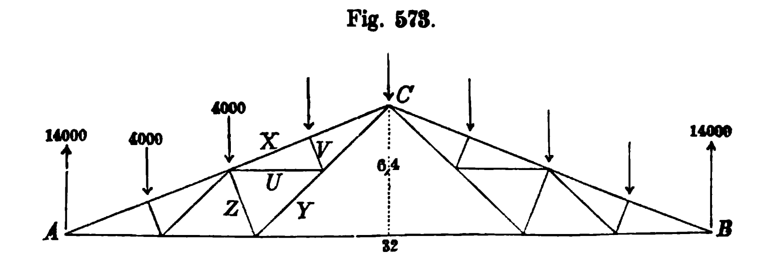


drückten Stangen (zum Unterschiede von den gezogenen) durch Doppellinien dargestellt sind.

Mittelst des an dem vorigen Beispiele erklärten Verfahrens lässt sich jede Spannungszahl direct durch eine einzige Gleichung bestimmen bei allen solchen Stangenverbindungen, in denen jede einzelne Stange erreicht werden kann durch einen Schnitt, welcher höchstens drei Stangen trifft. Bei manchen Constructionen dagegen, wie z. B. bei der in Fig. 573 dargestellten Dach-Construction — für welche, abgesehen von den durch die veränderte Form bedingten Abweichungen, dieselben Dimensionen und Belastungen wie in Fig. 567 angenommen sind — kann der Fall vorkommen, dass einzelne Stangen, wie z. B. die in der Figur mit U, V, X, Y, Z bezeichneten Stangen, sich nur erreichen lassen durch Schnitte, welche mehr als drei Stangen treffen.

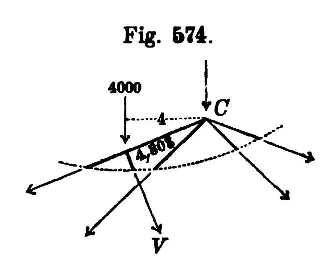
Auch in solchen Fällen führt die vorige Methode direct zum Ziele, sobald es möglich ist, die Stange durch einen Schnitt —

Fig. 573.



welcher nach Willkür geradlinig oder krummlinig geführt werden kann — auf solche Weise zu erreichen: dass die Richtungslinien sämmtlicher mitdurchschnittenen Stangen in einem Punkte zusammentreffen. So z. B. findet man die Spannung V, indem man für den in Fig. 574 dargestellten Theil der Construction die Gleichung der statischen Momente aufstellt, und dabei den Punkt C, in welchem die Richtungslinien der vier mitdurchschnittenen Stangen zusammentreffen, als Drehpunkt wählt, aus der Gleichung:

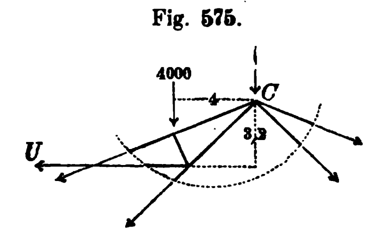
Fig. 574.



$$0 = -V \,.\, 4{,}308 - 4000 \,.\, 4, \quad \text{oder:} \quad V = -3714 \text{ Kil.}$$

Auf dieselbe Art lässt sich auch die Spannung U bestimmen, indem man für den Theil Fig. 575 die Gleichung der statischen Momente aufstellt in Bezug auf den Punkt C als Drehpunkt, nämlich aus der Gleichung:

Fig. 575.



$$0 = U \,.\, 3{,}2 - 4000 \,.\, 4, \text{ oder:}$$

$$U = +5000 \text{ Kil.}$$

Nachdem die Spannung U gefunden ist, kann man nunmehr die Spannung X aus Fig. 576 bestimmen, indem man den Punkt E als Drehpunkt wählt und für U den gefundenen Werth substituirt, aus der Gleichung:

$$0 = X \,.\, 3{,}4465 + 14\,000 \,.\, 9{,}28 - 4000\,(5{,}28 + 1{,}28) + 5000 \,.\, 3{,}2,$$

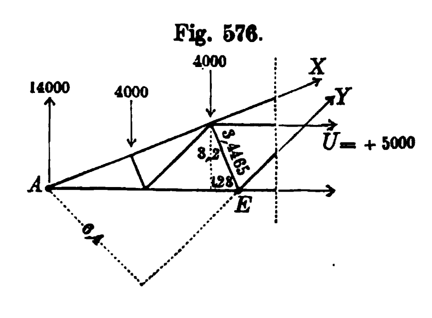
oder: $X = -34\,725$ Kil.

Ebenso die Spannung Y, indem man den Punkt A als Drehpunkt wählt, aus der Gleichung:

$$0 = - Y \,.\, 6{,}4 + 4000\,(4 + 8) + 5000 \,.\, 3{,}2,$$

oder: $Y = + 10\,000$ Kil.

Fig. 576.

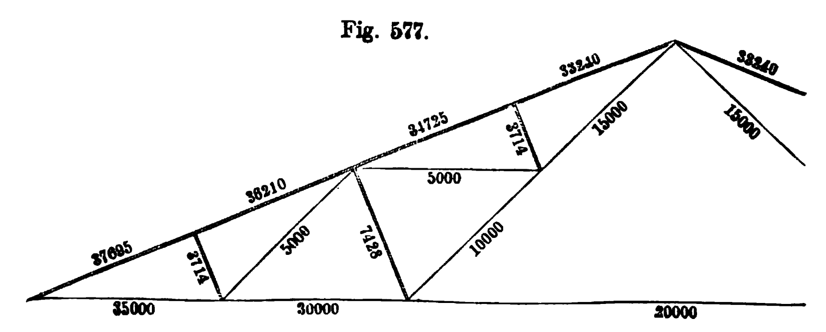


Zur Bestimmung der in Fig. 573 mit Z bezeichneten Spannung würde man den Schnitt in schräger Richtung links an dem Punkte E vorbeizuführen haben und in Bezug auf den Punkt A als Drehpunkt die Gleichung erhalten:

$$0 = Z \,.\, 8{,}616 + 4000\,(4 + 8) + 5000 \,.\, 3{,}2, \quad \text{oder:}$$
$$Z = - 7428 \text{ Kil.}$$

Von den übrigen neun Stangen (der einen Hälfte) kann eine jede erreicht werden durch einen Schnitt, welcher nicht mehr als drei Stangen trifft. Die Spannungen derselben können daher auf gleiche Weise wie bei dem vorigen Beispiele berechnet werden. Als Resultate dieser Berechnung ergeben sich die in Fig. 577 ein-

Fig. 577.



getragenen Spannungszahlen, aus denen dann die Querschnittszahlen genau auf dieselbe Art, wie in Bezug auf Fig. 572 erklärt wurde, abgeleitet werden können.

§ 147.

Permanente und mobile Belastungen.

(Parabolischer Träger.)

Die Stangen-Verbindungen von dreieckiger Grundform, zu welchen die im vorigen Paragraphen berechneten Dach-Construc-

tionen gehören, unterscheiden sich von anderen Constructions-Formen durch folgende Eigenschaft: denkt man sich an irgend einem der Belastungspunkte die Belastung vermindert oder ganz hinweggenommen, so findet man, dass durch diese Verminderung der Belastung in keiner Stange eine Verstärkung der in ihr vorhandenen (Zug- oder Druck-) Spannung herbeigeführt wird. Es konnten deshalb diejenigen Spannungszahlen, nach welchen die erforderlichen Querschnittsflächen der Stangen zu bestimmen waren, unmittelbar berechnet werden aus der Annahme: dass sämmtliche Belastungspunkte mit ihren vollen Belastungen versehen waren.

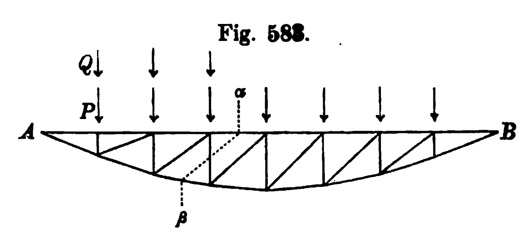
Bei anderen Constructions-Formen dagegen, welche von der dreieckigen Grundform abweichen, zeigt es sich, dass einzelne Stangen bei partieller Belastung des ganzen Systems stärkere Spannungen annehmen als bei voller Belastung. Im Allgemeinen hat man deshalb bei der Berechnung der Spannungszahlen immer einen Unterschied zu machen zwischen den permanenten und den mobilen (veränderlichen, zufälligen) Belastungen der einzelnen Belastungspunkte. Zu den ersteren gehören die von dem Eigengewichte der Construction herrührenden Belastungen; zu den letzteren würden z. B. bei Eisenbahnbrücken die Belastungen, welche von dem Gewichte eines Eisenbahnzuges, der die Länge der Brücke ganz oder theilweise bedeckt (bei Dach-Constructionen die Belastungen, welche durch Wind- und Schnee-Druck hervorgebracht werden), zu rechnen sein.

Zu diesem Zwecke kann man sich die totale (Maximal-) Belastung des ganzen Systems — anstatt wie in Fig. 564 durch einen — nunmehr durch zwei horizontale Balken veranschaulichen, deren jeder über den Belastungspunkten durchschnitten und an den Schnittstellen durch Verticalständer unterstützt ist, welche die von oben her auf dieselben wirkenden Druckkräfte auf die Belastungspunkte übertragen. Durch den einen kann man sich die permanente, durch den andern die mobile Belastung veranschaulichen. Man findet auf diese Weise die beiden Theile P und Q, in welche die Maximal-Belastung eines jeden Belastungspunktes zu zerlegen ist, von denen der eine Theil P der permanenten, der andere Theil Q der mobilen Belastung entspricht (Fig. 578).

Um alsdann für irgend eine Stange diejenige Spannungszahl zu finden, nach welcher die erforderliche Querschnittsfläche derselben zu bestimmen ist, hat man die ganze Untersuchung in fol-

welche diesen Belastungszuständen entsprechen, kann man nunmehr auf gleiche Weise wie bei den im vorigen Paragraphen berechneten Beispielen mittelst der Methode der statischen Momente bestimmen; oder auch direct aus den Gleichungen 753) und 754), indem man aus der ersteren

Fig. 583.



die Spannung berechnet, welche die rechts von der Schnittstelle befindlichen Gewichte zusammengenommen hervorbringen, aus der letzteren die Spannung, welche die links von der Schnittstelle befindlichen Gewichte zusammengenommen hervorbringen, und indem man die beiden so gefundenen Werthe alsdann zusammenaddirt.

Für einen in acht Felder eingetheilten parabolischen Träger von 2 Metern Pfeilhöhe und 16 Metern Spannweite würde z. B. $\lambda = 2^m$ und $x = 4^m$ sich ergeben. Wenn ferner für jeden Belastungspunkt die permanente Belastung $P = 1000$ Kil. und die mobile Belastung $Q = 5000$ Kil. gesetzt wird, so findet man den Werth von $V_{(max)}$ nach Fig. 582 auf folgende Weise. Die vier rechts von der Schnittstelle befindlichen Belastungen haben eine jede die Grösse $P + Q = 1000 + 5000 = 6000$ Kil. Diese vier Belastungen erzeugen an dem Auflagerpunkte A den Gegendruck $D = 6000\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\right) = 7500$ Kil., bringen folglich (nach Gleichung 753) in der Vertical-Stange die Spannung hervor:

$$V = +7500\left(\frac{4}{4+6}\right) = +3000 \text{ Kil.}$$

Die drei links von der Schnittstelle befindlichen Belastungen von je 1000 Kil. erzeugen an dem Auflagerpunkte B den Gegendruck $W = 1000\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8}\right) = 750$ Kil., bringen also (nach Gleichung 754) in der Vertical-Stange die Spannung hervor:

$$V = -750\left(\frac{4+16}{4+6}\right) = -1500 \text{ Kil.}$$

Durch Addition dieser beiden Zahlen erhält man für die grösste Zug-Spannung der Vertical-Stange den Werth:

$$755)\quad V_{(max)} = +3000 - 1500 = +1500 \text{ Kil.}$$

Auf analoge Weise ist $V_{(min)}$ nach Fig. 583 zu bestimmen. Den vier rechts von der Schnittstelle befindlichen Belastungen von je 1000 Kil. entspricht der Werth $D = 1000\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\right) = 1250$ Kil. und (nach Gleichung 753) die Spannung:

$$V = +1250\left(\frac{4}{4+6}\right) = +500 \text{ Kil.}$$

Den drei **links** von der Schnittstelle befindlichen Belastungen von je 6000 Kil. entspricht der Werth $W = 6000\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}\right) = 4500$ Kil., folglich (nach Gleichung 754) die Spannung:

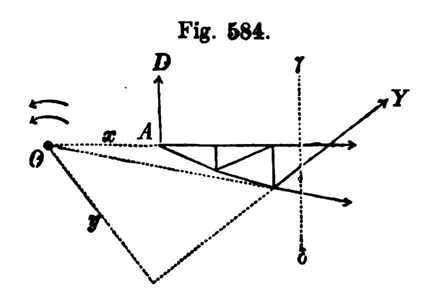
$$V = -4500\left(\frac{4+16}{4+6}\right) = -9000 \text{ Kil.}$$

Durch Addition dieser beiden Werthe erhält man als grösste Druck-Spannung der Vertical-Stange:

$$756)\quad V_{(min)} = +500 - 9000 = -8500 \text{ Kil.}$$

Wenn man dieselbe Methode auf die angrenzende Diagonal-Stange anwendet, so findet man nach Fig. 584, in welcher die Drehungsrichtungen der beiden Kräfte Y und D in Bezug auf den Drehpunkt O übereinstimmen, dass alle rechts von der Schnittfläche $\gamma\,\delta$ befindlichen Belastungen eine negative Spannung hervorbringen, deren Grösse alsdann bestimmt werden kann aus der Gleichung:

Fig. 584.

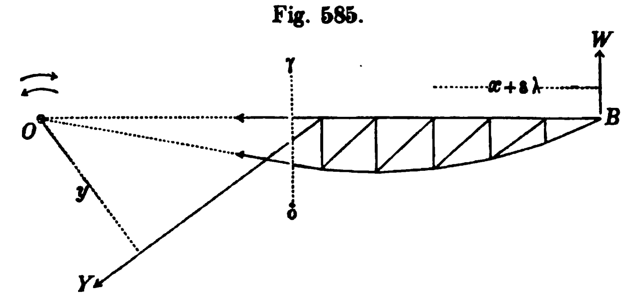


$$757)\quad Y = -D\left(\frac{x}{y}\right),$$

und nach Fig. 585, in welcher die Drehungsrichtungen der beiden Kräfte Y und W einander entgegengesetzt sind, findet man, dass alle links von der Schnittstelle befindlichen Belastungen eine positive Spannung hervorbringen, deren Grösse zu bestimmen ist aus der Gleichung:

$$758)\quad Y = +W\left(\frac{x+8\lambda}{y}\right).$$

Fig. 585.



Für den Hebelarm der Kraft Y würde man bei den oben angenommenen Dimensionen die Grösse $y = 6^m$ finden. Um $Y_{(max)}$ zu bestimmen, würde man alle rechts von der Schnittstelle befindlichen Belastungspunkte mit je 1000 Kil. belastet anzunehmen haben, und alle links liegenden Belastungspunkte mit je 6000 Kil. Erstere Belastungen

erzeugen den Gegendruck $D = 1000\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}+\frac{5}{8}\right) = 1875$ Kil.
und (nach Gleichung 757) die Spannung $Y = -1875 \cdot \frac{4}{6} = -1250$ Kil.;
letztere erzeugen den Gegendruck $W = 6000\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}\right) = 2250$ Kil. und
(nach Gleichung 758) die Spannung: $Y = +2250 \cdot \frac{20}{6} = +7500$ Kil.;
folglich ist:

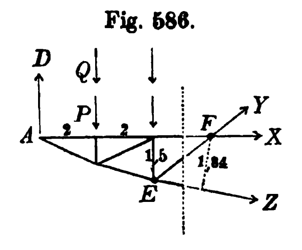
$$Y_{(max)} = -1250 + 7500 = +6250 \text{ Kil.}$$

Um $Y_{(min)}$ zu bestimmen, hat man die rechts liegenden Belastungspunkte mit je 6000 Kil., die links liegenden mit je 1000 Kil. belastet anzunehmen. Die ersteren Belastungen erzeugen den Gegendruck $D = 11\,250$ Kil. und die Spannung $Y = -7500$ Kil.; die letzteren erzeugen den Gegendruck $W = 375$ Kil. und die Spannung $Y = +1250$ Kil.; folglich ist:

$$Y_{(min)} = -7500 + 1250 = -6250 \text{ Kil.}$$

(Aus der Gleichheit der beiden absoluten Werthe von $Y_{(max)}$ und $Y_{(min)}$ folgt, dass bei voller Belastung $Y = 0$ wird, dass also bei einem parabolischen Träger die Diagonal-Stangen nur dann in gespannten Zustand versetzt werden, wenn die Belastung ungleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilt ist — ein Satz, dessen Richtigkeit auch aus der in § 63 gefundenen Theorie der parabolischen Träger sich leicht nachweisen lässt.)

Fig. 586.



Um die Spannungszahlen X und Z zu berechnen (Fig. 586), hat man sämmtliche Belastungspunkte belastet anzunehmen, denn jede Belastung — sowohl links als rechts von der Schnittstelle — bringt für X einen negativen und für Z einen positiven Werth hervor. Für diesen Belastungszustand wird $D = \frac{7 \,.\, 6000}{2} = 21\,000$ Kil., und man erhält nach Fig. 586, indem man die Gleichungen der statischen Momente aufstellt — das eine Mal in Bezug auf den Drehpunkt E, das andere Mal in Bezug auf den Drehpunkt F — die Gleichungen:

$$0 = X \,.\, 1{,}5 + 21\,000 \,.\, 4 - 6000 \,.\, 2, \quad \text{oder: } X = -48\,000 \text{ Kil.}$$
$$0 = -Z \,.\, 1{,}84 + 21\,000 \,.\, 6 - 6000(4+2), \quad \text{oder: } Z = +48\,900 \text{ Kil.}$$

Die auf solche Weise berechneten Spannungszahlen sämmtlicher Stangen sind am Schlusse dieses Capitels in Fig. 607 zusammengestellt.

§ 148.

Träger von constanter Höhe.

Um nach der im vorigen Paragraphen erklärten Methode den Einfluss zu bestimmen, welchen ein einzelnes rechts von der

Schnittfläche $\alpha\beta$ (Fig. 587) angebrachtes Gewicht Q auf die Spannung des vierten Vertical-Ständers ausübt, würde man für den Theil Fig. 588 die Gleichung der statischen Momente aufzustellen und den Durchschnittspunkt der beiden Kraftrichtungen X und Z als Drehpunkt zu wählen haben.

Fig. 587.

Da diese beiden Richtungen **parallel** sind, ihr Durchschnittspunkt folglich in unendlicher Entfernung von der Schnittstelle liegt, so ist der Hebelarm jeder von den beiden Kräften V und D unendlich gross; man erhält also die Gleichung:

$$0 = + V . \infty + D . \infty,$$

welche nach Fortlassung des gemeinschaftlichen Factors ∞ für V aufgelöst die Form annimmt:

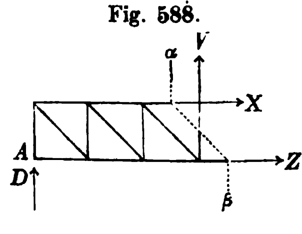


Fig. 588.

$$759) \quad V = - D.$$

Auf analoge Weise erhält man für die Spannung, welche irgend eine **links** von der Schnittstelle angebrachte Belastung in diesem Vertical-Ständer hervorbringt, aus Fig. 589 die Gleichung:

$$760) \quad V = + W.$$

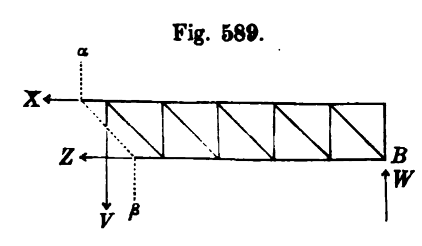


Fig. 589.

Aus den Formen dieser beiden Gleichungen erkennt man, dass jede **rechts** von der Schnittstelle befindliche Belastung eine **negative**, jede **links** von der Schnittstelle befindliche Belastung eine **positive** Spannung in dieser Stange hervorbringt, und die Werthe von $V_{(max)}$ und $V_{(min)}$ können mit Hülfe der obigen beiden Gleichungen nunmehr auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen berechnet werden.

Wenn man wiederum für jeden Belastungspunkt die permanente Belastung $P = 1000$ Kil. und die mobile Belastung $Q = 5000$ Kil. setzt, so hat man bei der Bestimmung von $V_{(max)}$ die fünf **rechts** von der Schnittstelle befindlichen Belastungspunkte mit je 1000 Kil. und die zwei **links** von der Schnittstelle

befindlichen Belastungspunkte mit je 6000 Kil. belastet anzunehmen. Die fünf ersteren erzeugen den Gegendruck $D = 1875$ Kil. und die Spannung $V = -1875$ Kil. Die zwei letzteren erzeugen den Gegendruck $W = 2250$ Kil. und die Spannung $V = +2250$ Kil. Es ist also:

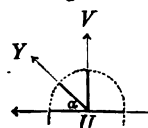
$$V_{(max)} = -1875 + 2250 = +375 \text{ Kil.}$$

Zur Bestimmung von $V_{(min)}$ hat man die fünf rechts von der Schnittstelle befindlichen Belastungspunkte mit je 6000 Kil. und die zwei links von der Schnittstelle befindlichen Belastungspunkte mit je 1000 Kil. belastet anzunehmen. Die fünf ersteren erzeugen den Gegendruck $D = 11\,250$ Kil. und die Spannung $V = -11\,250$ Kil.; die zwei letzteren den Gegendruck $W = +375$ Kil. und die Spannung $V = +375$ Kil., folglich ist:

$$V_{(min)} = -11\,250 + 375 = -10\,875.$$

Wenn die oberen Endpunkte der Vertical-Ständer die Belastungspunkte bilden — wie hier vorausgesetzt wurde — so sind die einzigen Vertical-Kräfte, welche auf den unteren Endpunkt U des vierten Vertical-Ständers wirken: erstens die Kraft V, zweitens die verticale Seitenkraft der Spannung Y, nämlich die Kraft $Y \sin\alpha$ (Fig. 590). Es ist also für jeden Belastungszustand die Spannung der Diagonalstange des dritten Feldes zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 590.



$$761) \quad 0 = Y \sin\alpha + V, \quad \text{oder:} \quad Y = -\frac{V}{\sin\alpha}.$$

Im vorliegenden Falle ist $\alpha = 45^0$, mithin $\frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{2}$; folglich ist:

$$Y_{(max)} = +10\,875 \,.\, \sqrt{2} = 15\,400 \text{ Kil.}$$
$$Y_{(min)} = -375 \,.\, \sqrt{2} = -530 \text{ Kil.}$$

Da die Kräfte X und Z die einzigen Horizontal-Kräfte sind, welche auf den Theil Fig. 588 wirken, so ist für jeden Belastungszustand:

$$762) \quad 0 = X + Z, \quad \text{oder:} \quad X = -Z.$$

Wie bei dem im vorigen Paragraphen berechneten Beispiele findet man, dass die Spannungen X und Z bei voller Belastung des Trägers am grössten werden, und zu bestimmen sind aus den Gleichungen:

$$0 = X \,.\, 2 + 21\,000 \,.\, 6 - 6000\,(4 + 2), \quad \text{oder:}$$
$$X = -45\,000 \text{ Kil.}$$
$$0 = -Z \,.\, 2 + 21\,000 \,.\, 6 - 6000\,(4 + 2), \quad \text{oder:}$$
$$Z = +45\,000 \text{ Kil.}$$

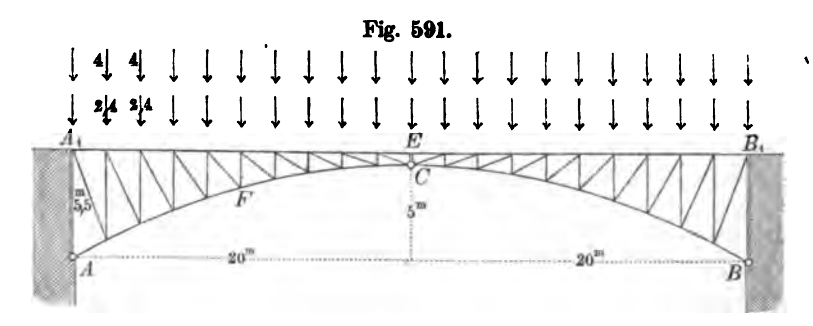
Die auf solche Weise berechneten Spannungszahlen sämmtlicher Stangen sind am Schlusse dieses Capitels in Fig. 608 zusammengestellt.

§ 149.

Bogen-Brücken.

Die Totalbelastung der in Fig. 591 dargestellten Construction beträgt im Maximum 128 Tonnen, wovon 48 Tonnen als perma-

Fig. 591.



nente Belastung zu rechnen sind. Die permanente sowohl als die totale Belastung sind als gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilt angenommen. Für jeden der Belastungspunkte (als welche die oberen Endpunkte der Vertical-Ständer anzusehen sind) beträgt also die permanente Belastung $\frac{48}{20} = 2{,}4$ Tonnen, und die mobile Belastung $\frac{80}{20} = 4$ Tonnen.

Die unteren Endpunkte der Vertical-Ständer liegen in einer Parabel; folglich werden (nach § 61, Fig. 240) durch die permanente Belastung — wie überhaupt durch eine gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilte Belastung — weder in den horizontalen noch in den Diagonalstangen Spannungen hervorgebracht. Es würde also bei der Berechnung der Spannungszahlen für diese Stangen nicht nöthig sein, die permanenten Belastungen mit in Rechnung zu bringen. Da indessen eine solche Berechnungsmethode nur für den speciellen Fall einer parabolisch geformten Bogen-Brücke gültig sein würde, so soll der grösseren Allgemeinheit wegen die permanente Last hierbei ebenfalls berücksichtigt werden.

Durch die Scheitelfuge EC wird die ganze Construction in zwei symmetrisch geformte getrennte Hälften zerlegt, welche an den festen Punkten A und B unterstützt, in dem Punkte C durch einen Gelenkbolzen verbunden, an einander gegenseitig sich anlehnen. Durch diese Einrichtung wird bewirkt, dass die Gegendrücke, welche durch irgend eine Belastung an den beiden festen

Auflagerpunkten erzeugt werden, stets genau bestimmbare Grössen und Richtungen annehmen, während ohne das Vorhandensein einer solchen Unterbrechung der Continuität einerseits die Bestimmung jener Gegendrücke eine unbestimmte Aufgabe sein würde (§ 53), andererseits auch die Möglichkeit einer Zunahme dieser Drücke bis zu einer die Festigkeit der Construction gefährdenden Grösse nicht ausgeschlossen sein würde.

Spannungen in den Horizontal-Stangen.

Um diejenigen Belastungszustände zu finden, bei welchen die Spannung X der fünften Horizontal-Stange resp. ein Maximum und Minimum wird, hat man zunächst diejenige Stelle aufzusuchen, an welcher eine Belastung angebracht werden müsste, wenn dieselbe g a r k e i n e Spannung (oder die Spannung Null) in dieser Stange hervorbringen soll. Man findet diese Stelle, indem man durch den Punkt G, in welchem die Richtungslinien AF und BC zusammentreffen, eine Verticale legt, welche bei den hier gewählten Dimen-

Fig. 592.

sionen mit dem 9-ten Vertical-Ständer zusammenfällt (Fig. 592). Durch eine an diesem Vertical-Ständer angebrachte Belastung Q wird in dem Gelenkpunkte C ein Druck D erzeugt, welcher auf die linke Hälfte in der Richtung von B nach C wirkt (§ 57, Fig. 216). Die Richtungslinie der Mittelkraft R von den beiden Kräften Q und D fällt mit der Richtung GA zusammen, geht folglich durch den Punkt F hindurch. Wenn man alsdann zur Bestimmung der Spannung X die Gleichung der statischen Momente aufstellt für das Stück $CE\alpha\beta$ (Fig. 593) und den Punkt F als Drehpunkt wählt, so erhält man — da X von den vier auf dieses Stück wirkenden

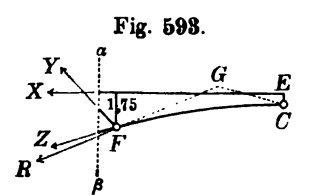


Fig. 593.

Kräften X, Y, Z, R die einzige ist, deren Richtungslinie an dem Drehpunkte vorbeigeht — die Gleichung:

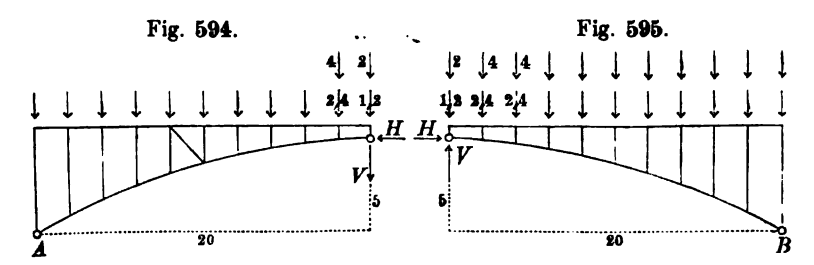
$$0 = -X \,.\, 1{,}75, \quad \text{oder:} \quad X = 0.$$

Wenn die Belastung Q an einem weiter rechts liegenden Punkte angebracht wäre und in Folge dessen die Kraft R rechts an dem Drehpunkt F vorbeiginge, so würde für X ein positiver Werth sich ergeben, weil in diesem Falle die Drehungsrichtungen der beiden Kräfte X und R in Bezug auf den Punkt F einander entgegengesetzt sein würden. Wenn dagegen die Belastung Q links von der Verticalen des Punktes G angebracht wäre, und in Folge dessen die Kraft R links an dem Drehpunkte F vorbeiginge, so würde für X ein negativer Werth sich ergeben, weil in diesem Falle die Drehungsrichtungen der beiden Kräfte X und R übereinstimmen würden. Die Verticale des Punktes G zerlegt daher die ganze Strecke A_1 B_1 in zwei Abtheilungen, von denen die rechts liegende alle diejenigen Belastungspunkte enthält, deren Belastungen positive Spannungen in jener Horizontal-Stange hervorbringen, und die links liegende alle diejenigen Belastungspunkte enthält, deren Belastungen negative Spannungen in derselben hervorbringen.

Eine Belastung der Strecke A_1 α wirkt auf den Theil Fig. 593 nur indirect durch Erzeugung eines Scheiteldruckes D, welcher in der Richtung von C nach G wirkt, also in Bezug auf den Punkt F links drehend; folglich gehört die Strecke A_1 α mit zur Druck-Abtheilung. Eine Belastung der Strecke B_1 E wirkt ebenfalls nur indirect auf den Theil Fig. 593 durch Erzeugung eines Scheiteldruckes, welcher in der Richtung von C nach A wirkt, also in Bezug auf den Punkt F rechts drehend; folglich gehört die Strecke B_1 E mit zur Zug-Abtheilung.

Um $X_{(max)}$ zu bestimmen, hat man die Belastungspunkte der Zug-Abtheilung mit je 6,4 Tonnen und die Belastungspunkte der

Fig. 594. Fig. 595.



Druck-Abtheilung mit je 2,4 Tonnen belastet anzunehmen. Die horizontale Seitenkraft H und die verticale Seitenkraft V des bei

diesem Belastungszustande entstehenden Scheiteldruckes findet man aus Fig. 594 und Fig. 595, indem man die Gleichungen der statischen Momente aufstellt und in ersterer den Punkt A, in letzterer den Punkt B als Drehpunkt wählt, aus den Gleichungen:

$$H.5 - V.20 = 2{,}4\,(2+4+\ldots+14+16) + 6{,}4\left(18+\frac{20}{2}\right)$$

$$H.5 + V.20 = 6{,}4\left(2+4+\ldots+16+18+\frac{20}{2}\right),$$

aus deren Auflösung für H und V die Werthe sich ergeben:

$$H = 99{,}2 \text{ Tonnen}, \quad V = 7{,}2 \text{ Tonnen}.$$

Wenn man diese Werthe in Fig. 596 substituirt, so erhält man als Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt F die Gleichung:

$$0 = -X.1{,}75 + 7{,}2.10 - 99{,}2.1{,}25 + 2{,}4(2+4+6) + 6{,}4\left(8+\frac{10}{2}\right),$$

oder: $X_{(max)} = +\,34{,}29$ Tonnen.

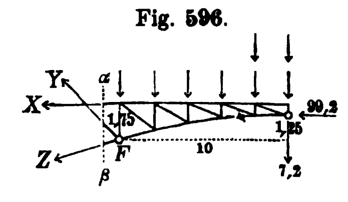


Fig. 596.

Um $X_{(min)}$ zu bestimmen, würde man die Belastungspunkte der Druck-Abtheilung mit je 6,4 Tonnen, die Belastungspunke der Zug-Abtheilung mit je 2,4 Tonnen belastet anzunehmen und übrigens auf gleiche Weise zu verfahren haben, wie bei der Bestimmung von $X_{(max)}$. Man erhält dann:

$$X_{(min)} = -\,34{,}29 \text{ Tonnen}.$$

Spannungen in den Diagonal-Stangen.

Für die zur Bestimmung von Y aufzustellende Momenten-Gleichung wird der Punkt J (als Durchschnittspunkt der beiden

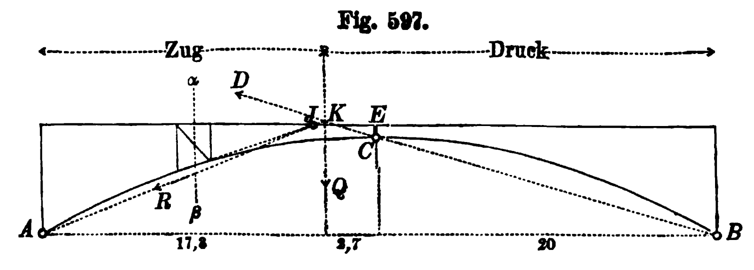


Fig. 597.

Kraftrichtungen X, Z) den Drehpunkt bilden (Fig. 597). Wenn man die Richtungen AJ und BC bis zu ihrem Durchschnitts-

punkte K verlängert und durch den Punkt K eine Verticale legt, so erhält man die Stelle, an welcher eine Belastung sich befinden muss, wenn dieselbe gar keine Spannung in der Diagonal-Stange des fünften Feldes hervorbringen soll. Die Belastungen aller links von dieser Stelle befindlichen Belastungspunkte bringen Zug-Spannung, die Belastungen aller rechts von dieser Stelle befindlichen Belastungspunkte bringen Druck-Spannung in dieser Stange hervor.

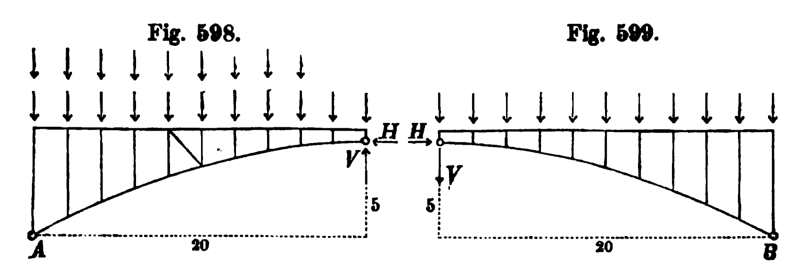


Fig. 598. Fig. 599.

Um $Y_{(max)}$ zu bestimmen, hat man die Seitenkräfte H und V des Scheiteldruckes aus Fig. 598 und Fig. 599 zu bestimmen, und erhält die Gleichungen:

$$H \,.\, 5 + V \,.\, 20 = 6{,}4\,(2 + 4 + \ldots + 14 + 16) + 2{,}4\left(18 + \frac{20}{2}\right),$$

$$H \,.\, 5 - V \,.\, 20 = 2{,}4\left(2 + 4 + \ldots + 16 + 18 + \frac{20}{2}\right),$$

$$H = 76{,}8 \text{ T.}, \quad V = 7{,}2 \text{ T.}$$

Aus Fig. 600 erhält man alsdann, indem man die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt J aufstellt, für $Y_{(max)}$ die Gleichung:

Fig. 600.

$$0 = Y \,.\, 5{,}51 + 76{,}8 \,.\, 0{,}5 - 7{,}2 \,.\, 3{,}64 - 6{,}4\,(0{,}36 + 2{,}36 + 4{,}36 + 6{,}36) + 2{,}4\left(1{,}64 + \frac{3{,}64}{2}\right), \text{ oder:}$$

$$Y_{(max)} = +\,11{,}9 \text{ T.}$$

Wenn man statt der Zug-Abtheilung die Druck-Abtheilung belastet annimmt, so erhält man auf gleichem Wege:

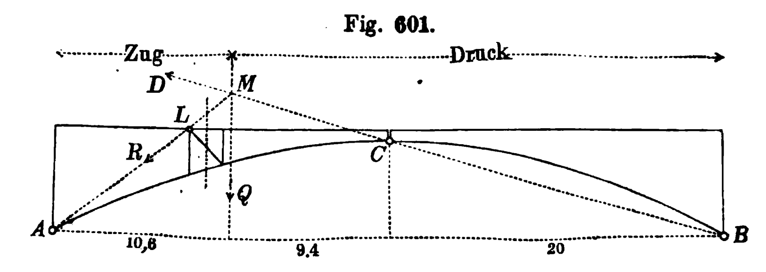
$$Y_{(min)} = -\,11{,}9 \text{ T.}$$

Spannungen im Bogen.

Für die zur Bestimmung von Z aufzustellende Momenten-Gleichung wird der Punkt L (als Durchschnittspunkt der beiden

mitdurchschnittenen Stangen) den Drehpunkt bilden (Fig. 601). Eine durch den Durchschnittspunkt M der beiden Richtungen

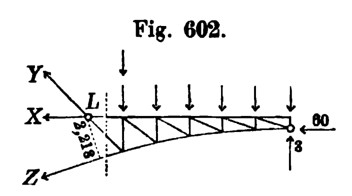
Fig. 601.



AL und BC gelegte Verticale scheidet die Zug-Abtheilung von der Druck-Abtheilung. Um $Z_{(max)}$ zu bestimmen, hat man die Zug-Abtheilung allein belastet anzunehmen und findet für diesen Belastungszustand (auf gleiche Weise wie in den vorigen Fällen) als Seitenkräfte des Scheiteldruckes:

$$H = 60 \text{ T.}, \quad V = 3 \text{ T.}$$

Fig. 602.



Aus Fig. 602 erhält man alsdann als Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt L die Gleichung:

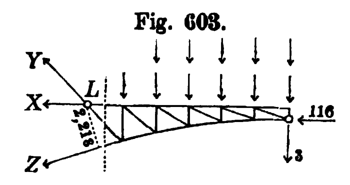
$$0 = Z \,.\, 2{,}218 + 60 \,.\, 0{,}5 - 3 \,.\, 12 + 6{,}4 \,.\, 2 + 2{,}4 \left(4 + 6 + 8 + 10 + \frac{12}{2}\right),$$

$$\text{oder:} \quad Z_{(max)} = -\, 39{,}86 \text{ T.}$$

Um $Z_{(min)}$ zu bestimmen, hat man die Druck-Abtheilung allein belastet anzunehmen und findet für diesen Belastungszustand:

$$H = 116 \text{ T.}, \quad V = -\, 3 \text{ T.}$$

Fig. 603.



Aus Fig. 603 erhält man alsdann die Momenten-Gleichung:

$$0 = Z \,.\, 2{,}218 + 116 \,.\, 0{,}5 + 3 \,.\, 12 + 2{,}4 \,.\, 2 + 6{,}4 \left(4 + 6 + 8 + 10 + \frac{12}{2}\right),$$

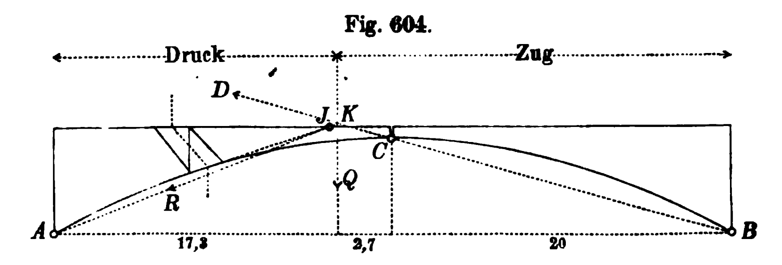
$$\text{oder:} \quad Z_{(min)} = -\, 142{,}7 \text{ T.}$$

Spannungen in den Vertical-Stangen.

Für die zur Bestimmung der Spannung U der fünften Vertical-Stange aufzustellende Momenten-Gleichung bildet wiederum der Punkt J den Drehpunkt, und die durch den Punkt K gelegte

Verticale die Grenze, welche die Zug-Abtheilung von der Druck-Abtheilung trennt — ganz wie in Fig. 597, nur mit dem Unter-

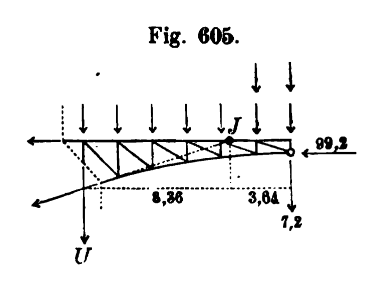
Fig. 604.



schiede, dass die Ueberschriften „Zug" und „Druck" mit einander zu vertauschen sind (Fig. 604). Nimmt man die Zug-Abtheilung allein belastet an, so erhält man als Seitenkräfte des Scheiteldruckes:

$$H = 99{,}2 \text{ T.}, \quad V = 7{,}2 \text{ T.}$$

Fig. 605.



und aus Fig. 605 erhält man für $U_{(max)}$ die Gleichung:

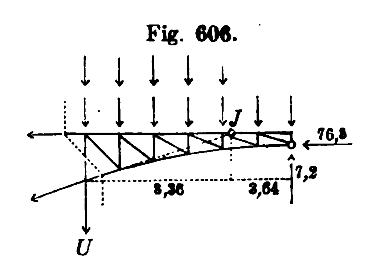
$$0 = -U.8{,}36 + 99{,}2.0{,}5 + 7{,}2.3{,}64 - 2{,}4(8{,}36 + 6{,}36 + 4{,}36 + 2{,}36 + 0{,}36) + 6{,}4\left(1{,}64 + \frac{3{,}64}{2}\right), \text{ oder:}$$

$$U_{(max)} = +5{,}44 \text{ T.}$$

Wenn dagegen die Druck-Abtheilung die allein belastete ist, so wird:

$$H = 76{,}8 \text{ T.}, \quad V = -7{,}2 \text{ T.}$$

Fig. 606.



und aus Fig. 606 ergiebt sich für $U_{(min)}$ die Gleichung:

$$0 = -U.8{,}36 + 76{,}8.0{,}5 - 7{,}2.3{,}64 - 6{,}4(8{,}36 + 6{,}36 + 4{,}36 + 2{,}36 + 0{,}36) + 2{,}4\left(1{,}64 + \frac{3{,}64}{2}\right), \text{ oder:}$$

$$U_{(min)} = -14{,}24 \text{ T.}$$

Bei dieser Berechnung ist angenommen, dass die permanente Belastung (zu welcher das Eigengewicht der Construction gehört) wie eine auf die oberen Endpunkte der Vertical-Ständer vertheilte Belastung wirkt. Wenn man statt dessen die der Wirklichkeit mehr entsprechende Annahme macht, dass die permanente Belastung wie eine zur Hälfte auf die oberen, zur anderen Hälfte auf die unteren Endpunkte der Vertical-Ständer vertheilte Belastung wirkt,

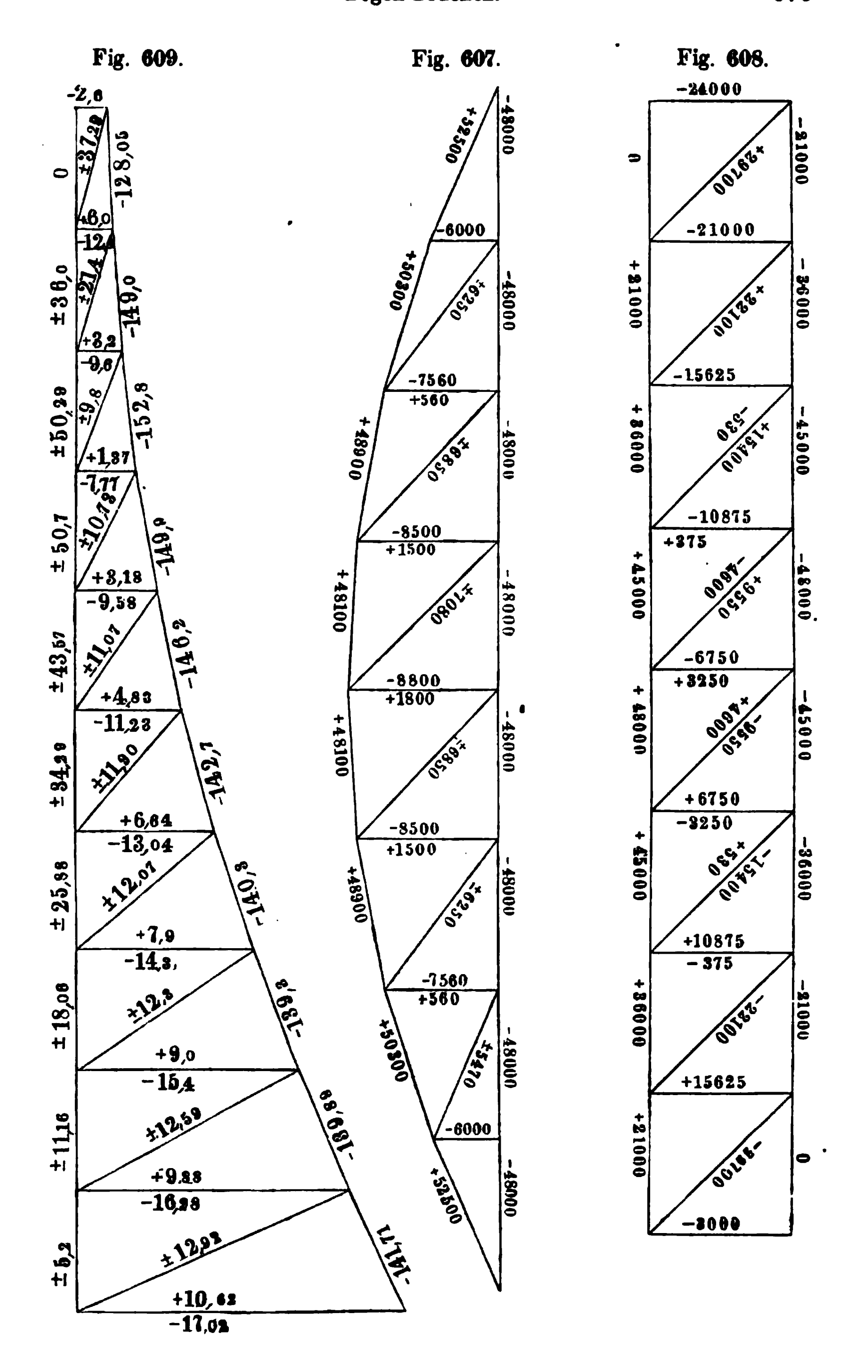
so hat man zu den oben gefundenen beiden Zahlenwerthen noch die Zahl + 1,2 hinzu zu addiren und erhält:

$$U_{(max)} = + 6{,}64 \text{ T.} \quad \text{und} \quad U_{(min)} = - 13{,}04 \text{ T.}$$

Die Spannungszahlen der anderen Stangen (X, Y, Z) sind vollkommen unabhängig von der Höhenlage, in welcher die Belastungspunkte angenommen werden.

In den Figuren **607, 608, 609** sind die Resultate einer vollständigen Berechnung der in den letzten drei Paragraphen behandelten Aufgaben übersichtlich zusammengestellt.

Wenn man in einer von diesen Figuren sämmtliche Spannungs-Zahlen mit — 1 multiplicirte, so würden dieselben für die umgekehrte Lage der Construction, also z. B. die aus Fig. **609** auf solche Weise enthaltenen Zahlen für eine Hänge-Brücke von gleicher Form gelten.


Fig. 609.
Fig. 607.
Fig. 608.

SECHSTER ABSCHNITT.

Dynamik elastischer Körper.

VIERUNDZWANZIGSTES CAPITEL.

Mechanische Arbeit der Elasticitäts-Widerstände.

§ 150.

Mechanische Arbeit des Widerstandes gegen Verlängerung und Verkürzung.

Wenn mit Q diejenige Kraft bezeichnet wird, welche erforderlich ist, um eine prismatische Stange AB vom Querschnitte F und der Länge l in einem um die Strecke $BC = \lambda$ verlängerten Zustande zu erhalten (Fig. 610), und mit K die der Verlängerung x entsprechende Kraft, so ist (nach § 131, Gleichung 598):

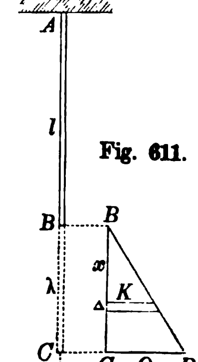


Fig. 610. Fig. 611.

$$Q = \frac{FE}{l} \cdot \lambda \quad \text{und} \quad K = \frac{FE}{l} \cdot x,$$

folglich:
$$\frac{K}{Q} = \frac{x}{l}.$$

Die verlängernden Kräfte verhalten sich wie die ihnen entsprechenden Verlängerungen. Wenn man also in dem Endpunkte C die Grösse $CD = Q$ als Ordinate abträgt, und die gerade Linie BD zieht (Fig. 611), so bildet diese gerade Linie die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die Grösse K mit der Grösse x sich ändert.

Denkt man sich den Endpunkt der Stange von B nach C fortschreitend unter Einwirkung einer verlängernden Kraft K, deren Grösse nach dem obigen Gesetze von Null bis Q zunimmt, so ist die mechanische Arbeit, welche von dieser Kraft verrichtet wird, während ihr Angriffspunkt die unendlich kleine Strecke Δ

zurücklegt, gleich dem Producte $K\Delta$, und die ganze während Zurücklegung der Strecke λ verrichtete mechanische Arbeit:

$$\mathfrak{A} = \Sigma (K\Delta)$$

erscheint in Fig. 611 dargestellt durch den Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks BCD, hat also die Grösse:

$$763)\quad \mathfrak{A} = \frac{Q\lambda}{2}.$$

Diese Gleichung nimmt, jenachdem darin Q durch λ oder umgekehrt λ durch Q ausgedrückt wird, die Formen an:

$$764)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\,\frac{FE}{l}\,\lambda^2, \quad \text{oder:} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2 l}{FE}.$$

Wenn mit S die Spannung (pro Flächeneinheit des Querschnittes) bezeichnet wird, welche der Verlängerung λ entspricht, so ist $S \,.\, F = Q$ zu setzen, folglich:

$$765)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\,Fl\,\frac{S^2}{E}$$

oder, wenn das Product Fl als körperlicher Inhalt der Stange mit J bezeichnet wird:

$$766)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\,.\,J\,.\,\frac{S^2}{E}.$$

Dieselbe Grösse negativ genommen bildet die negative mechanische Arbeit, welche von dem Elasticitätswiderstande der Stange bei jener Verlängerung verrichtet wird. Setzt man für S die Spannung an der Elasticitätsgrenze, so erhält man aus obiger Gleichung die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um die Stange bis zur Elasticitätsgrenze zu verlängern. Diese Arbeitsgrösse ist also proportional einerseits dem Quotienten $\frac{S^2}{E}$, welcher von der Beschaffenheit des Materials abhängt, andererseits dem körperlichen Inhalte der Stange — übrigens aber unabhängig von der Form derselben, also z. B. bei gleichem Inhalte für eine kurze dicke Stange ebenso gross wie für eine lange dünne Stange.

Nach der Tabelle des § 132 hat also z. B. die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um eine Stange von 1 Cubikmillimeter Inhalt bis zur Elasticitätsgrenze auszudehnen, die Grösse:

für Schmiedeisen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{15^2}{20\,000} = 0{,}005\,625$ Millim.-Kilogr.

„ Gusseisen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{7.5^2}{10\,000} = 0{,}002\,812\,5$ „

„ Gussstahl: $\frac{1}{2} \cdot \frac{65^2}{30\,000} = 0{,}0704$ „

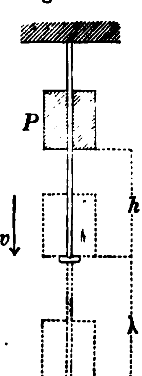
„ Holz: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{1000} = 0{,}002$ „

Wenn an dem unteren Endpunkte einer vertical aufgehängten prismatischen Stange ein Körper vom Gewichte P befestigt wird, welcher anfangs unterstützt, dann plötzlich losgelassen und der Wirkung der Schwere überlassen wird, so tritt eine Verlängerung der Stange und ein Sinken des angehängten Gewichtes ein. Wenn mit λ die Strecke bezeichnet wird, nach deren Zurücklegung die Geschwindigkeit des Sinkens Null wird, so ist $P\lambda$ die mechanische Arbeit, welche hierbei von dem Gewichte P verrichtet wird, und (nach Gleichung 763) $-\mathfrak{A} = -\frac{Q\lambda}{2}$ die negative mechanische Arbeit, welche von dem Elasticitäts-Widerstande der Stange verrichtet wird. Da der Schwerpunkt der Stange gleichfalls sinkt, so verrichtet das eigene Gewicht derselben ebenfalls eine gewisse mechanische Arbeit; es soll indessen angenommen werden, dass das Eigengewicht der Stange so klein ist, dass die mechanische Arbeit desselben im Vergleich zu der Arbeit $P\lambda$ als verschwindend klein vernachlässigt werden darf.

Unter dieser Voraussetzung kann man die hervorgebrachte Spannung und Verlängerung bestimmen, indem man (nach dem Principe der lebendigen Kraft) die algebraische Summe der beiden mechanischen Arbeiten gleich der hervorgebrachten lebendigen Kraft, d. h. gleich Null setzt, also aus der Gleichung:

$$767)\quad 0 = P\lambda - \mathfrak{A},$$

Fig. 612.



welche nach Substitution des in Gleichung 763) gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$768)\quad 0 = P\lambda - Q\frac{\lambda}{2}, \quad \text{oder:} \quad Q = 2P.$$

Diese Gleichung zeigt, dass dasjenige Gewicht, welches im Ruhezustande an der Stange hängend dieselbe Spannung wie das auf die oben beschriebene Art aufgehängte Gewicht P hervorbringt, doppelt so gross als dieses letztere ist.

Wenn das Gewicht P — statt mit der Geschwindigkeit Null mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, die es beim Herabfallen von der Höhe h erlangte, gegen den Endpunkt der Stange stösst (Fig. 612), so ist — wiederum unter Voraussetzung einer verschwindend kleinen Masse der Stange — zu setzen:

$$769)\quad 0 = P(\lambda + h) - \mathfrak{A}.$$

Wenn man hierin für $\mathfrak{A}$ den in Gleichung 764) gefundenen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$770)\quad P(\lambda + h) = \frac{1}{2}\frac{FE}{l}\lambda^2,$$

aus welcher die hervorgebrachte Verlängerung λ (und damit zugleich die entsprechende Spannung) berechnet werden kann. Wenn λ sehr klein ist im Verhältniss zu h, oder auch wenn das Gewicht P in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit v längs einer horizontalen Stange sich bewegend gegen den Endpunkt der Stange stösst, so ist zu setzen:

$$771)\quad Ph = \frac{1}{2}\frac{FE}{l}\lambda^2 = \frac{1}{2}J\frac{S^2}{E},$$

worin wiederum $h = \frac{v^2}{2g}$ die der Geschwindigkeit v entsprechende Fallhöhe bezeichnet.

Da nach § 131 die den Druck-Spannungen entsprechenden Verkürzungen genau auf dieselbe Weise zu bestimmen sind, wie die den Zug-Spannungen entsprechenden Verlängerungen, so gelten die sämmtlichen Gleichungen dieses Paragraphen auch für den Fall, in welchem die Stange in ihrer Längenrichtung gedrückt und verkürzt — statt verlängert und gezogen — wird.

Einfluss der Fehlstellen.

Setzt man $\frac{S}{n}$ statt S in Gleichung 766), so erhält man für die zur Ueberwindung des Elasticitäts-Widerstandes erforderliche mechanische Arbeit den Werth:

$$772)\quad \mathfrak{A}_1 = \frac{JS^2}{2n^2E} = \frac{\mathfrak{A}}{n^2},$$

und, wenn man ein anderes Mal $\frac{J}{n}$ statt J setzt in jener Gleichung, so erhält man für die betreffende mechanische Arbeit den Werth:

$$773)\quad \mathfrak{A}_2 = \frac{JS^2}{2nE} = \frac{\mathfrak{A}}{n}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich folgende Schlüsse ziehen: Angenommen, die Stange hätte irgendwo eine schwache Stelle, an welcher die Widerstandsfähigkeit gegen Zerreissen nur den n-ten Theil beträgt von der Grösse, welche dieselbe an allen übrigen Stellen besitzt — wie z. B. wenn durch Einschneiden oder Einsägen der Querschnitt an dieser Stelle auf den n-ten Theil vermindert wäre — so würde in diesem Falle zur Ueberwindung des Elasticitäts-Widerstandes die mechanische Arbeit $\mathfrak{A}_1$ erforderlich

sein. Wenn man alsdann von der Stange so viel Material hinwegnähme, dass auch an allen übrigen Stellen der Querschnitt auf den n-ten Theil reducirt wird, so wächst jene erforderliche mechanische Arbeit auf die Grösse:

$$774)\quad \mathfrak{A}_2 = n\,.\,\mathfrak{A}_1.$$

Es ergiebt sich also das bemerkenswerthe Resultat: dass die Widerstandsfähigkeit eines Körpers gegen mechanische Arbeit oder gegen lebendige Kraft bewegter Massen der Verminderung der Materialmenge unter Umständen vergrössert werden kann.

§ 151.

Mechanische Arbeit des Widerstandes gegen Biegung.

Wenn mit λ die von der Kraft Q, und mit x die von der Kraft K an dem prismatischen Balken Fig. 613 hervorgebrachte Durchbiegung bezeichnet wird, so ist (nach § 137, Gleichung 649):

$$775)\quad \lambda = \frac{Q l^3}{3 E \mathfrak{T}} \quad \text{und} \quad x = \frac{K l^3}{3 E \mathfrak{T}}, \quad \text{folglich:} \quad \frac{K}{Q} = \frac{x}{\lambda}.$$

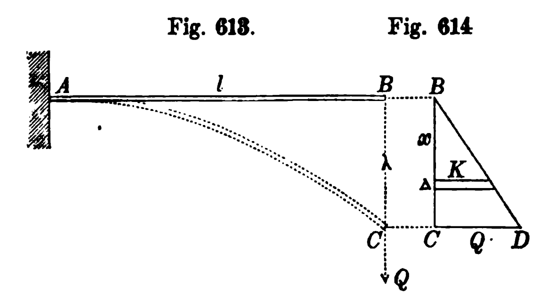


Fig. 613. Fig. 614

Die biegenden Kräfte verhalten sich also wie die ihnen entsprechenden Durchbiegungen. Genau auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen mit Bezug auf Fig. 611 erklärt wurde, findet man nach Fig. 614, dass die allgemeine Gleichung 763):

$$\mathfrak{A} = \frac{Q \lambda}{2}$$

auch gilt für die mechanische Arbeit, welche in diesem Falle erforderlich ist, um die Durchbiegung λ hervorzubringen. Wenn man hierin für λ den Werth aus Gleichung 775) substituirt, so erhält man:

$$776)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{6}\,\frac{Q^2 l^3}{E \mathfrak{T}}.$$

Nach § 135, Gleichung 618) ist die von der Kraft Q hervorgebrachte Maximal-Spannung zu bestimmen aus der Gleichung $\frac{S}{w}\mathfrak{T}$

$= Ql$, und man erhält nach Substitution des hieraus für Q sich ergebenden Werthes die Gleichung:

$$777)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{T}l}{w^2}\cdot\frac{S^2}{E}.$$

Für einen Balken, dessen Querschnitt ein Rechteck ist von der Höhe h und der Breite b, ist $\frac{\mathfrak{T}l}{w^2} = \frac{bhl}{3} = \frac{J}{3}$ (wenn mit J wiederum der körperliche Inhalt des Balkens bezeichnet wird) folglich:

$$778)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{18}\cdot J\cdot\frac{S^2}{E}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um den Balken bis zur Elasticitätsgrenze durchzubiegen, (wie im vorigen Falle) proportional ist einerseits dem körperlichen Inhalte desselben, andererseits dem Quotienten $\frac{S^2}{E}$, welcher von der Beschaffenheit des Materials abhängt.

Derselbe Satz gilt auch für beliebige andere Querschnittsformen. So z. B. ist für einen Balken, dessen Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r ist: $\frac{\mathfrak{T}l}{w^2} = \frac{\pi}{4}r^2 l = \frac{J}{4}$, also nach Gleichung 777):

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{24}\cdot J\cdot\frac{S^2}{E}.$$

Die Gleichungen 777) und 778) gelten auch für einen an beiden Endpunkten unterstützten Balken, welcher durch eine in der Mitte desselben wirkende Kraft durchgebogen wird. Denn jede der beiden Hälften eines solchen Balkens befindet sich in der Lage eines auf die in Fig. 613 dargestellte Art von der Kraft $\frac{Q}{2}$ durchgebogenen Balkens. Für diesen Fall hat man also in Gleichung 775): $\frac{Q}{2}$ statt Q, ferner $\frac{l}{2}$ statt l zu setzen und erhält die Gleichungen:

$$\lambda = \frac{Ql^3}{48E\mathfrak{T}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \frac{Q\lambda}{2} = \frac{Q^2l^3}{96E\mathfrak{T}}.$$

Wenn man in letzterer den aus der Gleichung für die grösste Biegungsspannung: $\frac{S}{w}\mathfrak{T} = \frac{Q}{2}\cdot\frac{l}{2}$ sich ergebenden Werth für Q substituirt, so erhält man wiederum dieselbe Gleichung 777), welche für den an einem Endpunkte befestigten Balken von gleicher Länge gefunden wurde.

Für eine dreieckige Feder (Fig. 542 und Fig. 543) ist nach Gleichung 699) zu setzen:

$$\lambda = \frac{Ql^3}{2E\mathfrak{T}_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \frac{Q\lambda}{2} = \frac{Q^2l^3}{4E\mathfrak{T}_1},$$

und die von der Kraft Q hervorgebrachte grösste Biegungsspannung wiederum zu bestimmen nach der Gleichung $\frac{S}{w'}\mathfrak{T}_1 = Ql$, aus deren Verbindung mit der vorigen die Gleichung sich ergiebt:

$$779)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{T}_1 l}{w^2}\cdot\frac{S^2}{E} = \frac{1}{6}J\cdot\frac{S^2}{E}.$$

In allen diesen Fällen bildet der für $\mathfrak{A}$ gefundene Ausdruck negativ genommen den Ausdruck für die von dem Elasticitäts-Widerstande verrichtete mechanische Arbeit, und wo diese Arbeit darauf verwendet wird, die lebendige Kraft $\frac{mv^2}{2}$ einer bewegten Masse zu vernichten, da kann man durch Gleichsetzung dieser beiden Grössen:

$$780)\quad \mathfrak{A} = \frac{mv^2}{2},$$

indem man für $\mathfrak{A}$ den gefundenen Werth substituirt, die grösste Biegungsspannung S berechnen, welche bei der eintretenden Durchbiegung entsteht, oder den Inhalt J, welchen der Balken haben muss, wenn die zulässige Spannung S nicht überschritten werden soll — wobei immer vorausgesetzt ist, dass die eigene Masse des gebogenen Balkens im Vergleich zu der Masse m klein genug ist, um vernachlässigt werden zu können. Die obige Gleichung nimmt, wenn darin $m = \frac{P}{g}$ und $\frac{v^2}{2g} = h$ gesetzt wird, die Form an:

$$781)\quad \mathfrak{A} = Ph,$$

worin P das Gewicht der Masse m, und h die der Geschwindigkeit v entsprechende Fallhöhe bezeichnet.

Nach Gleichung 778) würde z. B. der erforderliche Inhalt eines parallelepipedischen Balkens zu bestimmen sein aus der Gleichung:

$$782)\quad \frac{1}{18}J\frac{S^2}{E} = Ph,\quad \text{oder:}\quad J = 18\frac{E}{S^2}Ph,$$

und nach Gleichung 779) der erforderliche Inhalt einer Dreieckfeder aus der Gleichung:

$$783)\quad \frac{1}{6}J\frac{S^2}{E} = Ph,\quad \text{oder:}\quad J = 6\frac{E}{S^2}Ph.$$

Im ersten Falle beträgt also die erforderliche Materialmenge unter sonst gleichen Umständen dreimal so viel als im letzteren Falle.

Wenn eine Dreieckfeder so beschaffen sein soll, dass durch eine mit der Geschwindigkeit $v = 1^m,4$ gegen den Endpunkt der Feder stossende Masse von 200 Kil. Gewicht die Spannung S in derselben hervorgebracht wird, so ist $h = \frac{1,4^2}{2\,.\,g} = 0^m,1 = 100$ Millimeter zu setzen, und man erhält nach Gleichung 783):

784) $J = 120\,000\,\frac{E}{S^2}$.

Setzt man hierin für S die Grösse der praktisch zulässigen Spannung und für E die in der Tabelle des § 132 angegebenen Werthe, so erhält man z. B. für:

Schmiedeisen: $J = 120\,000 \cdot \frac{20\,000}{6^2} = 66{,}66 \ldots 10^6$ Cubikmillimeter,

Gusseisen: $J = 120\,000 \cdot \frac{10\,000}{3^2} = 133{,}33 \ldots 10^6$ „

Gussstahl: $J = 120\,000 \cdot \frac{30\,000}{45^2} = 1{,}77 \ldots 10^6$ „

Holz: $J = 120\,000 \cdot \frac{1000}{1^2} = 120 \,.\, 10^6$ „

Ein zusammengesetztes Federwerk von der in Fig. 545 und Fig. 546 dargestellten Form würde ebenso viel Material erfordern; eine Rechteckfeder dagegen dreimal so viel.

Wenn ein Balken aus dem gebogenen Zustande wieder in den geradlinigen zurückkehrt, so verrichten die Elasticitätskräfte eine positive mechanische Arbeit von gleicher Grösse mit derjenigen, welche vorher zum Hervorbringen des gebogenen Zustandes erforderlich war. Die lebendige Kraft, welche durch diese positive mechanische Arbeit erzeugt werden kann, ist ebenso gross wie diejenige, welche vorher beim Krummbiegen durch die negative mechanische Arbeit der Elasticitäts-Widerstände vernichtet werden konnte.

Wenn man die oben als Beispiel gewählte Feder im gebogenen Zustande mit einem 200 Kil. wiegenden Körper in Berührung bringt und dann loslässt, so würde dem Körper eine Geschwindigkeit von $1^m{,}4$ ertheilt werden, wenn die Masse der Feder unendlich klein wäre. In Wirklichkeit wird die hervorgebrachte Geschwindigkeit etwas kleiner sein, insofern ein Theil der mechanischen Arbeit dazu verwendet wird, der Feder selbst eine gewisse lebendige Kraft zu ertheilen, welche in Form von Schwingungsbewegungen in derselben zurückbleibt.

§ 152.

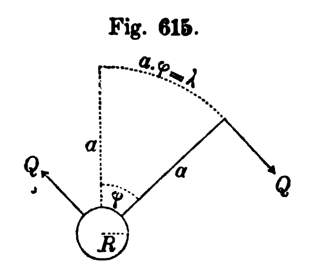
Mechanische Arbeit des Torsionswiderstandes.

(Torsionspendel.)

Nach § 144, Gleichung 747) ist das Moment $\mathfrak{M}$ des Kräftepaares, welches erforderlich ist, um den Cylinder in einem um den Torsionswinkel φ verdrehten Zustande zu erhalten, diesem Torsionswinkel proportional. Während der Torsionswinkel von Null bis φ gleichförmig zunimmt, wird das Moment des erforderlichen Kräftepaares von Null bis $\mathfrak{M}$ gleichförmig zunehmen müssen, und wenn der Hebelarm des Kräftepaares constant bleibt, so wird

die Kraft desselben ebenfalls gleichförmig zunehmen und zwar von Null bis Q, wenn mit Q die Grösse bezeichnet wird, welche die Kraft am Ende der Drehung erreicht (Fig. 615). Die mechanische Arbeit, welche während der Drehung von dem Kräftepaare verrichtet wird, ist also auch in diesem Falle nach der allgemeinen Gleichung 763):

Fig. 615.



$$\mathfrak{A} = \frac{Q\lambda}{2}$$

zu bestimmen, wenn mit λ die Länge des Bogens bezeichnet wird, welcher von dem Endpunkte des Hebelarmes während der Drehung beschrieben wird (vergl. § 21, Fig. 42). Die obige Gleichung nimmt nach Substitution der Werthe $\lambda = a\varphi$ und $Qa = \mathfrak{M}$ die Form an:

$$785)\quad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}\varphi}{2}.$$

Wenn man in dieser Gleichung für φ den Werth aus Gleichung 747) und nachher für $\mathfrak{M}$ den Werth aus Gleichung 745) substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$786)\quad \mathfrak{A} = \frac{S^2}{E}\,\frac{l\mathfrak{T}_0}{R^2}.$$

Hierin ist $\frac{l\mathfrak{T}_0}{R^2} = l \cdot \frac{\pi}{2} R^2 = \frac{J}{2}$ (gleich dem halben körperlichen Inhalt des Cylinders), folglich ist:

$$787)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2} J \cdot \frac{S^2}{E}.$$

Wenn an dem einen Endpunkte einer in Drehbewegung begriffenen Welle ein Schwungrad sich befindet, und am anderen Endpunkte der Welle durch irgend ein Bewegungs-Hinderniss die Bewegung plötzlich ins Stocken geräth, so wird die lebendige Kraft des Schwungrades (im Vergleich zu welcher die lebendige Kraft der Welle selbst als verschwindend klein vorausgesetzt wird) in mechanische Arbeit verwandelt, und durch diese mechanische Arbeit ein Torsionszustand in der Welle hervorgebracht. Die Grösse, welche die Spannung S dabei schliesslich erreicht, findet man aus Gleichung 787), indem man darin für $\mathfrak{A}$ die anfängliche lebendige Kraft des Schwungrades substituirt.

Wenn mit μ die auf den Umfang reducirte Masse und mit v die anfängliche Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades bezeichnet wird, so ist die anfängliche lebendige Kraft desselben gleich $\frac{\mu v^2}{2}$, wofür auch Ph gesetzt werden kann, wenn das Gewicht $\mu \,.\, g$ der Masse μ mit P und die der Geschwindigkeit v entsprechende Fallhöhe $\frac{v^2}{2g}$ mit h bezeichnet wird. Man erhält also die Gleichung:

788) $Ph = \frac{1}{2} J \cdot \frac{S^2}{E}$.

Wenn z. B. die Umfangsgeschwindigkeit $v = 2^m,8$ war, so ist $h = \frac{2,8^2}{2g} = 0^m,4 = 400$ Millimeter, und wenn das Schwungrad die Form eines Ringes hat, dessen Gewicht 500 Kil. beträgt, so ist $P = 500$ zu setzen. Für eine schmiedeiserne Welle würde $E = 20\,000$ zu setzen sein; der körperliche Inhalt, welchen diese Welle haben muss, wenn die für Schmiedeisen als zulässig anzunehmende Torsionsspannung $S = 4$ Kil. nicht überschritten werden soll, beträgt also:

$$J = 2\,Ph \frac{E}{S^2} = 2 \,.\, 500 \,.\, 400 \cdot \frac{20\,000}{4^2} = 500\,000\,000 \text{ Cubikmillimeter}$$
$$= 0,5 \text{ Cubikmeter.}$$

Torsionspendel.

Wenn man durch Drehung des an dem Drahte CO hängenden Körpers AB (Fig. 616) eine gewisse Torsion in dem Drahte hervorbringt und den Körper alsdann loslässt, so bilden die Torsionswiderstände des Drahtes ein Kräftepaar, durch welches dem Körper eine rückwärts gerichtete Drehbewegung in der Richtung nach der früheren Gleichgewichtslage hin ertheilt wird. Die lebendige Kraft, welche der Körper bei seiner Rückkehr in die Gleichgewichtslage erlangt, ist gleich der mechanischen Arbeit, welche vorher auf Hervorbringung des Torsionszustandes verwendet wurde. Vermöge dieser lebendigen Kraft wird der Körper über die Gleichgewichtslage hinaus die Drehbewegung so lange fortsetzen, bis durch die Arbeit der Torsionswiderstände wiederum die vorhandene lebendige Kraft völlig aufgezehrt ist. Dieser Fall tritt ein, wenn die Entfernung von der Gleichgewichtslage nach dieser Seite hin wieder ebenso gross wie die anfängliche geworden ist. Hierauf führt der Körper nach demselben Gesetze rückwärts sich drehend eine zweite Schwingung aus und fährt auf gleiche Weise fort,

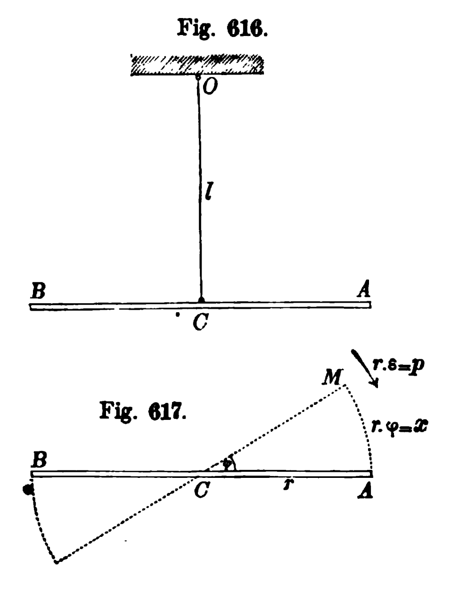


Fig. 616.

Fig. 617.

um seine Gleichgewichtslage herum Pendel-Schwingungen auszuführen.

Um die Dauer einer solchen Pendel-Schwingung zu bestimmen, hat man das Gesetz aufzusuchen, nach welchem irgend ein Punkt des Körpers, z. B. der im Abstande r von der Drehachse befindliche Punkt A, den Schwingungsbogen $\widehat{MA}$ (Fig. 617) durchläuft. Dem Torsionswinkel φ entspricht nach Gleichung 747) das Moment $\mathfrak{M} = \frac{E\mathfrak{T}_0}{2l}\varphi$, und nach Gleichung 504) ist die Winkelbeschleunigung bei dieser Stellung des Körpers:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{T} = \frac{E\mathfrak{T}_0}{2lT}\cdot\varphi,$$

folglich die Peripherie-Beschleunigung des in der Entfernung r von der Drehachse befindlichen Punktes:

$$r\varepsilon = \frac{E\mathfrak{T}_0}{2lT}\cdot r\varphi.$$

Wenn abkürzungsweise die während der Bewegung unverändert bleibende Grösse $\frac{E\mathfrak{T}_0}{2lT} = q$, die Bogenlänge $r\varphi = x$, und die Bogen-Beschleunigung $r\varepsilon = p$ gesetzt wird, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$789)\quad p = q\,.\,x.$$

Die Beschleunigung p des den Bogen $\widehat{MA}$ durchlaufenden Punktes ist also stets der auf dem Bogen gemessenen Entfernung x desselben von seiner Gleichgewichtslage proportional, und q ist der Werth, welchen diese Beschleunigung annimmt, wenn die Entfernung $x = 1$ wird. Folglich ist (nach § 28 und § 34) die ganze Schwingungsdauer des Torsionspendels:

$$790)\quad t = \frac{\pi}{\sqrt{q}} = \pi\sqrt{\frac{2lT}{E\mathfrak{T}_0}}.$$

Hierin bedeutet T das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers in Bezug auf die Achse des Drahtes. Es ist vorausgesetzt, dass diese Achse in Bezug auf den schwingenden Körper eine freie Achse bildet (§ 111), und dass die Masse des Drahtes selbst als verschwindend klein betrachtet werden darf.

Wenn an jedem der beiden im Abstande a von der Drehachse einander symmetrisch gegenüberliegenden Punkte eine Masse m angebracht, und dadurch zu dem Trägheits-Momente T die Grösse $2ma^2$ hinzugefügt wird, so entsteht ein neues Torsionspendel von der Schwingungsdauer:

$$791)\quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{2l(T+2ma^2)}{E\mathfrak{T}_0}}.$$

Letztere Gleichung nimmt durch die vorhergehende dividirt die Form an:

$$792)\quad \frac{t_1}{t} = \sqrt{1+\frac{2ma^2}{T}}, \quad \text{oder:}\quad \frac{T}{2ma^2} = \frac{t^2}{t_1^2 - t^2}.$$

Diese Gleichung bietet ein einfaches Mittel, um auf dem Wege der Beobachtung das Trägheits-Moment eines beliebigen Körpers in Bezug auf eine freie Schwerpunkts-Achse desselben zu bestimmen. Es ist zu diesem Zwecke nur nöthig, den Körper an einem beliebigen Drahte aufzuhängen und die Schwingungsdauer t zu beobachten, hierauf die durch Hinzufügung der beiden in bekannten Abständen a angebrachten bekannten Massen m vergrösserte Schwingungsdauer t_1 ebenfalls zu beobachten, worauf dann nach Gleichung 792) das Verhältniss des gesuchten Trägheits-Momentes T zu dem bekannten Trägheits-Momente $2ma^2$ bestimmt werden kann.

Hätte man z. B. gefunden, dass die Schwingungsdauer des für sich allein schwingenden Körpers $t = 12$ Sec. war, und dass durch Hinzufügung von zwei im Abstande gleich 1^m von der Drehachse befindlichen Massen von je 0,5 Kil. die Schwingungsdauer auf die Grösse $t_1 = 13$ Sec. zunahm, so würde aus Gleichung 792) der Werth sich ergeben:

$$\frac{T}{2 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1^2} = \frac{12^2}{13^2 - 12^2} = 5{,}76,$$

und man würde hieraus schliessen können, dass das gesuchte Trägheits-Moment so gross ist, wie das einer im Abstande 1^m von der Drehachse befindlichen Masse von 5,76 Kil., dass also die auf den Abstand 1^m reducirte Masse des Körpers 5,76 Kil. beträgt.

Wenn man den Körper — statt an einem Drahte — an zwei nebeneinander befindlichen Fäden aufhängt, so erhält man — statt des Torsions-Pendels — das sogenannte Bifilar-Pendel, dessen Schwingungen ebenfalls dem in Gleichung 792) enthaltenen Gesetze gemäss erfolgen, so lange der Schwingungswinkel klein ist. Ein solches Bifilar-Pendel kann daher ebenfalls auf die oben erklärte Weise zur experimentellen Bestimmung des Trägheits-Momentes benutzt werden.

FÜNFUNDZWANZIGSTES CAPITEL.

Theorie des Stosses.

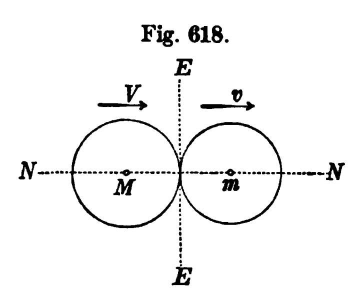
§ 153.

Gerader centraler Stoss.

Wenn im Augenblicke des ersten Zusammentreffens der beiden Körper die an der Berührungsstelle errichtete Normale NN zur Berührungsebene EE zusammenfällt mit der Verbindungslinie

ihrer beiden Schwerpunkte (Fig. 618), so wird der Stoss ein „centraler“ Stoss genannt (im Gegensatze zu dem excentrischen Stosse, bei welchem jene Normale keinen oder nur einen von den beiden Schwerpunkten trifft); und wenn ausserdem die Bewegungsrichtungen der beiden Körper mit der Richtung jener Normalen zusammenfallen, so wird der Stoss zugleich ein „gerader“ Stoss genannt (im Gegensatze zu dem schiefen Stosse, bei welchem keine oder nur eine von den beiden Bewegungsrichtungen rechtwinkelig zu jener Berührungsebene gerichtet ist).

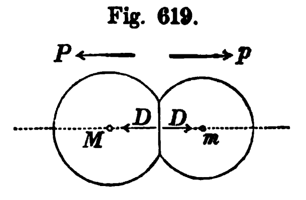
Fig. 618.



Vor dem Stosse führte jeder von den beiden Körpern nach dem Gesetze der Trägheit eine geradlinige gleichförmige Bewegung aus; in dem Augenblicke aber, wo die mit der kleineren Geschwindigkeit v vorangehende Masse m eingeholt wird von der mit der grösseren Geschwindigkeit V ihr folgenden Masse M, beginnen plötzlich die beiden Körper auf einander gegenseitig einzuwirken; an der Berührungsstelle entstehen Druckkräfte, durch welche die Bewegungen der beiden Körper nach und nach verändert werden. Der auf die Masse m wirkende Druck und der auf die Masse M wirkende Druck sind als „Druck“ und „Gegendruck“ nach dem Gesetze der Wechselwirkung stets gleich gross und entgegengesetzt gerichtet. Auf die Masse m wirkt der Druck in der Richtung der Bewegung als beschleunigende Kraft; auf die Masse M wirkt der Druck der Bewegungsrichtung entgegen als verzögernder Widerstand.

Nach dem Gesetze des Schwerpunktes (§ 120) bewegt sich der Schwerpunkt der Masse m unter Einwirkung des beschleunigenden Druckes wie ein einfacher materieller Punkt von gleicher Masse unter Einwirkung der gleichen Kraft sich bewegen würde. Wenn also in einem bestimmten Zeitpunkte der Druck die Grösse D erreicht hat (Fig. 619), so bewegt sich der Schwerpunkt der Masse m in diesem Augenblicke mit der Beschleunigung:

Fig. 619.



$$p = \frac{D}{m}.$$

Aus gleichem Grunde ergiebt sich, dass in demselben Augenblicke der Schwerpunkt der Masse M sich bewegt mit der Verzögerung:

$$P = \frac{D}{M}.$$

Wie auch immer der Druck D sich ändern möge im Laufe derjenigen Zeit, während welcher die beiden Körper mit einander in Berührung bleiben: das Verhältniss der beiden auf die Zeiteinheit reducirten Geschwindigkeits-Aenderungen behält in allen Punkten dieses Zeitraumes den unveränderlichen Werth:

$$793) \quad \frac{p}{P} = \frac{M}{m},$$

welcher gleich dem umgekehrten Verhältniss der beiden Massen ist. Hieraus folgt, dass für jedes der unendlich kleinen Zeittheilchen, in welche man sich die ganze Stossdauer zerlegt denken kann, das Verhältniss der in diesem Zeittheilchen den beiden Schwerpunkten ertheilten Geschwindigkeits-Aenderungen ebenfalls gleich dem umgekehrten Massenverhältniss ist. Es muss daher auch das Verhältniss der in einem beliebig gewählten Theile der ganzen Stossdauer (oder auch der während der ganzen Stossdauer selbst) hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen gleich dem umgekehrten Verhältniss der beiden Massen sein.

Wenn mit c die Geschwindigkeit bezeichnet wird, welche der Schwerpunkt der Masse m in irgend einem Zeitpunkte (innerhalb oder auch am Ende) der Stossdauer erreicht hat, so ist $c - v$ die Geschwindigkeits-Zunahme, welche der Schwerpunkt der Masse m bis zu diesem Zeitpunkte erlangt hat, und wenn mit C die Geschwindigkeit bezeichnet wird, welche der Schwerpunkt der Masse M in demselben Zeitpunkte erreicht hat, so ist $V - C$ die bis zu diesem Zeitpunkte erfolgte Geschwindigkeits-Abnahme des Schwerpunktes der Masse M. Das Verhältniss dieser beiden Geschwindigkeits-Aenderungen ist also:

$$794) \quad \frac{c - v}{V - C} = \frac{M}{m}.$$

Diese Gleichung lässt sich, wenn derselben die Form gegeben wird:

$$795) \quad mc + MC = mv + MV$$

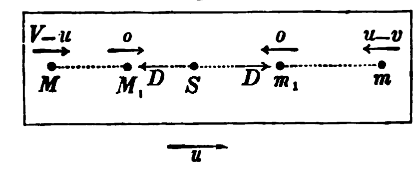
auch unmittelbar aus dem Gesetze des Schwerpunktes schon ab-

leiten. Nach § 120 muss der gemeinschaftliche Schwerpunkt des von beiden Körpern zusammengenommen gebildeten Massen-Systems sich so bewegen, wie wenn die Massen aller materiellen Punkte und die Angriffspunkte aller Kräfte in ihm vereinigt wären. Die Beschleunigung dieses Schwerpunktes ist (nach Gleichung 543) in diesem Falle gleich Null, weil keine äusseren Kräfte vorhanden sind, und die inneren Kräfte — zu denen auch die beiden Drücke D zu rechnen sind — je paarweise gleiche Grössen und entgegengesetzte Richtungen haben. Hieraus folgt, dass die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in demjenigen Zeitpunkte, auf welchen Gleichung 795) sich bezieht, noch dieselbe Grösse haben muss, welche sie vor dem Zusammentreffen der beiden Körper hatte. Wenn also mit u die Geschwindigkeit bezeichnet wird, mit welcher der Schwerpunkt des ganzen Massen-Systems vor dem Stosse sich bewegte, so ist nach Gleichung 541) das Product:

$$796) \quad (m + M)\, u = mv + MV = mc + MC$$

eine constante Grösse, welche während der Stossdauer sich nicht ändert. Die Gleichung 795) drückt demnach aus: dass die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der beiden Massen durch den Stoss keinerlei Aenderungen erleidet. Um nunmehr die Geschwindigkeits-Aenderungen zu bestimmen, welche der Schwerpunkt jedes einzelnen der beiden Körper durch den Stoss erleidet, ist es nur nöthig zu untersuchen: auf welche Weise die relative Bewegung jedes dieser beiden Punkte in Bezug auf einen mit dem Schwerpunkte des ganzen Systems gleichförmig fortschreitenden Raum durch den Stoss verändert wird. Die Geschwindigkeit dieses Raumes ist gleich u, und da die Beschleunigung desselben gleich Null ist, so geschehen die relativen Bewegungen der beiden Schwerpunkte genau so wie bei gleichen Anfangsgeschwindigkeiten die absoluten Bewegungen derselben erfolgen würden (§ 36).

Fig. 620.



Vor dem Stosse war die relative Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Masse M (Fig. 620) in Bezug auf diesen Raum gleich $V - u$, und die des Schwerpunktes der Masse m war $u - v$. Mit diesen beiden Anfangsgeschwindigkeiten beginnen die beiden Schwerpunkte M und m von entgegengesetzten Seiten her ihre relative Bewegung

gegen den gemeinschaftlichen Schwerpunkt S hin, welcher seinerseits im relativen Ruhezustande sich befindet. Durch die Gegendrücke D werden diese beiden relativen Geschwindigkeiten allmählich vermindert, und nach Verlauf einer gewissen Zeit werden beide relative Geschwindigkeiten gleichzeitig die Grösse Null erreichen (denn in dem Augenblicke, wo die relative Geschwindigkeit des einen Schwerpunktes Null wird, muss auch die des anderen Null werden, weil der Schwerpunkt des ganzen Systems die relative Geschwindigkeit Null hat).

In diesem Augenblicke haben beide Schwerpunkte (nach Gleichung 796) die gemeinschaftliche absolute Geschwindigkeit:

$$797)\quad u = \frac{MV + mv}{M + m},$$

und bis zu diesem Zeitpunkte hat die absolute Geschwindigkeit des Schwerpunktes M abgenommen um die Grösse:

$$798)\quad V - u = \frac{V - v}{1 + \frac{M}{m}},$$

die absolute Geschwindigkeit des Schwerpunktes m dagegen zugenommen um die Grösse:

$$799)\quad u - v = \frac{V - v}{1 + \frac{m}{M}}.$$

Denkt man sich also bei dem Stosse zweier Körper die ganze Zeitdauer t der Berührung in zwei Zeiträume t_1 und t_2 zerlegt, von denen der erstere bis zu dem Augenblicke gerechnet wird, in welchem die Geschwindigkeiten der beiden Schwerpunkte einander gleich geworden sind, so ist die während dieses ersteren Zeitraumes erfolgende Geschwindigkeits-Aenderung jedes der beiden Schwerpunkte unter allen Umständen mathematisch genau bestimmbar. Was dagegen die Bestimmung der in dem zweiten Zeitraum t_2 erfolgenden Geschwindigkeits-Aenderungen betrifft, so hängen dieselben ab von dem Grade der Intensität des Stosses, von der physikalischen Beschaffenheit der beiden stossenden Körper; und dieser Theil der Aufgabe ist im Allgemeinen nur annäherungsweise lösbar.

Wenn man (in Gleichung 794) unter den Grössen C und c resp. die Endgeschwindigkeiten am Ende des Zeitraumes t_2 (oder am Ende der ganzen Stossdauer) versteht, so ist $u - C$ die Grösse, um welche die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Masse M

während der Periode t_2 ferner **abnimmt**, und $c - u$ die Grösse, um welche die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Masse m während der Periode t_2 ferner **zunimmt**. Der in Gleichung 794) enthaltene Satz: „die Geschwindigkeits-Aenderungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen", gilt auch für jeden der beiden Zeiträume t_1 und t_2 einzeln genommen, folglich ist:

$$800)\quad \frac{u - C}{c - u} = \frac{m}{M} = \frac{V - u}{u - v}.$$

Aus der Gleichheit des ersten und dritten Quotienten folgt die Gleichung:

$$801)\quad \frac{u - C}{V - u} = \frac{c - u}{u - v} = \varepsilon,$$

worin mit ε der noch unbekannte Zahlenwerth (des Coefficienten der Stoss-Elasticität) bezeichnet ist, welcher angiebt, in welchem Verhältniss die während der Periode t_2 hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen zu den während der Periode t_1 hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen stehen. Hiernach ergeben sich für die während der zweiten Periode hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen die Werthe:

$$802)\quad u - C = \varepsilon\,(V - u), \qquad 803)\quad c - u = \varepsilon\,(u - v),$$

und wenn man diese zu den während der ersten Periode hervorgebrachten (in den Gleichungen 798) und 799) gefundenen) Geschwindigkeits-Aenderungen hinzu addirt, so erhält man für die **totalen** durch den Stoss hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen resp. die Gleichungen:

$$804)\quad V - C = \frac{(1 + \varepsilon)\,(V - v)}{1 + \frac{M}{m}}, \qquad 805)\quad c - v = \frac{(1 + \varepsilon)\,(V - v)}{1 + \frac{m}{M}},$$

nach denen die Endgeschwindigkeiten C, c berechnet werden können, sobald der Coefficient ε bekannt ist.

§ 154.

Bestimmung des Stoss-Elasticitäts-Coefficienten ε.

Elastischer und unelastischer Stoss.

Während der Schwerpunkt der Masse M die relative Bewegung von M nach M_1 ausführt (Fig. 620), rücken die Schwerpunkte der beiden Körper einander gegenseitig näher, und diese Annäherung ist mit einer Zusammendrückung der beiden Körper an der Berührungsstelle verbunden. Durch diese Zusammen-

drückung wird eine elastische Gegenwirkung hervorgerufen, welche mit der Grösse der Zusammendrückung nach irgend einem Gesetze sich ändert. Der Gegendruck D an der Berührungsstelle durchläuft während des Fortschreitens der Zusammendrückung irgend eine Reihenfolge von verschiedenen Werthen, und da der Schwerpunkt der Masse M seine relative Bewegung gerade so ausführt wie ein einfacher materieller Punkt von gleicher Masse unter Einwirkung der verzögernden Kraft D sich bewegen würde, so ist die hervorgebrachte Aenderung derjenigen lebendigen Kraft, welche der relativen Bewegung des Schwerpunktes der Masse M entspricht, gleich zu setzen der negativen mechanischen Arbeit, welche der veränderliche Druck D während der Bewegung seines Angriffspunktes von M nach M_1 verrichtet.

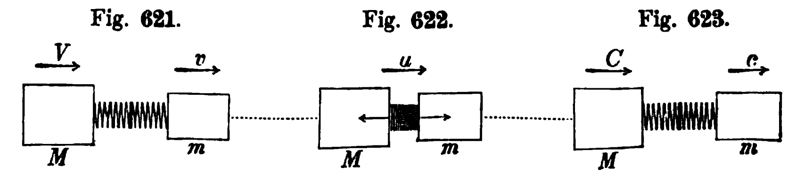
Elastischer Stoss.

Der Endpunkt des Zeitraumes t_1 oder derjenige Zeitpunkt, in welchem die beiden Schwerpunkte ihre grösste Annäherung erreicht haben, ist zugleich der Augenblick der grössten Zusammendrückung; nach diesem Zeitpunkte erfolgt während des Zeitraumes t_2 eine Wiederausdehnung der beiden Körper. Angenommen: diese Wiederausdehnung erfolgte in der Weise, dass die beiden Körper vollständig in ihre früheren Formen zurückkehren, und dass der Druck D während der rückgängigen Bewegung des Schwerpunktes der Masse M von M_1 nach M in umgekehrter Reihenfolge genau dieselben Werthe wieder durchläuft, welche derselbe vorher bei dem Hinwege von M nach M_1 nach und nach angenommen hatte: so würde in diesem Falle auch die von demselben verrichtete mechanische Arbeit ihrer absoluten Grösse nach bei dem Rückwege gerade so gross wie bei dem Hinwege sein; in Folge dessen würde die in der zweiten Periode hervorgebrachte lebendige Kraft wieder ebenso gross sein wie die in der ersten Periode vernichtete lebendige Kraft der relativen Bewegung des Schwerpunktes der Masse M; und da die relative Geschwindigkeit dieses Punktes in der ersten Periode von $V - u$ bis auf Null abnahm, so würde dieselbe in der zweiten Periode von Null bis auf die Grösse $V - u$ (in entgegengesetzter Richtung genommen) wieder zunehmen. Für diesen Fall würde nach Gleichung 801) der Coefficient $\varepsilon = 1$ zu setzen sein, und die allgemeinen Gleichungen 804) und 805) würden die Formen annehmen:

$$806)\quad V - C = \frac{2(V - v)}{1 + \frac{M}{m}}, \qquad 807)\quad c - v = \frac{2(V - v)}{1 + \frac{m}{M}}.$$

Um sich die Bedingungen zu veranschaulichen, von welchen das Erfülltsein der obigen Voraussetzungen und die Gültigkeit der zuletzt gefundenen beiden Gleichungen abhängt, hat man sich die beiden Eigenschaften der „Elasticität“ und der „Trägheit“ vollständig von einander getrennt, d. h. in jedem der beiden Körper an zwei verschiedenen Theilen haftend zu denken, von denen der eine — unmittelbar durch den Stoss getroffene Theil — wie eine vollkommen elastische Feder ohne Masse ausschliesslich die Eigenschaft der „Elasticität“ repräsentirt, und der andere als vollkommen unelastischer Körper ausschliesslich die Eigenschaft der „Trägheit“ oder die ganze Masse des Körper in sich vereinigt. Fig. 621 veranschaulicht die Stellung der beiden Körper im Augenblicke der ersten Berührung der beiden Federn, Fig. 622 die Stellung im Augenblicke der stärksten Zusammendrückung der Federn, den Zeitpunkt, in welchem die Geschwindigkeiten der beiden Massen einander gegenseitig ausgeglichen haben, und Fig. 623

Fig. 621. Fig. 622. Fig. 623.



die Stellung der beiden Körper am Ende des Stosses oder den Zeitpunkt, in welchem die Federn ihre ursprünglichen Formen wieder angenommen haben. Der Schwerpunkt des ganzen Systems geht mit unveränderter Geschwindigkeit u aus der ersten durch die zweite in die dritte Stellung über, während der Schwerpunkt der Masse M in Bezug auf denselben eine relative Bewegung ausführt, bestehend während des Ueberganges aus der ersten in die zweite Stellung in einer Annäherung an den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, während des Ueberganges aus der zweiten in die dritte Stellung in einer ebenso grossen Wieder-Entfernung von demselben. Nach Cap. XXIV wird bei dieser relativen Bewegung von dem Drucke D während der ersten Periode eine negative mechanische Arbeit verrichtet von derselben absoluten Grösse, wie die während der Wiederausdehnung der Federn verrichtete positive mechanische Arbeit. Bei diesem idealen — in der

Wirklichkeit nur annäherungsweise darstellbaren Falle — würden also die Voraussetzungen, aus denen die obigen beiden Gleichungen abgeleitet wurden, in aller Strenge erfüllt sein; und je mehr bei dem Zusammenstosse zweier beliebigen elastischen Körper die wirklichen Umstände diesem idealen Falle sich annähern, um so genauer werden die Gleichungen 806) und 807) als Gleichungen des sogenannten vollkommen „elastischen Stosses" die wirklich hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen darstellen.

Unelastischer Stoss.

Denkt man sich in dem Augenblicke der grössten Zusammendrückung der Federn bei der Stellung Fig. **622** plötzlich auf irgend eine Weise (z. B. durch einspringende Widerhaken) die Wiederausdehnung der Feder gänzlich verhindert, so findet man, dass in diesem Falle nach jenem Zeitpunkte kein Druck zwischen den beiden Körpern mehr stattfinden, und in Folge dessen auch keine weitere Geschwindigkeits-Aenderung mehr hervorgebracht werden würde. Die beiden Körper würden nach dem Stosse ihre Bewegungen mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u (Gleichung 797) gleichförmig fortsetzen, und für diesen Fall würde demnach der Coefficient $\varepsilon = 0$ zu setzen sein.

Auf solche Art kann man sich den idealen — in der Wirklichkeit ebenfalls nur annäherungsweise darstellbaren — Fall des sogenannten „unelastischen Stosses" veranschaulichen. Je mehr bei der in Folge des Zusammenstosses der beiden Körper eintretenden Zusammendrückung die Elasticitäts-Grenzen überschritten werden — was bei Körpern von geringer Elasticität, wie z. B. Blei, Wachs, schon bei geringer Intensität des Stosses, dagegen bei sehr elastischen Körpern, wie z. B. Kautschuk, Elfenbein, erst bei grosser Intensität des Stosses eintreten wird — je mehr also die wirklichen Umstände von der Art sind, dass die durch den Stoss hervorgebrachten Zusammendrückungen als bleibende Formänderungen anzusehen sind: um so genauer werden die Gleichungen:

$$808)\quad V - C = \frac{V - v}{1 + \frac{M}{m}}, \qquad 809)\quad c - v = \frac{V - v}{1 + \frac{m}{M}},$$

welche nach Substitution des Werthes $\varepsilon = 0$ aus den allgemeinen Gleichungen 804) und 805) sich ergeben, die wirklich hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen darstellen.

Es ergiebt sich hieraus, dass unter gewöhnlichen Umständen der Werth des Coefficienten ε zwischen den Grenzwerthen Null und Eins variirt; dass derselbe dem Grenzwerthe Null um so mehr sich nähert, je grösser die Geschwindigkeits-Differenz $V - v$ und je geringer die Elasticität der Körper ist; dem Grenzwerthe Eins dagegen um so mehr, je kleiner die Geschwindigkeits-Differenz $V - v$, und je grösser die Elasticität der beiden Körper ist. Es kommt also in den speciellen Fällen bei der Bestimmung des Coefficienten ε nicht allein die physikalische Beschaffenheit der beiden stossenden Körper, sondern wesentlich auch die Grösse der Geschwindigkeits-Differenz $V - v$ in Betracht. Auch bei sehr elastischen Körpern kann der Coefficient ε dem Grenzwerthe Null sich nähern, wenn die Geschwindigkeits-Differenz $V - v$ sehr gross war; und auch bei sehr unelastischen Körpern kann der Coefficient ε dem Grenzwerthe Eins sich nähern, wenn die Geschwindigkeits-Differenz $V - v$ der beiden Körper vor dem Stosse eine sehr geringe Grösse hatte.

In gewissen besonderen Fällen kann der Coefficient ε auch einen Werth annehmen, welcher grösser ist als Eins. Angenommen: die Federn, welche die Eigenschaft der Elasticität veranschaulichten, hätten vor dem Stosse schon im gespannten (und zwar zusammengedrückten) Zustande sich befunden (Fig. 622), und wären durch irgend welche Vorrichtungen — etwa durch eingeschobene Haken — in diesem gespannten Zustande künstlich so lange erhalten, bis durch den Stoss diese Hindernisse der Wiederausdehnnng beseitigt, und die Spannkräfte der beiden Federn gleichsam wieder in Freiheit gesetzt wurden. In diesem Falle würde unmittelbar nach dem Augenblicke der ersten Berührung die Zusammendrückung der Federn zunächst noch um eine gewisse Grösse gesteigert werden. Nach dem Eintritt des Maximums der Zusammendrückung würde alsdann die Wiederausdehnung beginnen und diese während der zweiten Periode erfolgende Wiederausdehnung würde über den ursprünglichen Spannungszustand hinaus sich fortsetzen, also mehr betragen, als die während der ersten Periode erfolgte Steigerung der Zusammendrückung. In Folge dessen würden die in der zweiten Periode hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen grösser sein als die in der ersten Periode hervorgebrachten; nach Gleichung 801) würde also in diesem Falle der Coefficient ε grösser als Eins sein.

Diesem Falle — welchen man den des „überelastischen“ Stosses nennen könnte — wäre zu vergleichen der mit „Explosion“ verbundene Stoss. Denkt man sich die unmittelbar durch den Stoss getroffenen Theile der Körper aus Substanzen bestehend, welche (wie z. B. Knallsilber) beim Stosse explodiren, so findet man leicht, dass in derartigen Fällen der Coefficient ε jeden beliebigen Werth zwischen 0 und ∞ annehmen kann, letzteren z. B. dann, wenn die anfänglichen Geschwindigkeiten der beiden Körper einander gleich waren, in welchem Falle die Nenner der Brüche in Gleichung 801) gleich Null werden.

Durch den Stoss wird im Allgemeinen ein Verlust an lebendiger Kraft verursacht. Man findet diesen Verlust $\mathfrak{V}$, indem man die lebendige Kraft $\frac{MC^2}{2} + \frac{mc^2}{2}$, welche die beiden Massen zusammengenommen nach dem Stosse noch besitzen, subtrahirt von der lebendigen Kraft $\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$, welche vor dem Stosse in den beiden Körpern schon enthalten war, also aus der Gleichung:

$$810)\quad \mathfrak{V} = \left(\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right) - \left(\frac{MC^2}{2} + \frac{mc^2}{2}\right),$$

welche nach Substitution der aus den Gleichungen 804) und 805) zu entnehmenden Werthe von C und c die Form annimmt:

$$811)\quad \mathfrak{V} = \frac{(1-\varepsilon^2)\,Mm\,(V-v)^2}{2\,(M+m)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Verlust bei dem vollkommen elastischen Stosse gleich Null sein würde, weil für diesen Fall $\varepsilon = 1$ zu setzen wäre. Bei dem vollkommen unelastischen Stosse dagegen, für welchen $\varepsilon = 0$ zu setzen ist, hat der durch den Stoss verursachte Verlust an lebendiger Kraft die Grösse:

$$812)\quad \mathfrak{V} = \left(\frac{Mm}{M+m}\right)\frac{(V-v)^2}{2}.$$

§ 155.

Unelastischer Stoss.

Die in den vorigen beiden Paragraphen gefundenen Gleichungen gelten auch für den Fall, in welchem die Geschwindigkeit v der gestossenen Masse m gleich Null oder negativ ist. Wenn eine ruhende Masse m durch eine mit der Geschwindigkeit V sich bewegende Masse M einen Stoss erhält, und die Umstände annähernd so beschaffen sind, dass die Gleichungen für den unelastischen Stoss angewendet werden dürfen, so ergiebt sich für die Geschwindigkeit u, mit welcher die beiden Körper nach dem Stosse sich weiter bewegen, nach Gleichung 797) der Werth:

$$813)\quad u = \frac{MV}{M+m}$$

und der durch den Stoss verursachte Verlust an lebendiger Kraft hat nach Gleichung 812) die Grösse:

$$814)\quad \mathfrak{V} = \frac{MV^2}{2}\left(\frac{m}{M+m}\right).$$

Vor dem Stosse hatten die beiden Massen zusammengenommen die lebendige Kraft $\frac{MV^2}{2} + 0$. Diese lebendige Kraft wird durch den Stoss gleichsam in zwei Theile zerlegt: der eine Theil $\mathfrak{V}$ verwandelt sich in diejenige mechanische Arbeit, welche theils auf das Hervorbringen bleibender Formänderungen, theils auf das Erzeugen von Schall- und Wärmeschwingungen verwendet wird, und geht für die fortschreitende Bewegung dauernd verloren. Der andere Theil $(M + m)\frac{u^2}{2}$ hat die Grösse:

$$815) \quad \mathfrak{R} = \frac{MV^2}{2}\left(\frac{M}{M+m}\right)$$

und bildet den übrig gebliebenen Rest von lebendiger Kraft, mit welcher nach dem Stosse die beiden Massen ihre fortschreitende Bewegung fortsetzen.

In dem Falle, wenn unmittelbar nach dem Stosse der weiteren Fortbewegung der beiden Massen ein Hinderniss sich entgegenstellt (Fig. 624), wird die übrig gebliebene lebendige Kraft $\mathfrak{R}$ ebenfalls in mechanische Arbeit verwandelt, nämlich in diejenige, welche auf das Ueberwinden des von jenem Hindernisse herrührenden Widerstandes W verwendet wird. Die Strecke s, welche die beiden Körper diesem Widerstande entgegen noch zurücklegen bis zu dem Augenblicke, in welchem ihre Geschwindigkeit Null wird, ist nach dem Principe der lebendigen Kraft zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 624.

$$816) \quad \frac{MV^2}{2}\left(\frac{M}{M+m}\right) = W \cdot s.$$

Von der ursprünglich vorhanden gewesenen lebendigen Kraft $\frac{MV^2}{2}$ wird ein um so grösserer Bruchtheil für diesen Zweck disponibel bleiben, je grösser das Verhältniss $\frac{M}{M+m}$ ist.

In allen solchen Fällen also, wo man sich der Wirkung des Stosses bedient, um mittelst des nach dem Stosse noch übrig ge-

bliebenen Theiles der lebendigen Kraft irgend eine Nutzarbeit zu verrichten — wie z. B. beim Einrammen von Pfählen, beim Eintreiben eines Keiles, eines Nagels etc. — ist es vortheilhaft, das Verhältniss der stossenden Masse zur gestossenen Masse so gross als möglich zu machen.

Wenn man die Massen durch ihre Gewichte ausdrückt, indem man $Mg = Q$ und $mg = q$ setzt, so ist $\frac{M}{M+m} = \frac{Q}{Q+q}$ und $\frac{MV^2}{2} = Q\frac{V^2}{2g}$ oder, wenn die der Geschwindigkeit V entsprechende Fallhöhe $\frac{V^2}{2g} = H$ gesetzt wird, $\frac{MV^2}{2} = QH$ zu substituiren, und die obigen Gleichungen nehmen alsdann die Formen an:

817) $\mathfrak{B} = QH\left(\frac{q}{Q+q}\right)$ und 818) $\mathfrak{R} = QH\left(\frac{Q}{Q+q}\right) = W.s.$

Aus der letzteren Gleichung kann man die Grösse des Widerstandes W berechnen, welcher längs einer bestimmten Strecke s überwunden wird, sobald diese letztere bekannt ist.

Bei dem Zusammentreffen eines mit der Geschwindigkeit $V = 5^m,6$ gegen einen Nagel vom Gewichte $q = 0,1$ Kil. stossenden Hammers vom Gewichte $Q = 1,5$ Kil. zerlegt sich die lebendige Kraft:

$$\frac{MV^2}{2} = QH = 1,5 \cdot \frac{5,6^2}{2\,.\,9,8} = 2^{mk},4,$$

welche vor dem Stosse vorhanden war, in die beiden Theile:

$$\mathfrak{B} = 2,4\left(\frac{0,1}{1,5+0,1}\right) = 0^{mk},15 \quad \text{und} \quad \mathfrak{R} = 2,4 \cdot \frac{1,5}{1,5+0,1} = 2^{mk},25.$$

Der erstere Theil, welcher eine mechanische Arbeit von 0,15 Meterkilogrammen repräsentirt, wird auf Zerdrückung des Nagelkopfes, Erzeugung von Schall- und Wärme-Schwingungen verwendet, und der Rest von 2,25 Meterkilogrammen auf das Eintreiben des Nagels in die Wand (Fig. **624**) oder auf das Ueberwinden des Widerstandes W, welcher dem Eindringen des Nagels entgegenwirkt. Wenn als Tiefe des Eindringens $s = 0^m,005$ beobachtet wurde, so ergiebt sich für die mittlere Grösse des Widerstandes W die Gleichung:

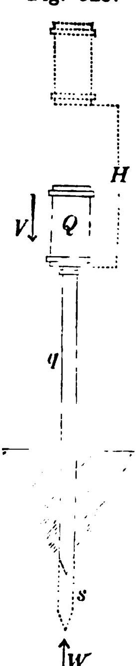
$$W\,.\,0,005 = 2,25, \quad \text{oder:} \quad W = 450 \text{ Kil.}$$

Wäre das Gewicht des Nagels $q = 0,5$ Kil. (statt 0,1 Kil.) gewesen, so würde der Verlust $\mathfrak{B} = \frac{1}{4} \cdot 2,4 = 0,6$ Meterkilogramm, und die Nutzarbeit nur 1,8 Meterkilogramm betragen haben.

Wenn der Stoss in der Richtung der Schwere erfolgt, wie z. B. bei dem Stosse des Rammklotzes gegen einen Pfahl (Fig. **625**), so wird die nach dem Stosse von der Schwerkraft verrichtete mechanische Arbeit $(Q+q)\,s$ ebenfalls auf das Ueberwinden des

Widerstandes W verwendet, und der letztere ist zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 625.



$$819) \quad QH\left(\frac{Q}{Q+q}\right) + (Q+q)\,s = W\,.\,s.$$

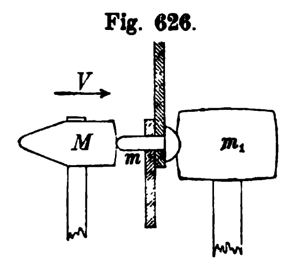
Setzt man z. B. $Q = 1200$ Kil., $q = 800$ Kil., $V = 7^m$ (also $H = \frac{7^2}{2\,.\,9{,}8} = 2^m{,}5$), und $s = 0^m{,}045$, so erhält man die Gleichung:

$$1200\,.\,2{,}5\,.\,\frac{1200}{2000} + 2000\,.\,0{,}045 = W\,.\,0{,}045, \text{ oder: } W = 42\,000.$$

Unter Voraussetzung eines vollkommen unelastischen Stosses würde sich ergeben, dass von der ganzen vor dem Stosse vorhanden gewesenen lebendigen Kraft $QH = 3000$ Meterkilogrammen in diesem Falle vier Zehntel oder 1200^{mk} auf Zusammendrückung des Pfahlkopfes, und der Rest von sechs Zehnteln oder 1800^{mk} als Nutzarbeit auf das Einrammmen des Pfahles verwendet wurden.

Im Gegensatze zu den beiden vorigen Fällen, in welchen von der ganzen lebendigen Kraft nur der Theil $\mathfrak{N}$ als Nutzarbeit auf den beabsichtigten Zweck wirklich verwendet wurde, und der für die fortschreitende Bewegung verloren gehende Theil $\mathfrak{V}$ zugleich eine nachtheilige Wirkung ausübte, giebt es andere Fälle, in denen umgekehrt gerade die durch den Stoss vernichtete lebendige Kraft in Nutzarbeit sich verwandelt, und der übrig bleibende Rest $\mathfrak{N}$ die schädliche Wirkung bildet. In allen solchen Fällen, wo es beabsichtigt wird, durch die Wirkung des Stosses dem gestossenen Körper eine bleibende Formänderung zu ertheilen, ist es vortheilhaft, das Verhältniss der gestossenen Masse zu der stossenden Masse so gross als möglich zu machen.

Fig. 626.

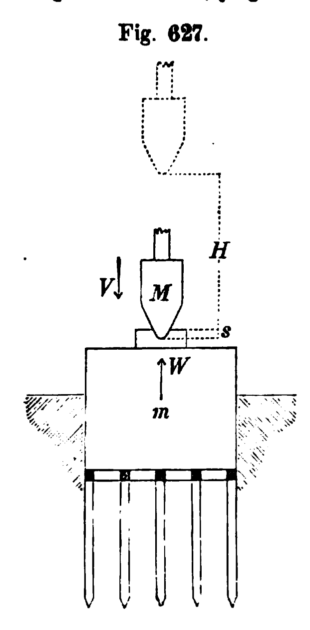


Wenn z. B. durch den Schlag des Niethammers das aus dem Nietloche vorragende Nietbolzen-Ende zu einem Nietkopfe umgeformt werden soll (Fig. 626), so ist es von der ganzen lebendigen Kraft des Hammers nur der durch den Stoss vernichtete Theil $\mathfrak{V}$ (Gleichung 814), welcher als Nutzarbeit auf diese Formänderung wirklich verwendet wird, während der übrig bleibende Rest $\mathfrak{N}$ eine in diesem Falle gar nicht beabsichtigte gemeinschaftliche Bewegung der beiden Massen nach dem Stosse erzeugt und für die Nutzwirkung verloren bleibt. Die letz-

tere kann man dadurch erhöhen, dass man mit der unmittelbar durch den Stoss getroffenen Masse m des Nietbolzens eine andere Masse m_1 in Berührung bringt (durch Vorhalten eines zweiten Hammers), insofern dadurch die gestossene Masse nunmehr die Grösse $m + m_1$, und in Folge dessen die Grösse $\mathfrak{B}$ einen grösseren Werth erhält.

Auf gleiche Weise ergiebt sich, dass bei dem Stosse eines Dampfhammers gegen das auf dem Ambos liegende glühende Eisenstück der auf Formänderung des letzteren verwendete Bruchtheil der lebendigen Kraft des Hammers um so grösser ausfällt, je grösser die Masse des Ambos im Verhältniss zur Masse des Hammers ist (Fig. 627). Wenn z. B. das Gewicht des Hammers $Mg = Q = 8000$ Kil., und die Geschwindigkeit desselben $V = 7^m$ ist (entsprechend der Fallhöhe $H = 2^m,5$), so hat die lebendige Kraft des Hammers vor dem Stosse die Grösse $\frac{MV^2}{2} = QH = 8000 \cdot 2{,}5 = 20\,000$ Meterkilogramm. Wenn ferner das Gewicht des Ambos (das Gewicht des Schmiedestückes mit eingerechnet) $mg = q = 56\,000$ Kil. ist, so wird von jener lebendigen Kraft der Theil:

Fig. 627.



$$\mathfrak{B} = 20\,000 \cdot \frac{56\,000}{64\,000} = 17\,500 \text{ Meterkilogramm}$$

auf Zusammendrücken des glühenden Eisenstückes (also nützlich) verwendet, während der Rest:

$$\mathfrak{R} = 20\,000 \cdot \frac{8000}{64\,000} = 2500 \text{ Meterkilogramm}$$

auf das Einrammen des Ambos, auf Erschütterung der Fundamente des Gebäudes etc. (also auf nachtheilige Weise) verwendet wird.

Die mittlere Grösse des auf das Schmiedestück hervorgebrachten Druckes kann auf ähnliche Weise wie bei der mit Bezug auf Fig. 625 berechneten Aufgabe bestimmt werden, sobald die Tiefe des Eindringens s bekannt ist. Wenn letztere klein ist im Verhältniss zu H, so kann die Arbeit, welche die Schwerkraft während des Eindringens des Hammers verrichtet, als vergleichsweise klein vernachlässigt, und der Widerstand W berechnet werden aus der Gleichung:

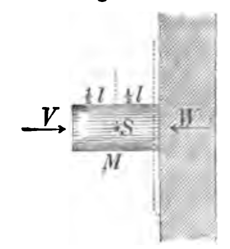
$$820) \quad \mathfrak{B} = W \cdot s.$$

Wenn also der Hammer bei dem Stosse z. B. um $0^m,02$ in das Eisen eindrang, so betrug der Druck während des Stosses durchschnittlich $\frac{17\,500}{0{,}02} = 875\,000$ Kil.

Je grösser die gestossene Masse m im Verhältniss zur stossenden Masse M ist, um so mehr nähert sich das Verhältniss $\frac{m}{M+m}$ dem Grenzwerthe Eins und der Stossverlust $\mathfrak{B}$ (Gleichung 814) dem Werthe $\frac{MV^2}{2} = QH$. Bei dem Stosse einer mit sehr grosser Geschwindigkeit V sich bewegenden wenig elastischen Masse M

gegen eine ruhende wegen ihrer grossen Masse m unbeweglich anzusehende sehr feste Wand wird demnach nahezu die ganze lebendige Kraft $\frac{MV^2}{2} = QH$ des stossenden Körpers auf Formänderung desselben verwendet. Wenn der stossende Körper ein Cylinder von der Länge l ist, so legt der Schwerpunkt desselben, während der Cylinder an der Wand sich platt drückt (Fig. **628**), noch nahezu die Länge $\frac{l}{2}$ zurück, und da der Schwerpunkt S sich so bewegt, wie wenn der Widerstand der Wand in ihm seinen Angriffspunkt hätte, so ist es die von dem durchschnittlichen Widerstande W verrichtete mechanische Arbeit $- W \cdot \frac{l}{2}$, durch welche die lebendige Kraft QH vernichtet wird. Die mittlere Grösse des Widerstandes W ist also zu bestimmen aus der Gleichung:

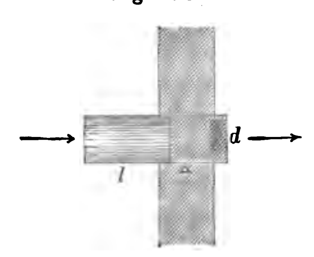
Fig. 628.



$$821)\quad W \cdot \frac{l}{2} = QH, \quad \text{oder:} \quad W = \frac{2QH}{l}.$$

Angenommen: der Abscheerungs-Widerstand, welcher dem Durchlochen der Wand entgegenwirkt oder dem Durchstossen eines cylindrischen Loches von gleichem Durchmesser mit dem stossenden Cylinder, wäre kleiner als der in obiger Gleichung für die erforderliche Grösse des Widerstandes W gefundene Werth: so würde der stossende Cylinder — anstatt an der Wand sich platt zu drücken — das vor ihm liegende cylindrische Stück der Wand vor sich herschieben und gemeinschaftlich mit demselben seine Bewegung jenseits der Wand fortsetzen (Fig. **629**). Die Dicke Δ, welche die Wand mindestens haben müsste, wenn dieses Durchlochen nicht stattfinden soll, kann man annäherungsweise dadurch bestimmen, dass man jenen Widerstand W dem Abscheerungswiderstande gleich setzt. Die Cylindermantelfläche, längs welcher die Abscheerung stattfinden würde, hat nach Fig. **629** den Inhalt $d\pi\Delta$, und wenn der Abscheerungs-Festigkeits-Coefficient mit μ bezeichnet wird, so ist der Abscheerungs-Widerstand:

Fig. 629.



$$822)\quad W = \mu \cdot d\pi\Delta.$$

Aus der Gleichsetzung der beiden Werthe von W ergiebt sich für die erforderliche Wandstärke Δ der Werth:

$$823)\quad \Delta = \frac{2\,Q\,H}{\mu\,\pi\,d\,l}.$$

Wenn mit γ das Gewicht eines Cubikmillimeters der stossenden Masse bezeichnet wird, so ist hierin $Q = \gamma \,.\, \frac{\pi}{4}\, d^2 l$ zu setzen, und man erhält die Gleichung:

$$824)\quad \Delta = \frac{H}{2} \cdot \frac{\gamma}{\mu} \cdot d,$$

welche als eine rohe Annäherungsformel für die Bestimmung der erforderlichen Stärke eines Schiffspanzers gelten kann.

Wenn z. B. das cylindrische Geschoss und der Schiffspanzer beide aus Schmiedeeisen beständen, so wäre (für Millimetermaass) $\frac{\gamma}{\mu} = \frac{0{,}000\,007\,6}{30} = 0{,}000\,000\,253\,3$ zu setzen, und wenn die Geschwindigkeit $V = 400$ gesetzt wird, so ist $H = \frac{V^2}{2g} = 8155^m = 8\,155\,000$ Millimeter zu substituiren, und man erhält für Δ die Gleichung:

$$\Delta = 1{,}033\, d,$$

aus welcher sich ergiebt, dass die Dicke des Panzers mindestens gleich dem Durchmesser des cylindrischen Geschosses sein muss, wenn bei der obigen Geschwindigkeit keine Durchbohrung des Panzers stattfinden soll.

§ 156.

Elastischer Stoss.

Je kleiner die Geschwindigkeits-Differenz der beiden Körper vor dem Stosse war, um so mehr ist es zulässig, die aus den Gleichungen 806) und 807) sich ergebenden Werthe:

$$825)\quad C = V - \frac{2\,(V - v)}{1 + \frac{M}{m}}, \qquad 826)\quad c = v + \frac{2\,(V - v)}{1 + \frac{m}{M}}$$

als die wirklichen Grössen der Geschwindigkeiten nach dem Stosse zu betrachten, namentlich, wenn zugleich das Material der beiden Körper die Eigenschaft der Elasticität in hohem Grade besitzt, wie z. B. Kautschuk, Elfenbein, gehärteter Stahl etc.

Wenn $M = m$ ist, so wird $C = v$ und $c = V$, d. h. in diesem Fall tauschen die Körper ihre Geschwindigkeiten gegen einander aus, in der Weise, dass jeder von beiden nach dem Stosse die Bewegung des andern fortsetzt. Wenn zugleich v negativ war, d. h. wenn die Körper von entgegengesetzten Seiten kommend

gegen einander stiessen, so kehrt ein jeder von der Stelle des Zusammenstosses wieder zurück, und zwar mit derjenigen Geschwindigkeit, welche der andere vor dem Stosse hatte.

Für den speciellen Fall, in welchem $v = 0$ ist, ergeben sich, wenn abkürzungsweise das Massenverhältniss $\frac{M}{m} = n$ gesetzt wird, aus obigen allgemeinen Gleichungen die Werthe:

$$827)\quad C_1 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right) V, \qquad 828)\quad c_1 = \left(\frac{2n}{n+1}\right) V.$$

Wenn die gestossene Masse $m = \frac{M}{n}$ unmittelbar nach Empfang des Stosses mit der erlangten Geschwindigkeit c_1 ihrerseits wiederum gegen eine ruhende Masse stösst, welche in dem gleichen Verhältniss $1 : n$ zu ihr steht (also die Grösse $\frac{m}{n}$ hat), so wird diese dritte Masse die Geschwindigkeit

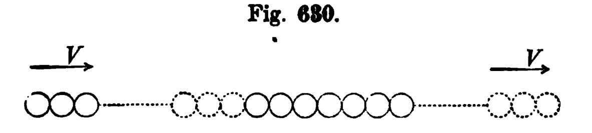
$$c_2 = \left(\frac{2n}{n+1}\right) c_1 = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 V$$

erhalten. Wenn alsdann in gleicher Weise die dritte Masse wieder gegen eine ruhende vierte Masse, die vierte gegen die fünfte stösst etc., und bei jedem dieser auf einander folgenden Stösse das Verhältniss der gestossenen und stossenden Masse gleich $1 : n$ ist, so wird nach dem r-ten Stosse die zuletzt gestossene Masse die Geschwindigkeit erhalten:

$$829)\quad c_r = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^r V.$$

Für $n = 1$ wird $C_1 = 0$ und $c_1 = c_r = V$; d, h. wenn gegen das eine Ende einer ruhenden Reihe von elastischen Kugeln, deren Massen einander gleich sind, eine mit der Geschwindigkeit V sich bewegende Kugel von gleicher Beschaffenheit stösst, so wird die am jenseitigen Ende der Reihe befindliche Kugel die Geschwindigkeit V erhalten, während alle übrigen Kugeln nach dem Stosse im Ruhezustande sich befinden. Wenn der ersten stossenden Kugel eine zweite, und dieser wiederum eine dritte mit gleicher Geschwindigkeit folgt, so wird derselbe Vorgang zum zweiten und dritten Male eintreten. Wenn also gegen das eine Ende der ruhenden Kugelreihe eine mit der Geschwindigkeit V sich bewegende Kugelreihe stösst, so wird am jenseitigen Ende der ersteren Reihe eine Gruppe von gleicher Anzahl mit der stossenden Kugelreihe von den übrigen sich trennen und mit der Geschwindigkeit V sich fortbewegen, während alle übrigen Kugeln nach dem Stosse im Ruhezustande bleiben (Fig. 680).

Fig. 680.



Setzt man $n = 3$ und $r = 20$, so wird nach Gleichung 829) $c_{20} = 1{,}5^{20} \, . \, V = 3325 \, . \, V$; d. h. wenn eine ruhende Reihe von 20 Kugeln, deren jede zu der nächstfolgenden in dem Massen-Verhältniss $1 : \frac{1}{3}$ steht, an dem Ende, wo die grösste Kugel sich befindet, einen Stoss erhält durch eine mit der Geschwindigkeit $V = 1^m$ sich bewegende Kugel, welche zu jener grössten wiederum in dem Massen-Verhältniss $1 : \frac{1}{3}$ steht, so würde — falls die Voraussetzungen, unter welchen die Gleichungen des elastischen Stosses angewendet werden dürfen, hier in aller Strenge erfüllt wären — die am jenseitigen Ende der Reihe befindliche kleinste Kugel durch die längs der Reihe sich fortpflanzende Stosswirkung eine Geschwindigkeit von 3325 Metern erhalten, während die übrigen Kugeln resp. mit den Geschwindigkeiten $0^m{,}5$, $0^m{,}75$, $1^m{,}125 \ldots$ $1108^m{,}33 \ldots$ nach dem Stosse sich weiter bewegen.

Wenn $n = 0$ ist, so wird $C_1 = - V$ und $c_1 = 0$, d. h. wenn eine elastische Kugel gegen eine unendlich grosse ruhende Masse (oder eine feste Wand) stösst, so hat die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stosse mit ihrer anfänglichen Geschwindigkeit gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung, während die gestossene Masse im Ruhezustande bleibt. Wenn dagegen $n = \infty$ ist, so wird $C_1 = V$ und $c_1 = 2 \, V$, d. h. je kleiner die gestossene Masse im Verhältniss zur stossenden ist, um so mehr ist es gestattet anzunehmen, dass die Geschwindigkeit der stossenden Masse durch den Stoss nicht geändert wird, und dass die vorher ruhende Masse durch den Stoss eine Geschwindigkeit erhält, welche doppelt so gross ist als die der stossenden Masse vor dem Stosse.

§ 157.

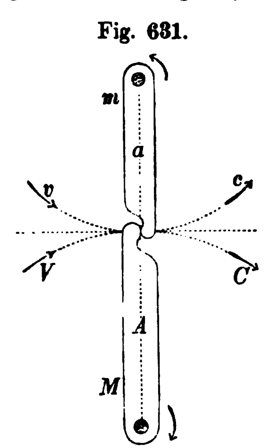
Stoss rotirender Körper.

(Ballistisches Pendel.)

Die am Schlusse des § 153 gefundenen allgemeinen Gleichungen 804) und 805) können auch benutzt werden zur Bestimmung der Geschwindigkeits-Aenderungen, welche zwei um parallele unbewegliche Achsen sich drehende Körper einander gegenseitig durch den Stoss ertheilen, sobald mit den Buchstaben V, v und C, c statt der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte die den Drehbewegungen entsprechenden Peripherie-Geschwindigkeiten der Stosspunkte resp. vor und nach dem Stosse bezeichnet werden, und statt der wirklichen Massen M, m resp. die auf die Stosspunkte reducirten Massen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}$ substituirt werden (§ 109). Vorausgesetzt ist hierbei, dass der Stoss wiederum ein gerader Stoss ist, d. h. dass im Augenblicke des Zusammentreffens die Bewegungsrichtungen der beiden Stosspunkte rechtwinkelig zu der Berührungsebene gerichtet sind (Fig. 631). Es ist also für diesen Fall nur nöthig, aus den Trägheits-Momenten T, t der beiden

Massen M, m in Bezug auf ihre Drehachsen (nach den in § 109 gefundenen Regeln), die resp. auf die Halbmesser A und a reducirten Massen $\mathfrak{M} = \frac{T}{A^2}$ und $\mathfrak{m} = \frac{t}{a^2}$ zu berechnen, um alsdann nach Substitution dieser Werthe resp. statt M, m die obigen allgemeinen Gleichungen nebst allen in den vorigen Paragraphen aus denselben für specielle Fälle abgeleiteten Gleichungen auch auf den Stoss rotirender Massen anwenden zu können.

Fig. 631.



So z. B. würde man nach Gleichung 814) den beim Stosse einer Daumen-Welle gegen einen Stirnhammer stattfindenden Verlust an lebendiger Kraft unter Voraussetzung eines unelastischen Stosses zu berechnen haben aus der Gleichung:

$$830)\quad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{M} V^2}{2} \left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{M} + \mathfrak{m}} \right),$$

in welcher $\mathfrak{M}$ die auf den Stosspunkt reducirte Masse der Daumen-Welle (nebst Zubehör) und $\mathfrak{m}$ die auf den Stosspunkt reducirte Masse des Hammers bedeutet. Die aus Gleichung 814) gezogene Folgerung: dass der Stossverlust um so kleiner ist, je grösser das Verhältniss der stossenden Masse zur gestossenen ist, findet auch auf den vorliegenden Fall Anwendung, und erklärt es sich daraus, dass es vortheilhaft ist, durch Hinzufügung eines an der Daumen-Welle anzubringenden Schwungrades das Trägheits-Moment derselben zu vergrössern.

Ebenso können die allgemeinen Gleichungen angewendet werden auf den Fall, in welchem nur eine von den beiden Massen z. B. die Masse m an einer unbeweglichen Drehachse befestigt ist, für welchen Fall jenen Gleichungen die Form zu geben sein würde:

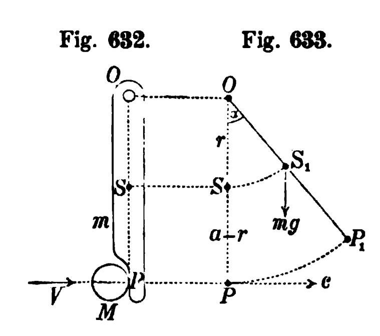
$$831)\quad V - C = \frac{(1+\varepsilon)(V-v)}{1 + \frac{M}{\mathfrak{m}}}, \qquad 832)\quad c - v = \frac{(1+\varepsilon)(V-v)}{1 + \frac{\mathfrak{m}}{M}}.$$

Wenn man hierin $v = 0$ und ausserdem $\varepsilon = 0$ setzt, den Stoss also als einen unelastischen behandelt, so erhält man die Gleichung:

$$833)\quad C = c = \frac{V}{1 + \frac{\mathfrak{m}}{M}},$$

nach welcher man die Bewegung berechnen kann, welche ein vor dem Stosse im Ruhezustande hängendes Pendel von der Masse m ausführt, wenn dasselbe durch den Stoss einer fortschreitenden

Masse M in Schwingungen versetzt wird (Fig. 632). Die Geschwindigkeit c ist die Anfangsgeschwindigkeit, mit welcher der Stosspunkt P seine Bewegung längs des Schwingungsbogens $\widehat{PP_1}$ beginnt, und die lebendige Kraft des Pendels hat im Anfange der Bewegung die Grösse $\frac{\mathfrak{m} c^2}{2}$. Wenn α der Winkel ist, nach dessen Zurücklegung die Drehgeschwindigkeit des Pendels Null wird (Fig. 633) und r der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse, so ist nach dem Principe der lebendigen Kraft (Gleichung 508) zu setzen:



$$834)\quad 0 - \frac{\mathfrak{m} c^2}{2} = - m g r (1 - \cos \alpha), \text{ oder:}$$

$$c = \sqrt{2 \frac{m}{\mathfrak{m}} g r (1 - \cos \alpha)}.$$

Wenn man diesen Werth für c in Gleichung 833) substituirt und dieselbe alsdann für V auflöst, so erhält man die Gleichung:

$$835)\quad V = \left(1 + \frac{\mathfrak{m}}{M}\right) \sqrt{2 \frac{m}{\mathfrak{m}} g r (1 - \cos \alpha)},$$

welche zur Berechnung der Geschwindigkeit V einer Kanonenkugel benutzt werden kann, sobald der durch den Stoss derselben gegen das ballistische Pendel hervorgebrachte Elongationswinkel α durch directe Beobachtung gefunden wurde.

Die auf den Stosspunkt reducirte Masse „$\mathfrak{m}$" kann ebenfalls durch Beobachtungen bestimmt werden. Wenn man das Pendel kleine Schwingungen ausführen lässt und die Dauer τ einer solchen Schwingung beobachtet, so findet man zunächst nach Gleichung 93) als Länge des einfachen Pendels von gleicher Schwingungsdauer $l = \frac{g \tau^2}{\pi^2}$. Hierauf kann man aus Gleichung 522), welche für diesen Fall die Form annimmt $l = \frac{\mathfrak{m} a^2}{m r}$, die reducirte Masse $\mathfrak{m} = \frac{m r l}{a^2}$ berechnen und erhält nach Substitution dieses Werthes in Gleichung 835):

$$836)\quad V = \left(\frac{a}{l} + \frac{m}{M} \frac{r}{a}\right) \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)}.$$

Wenn z. B. $\tau = 1{,}57$ Sec. gefunden wurde, so ist $l = 2^m{,}45$, wenn ferner $r = 2^m$, $a = l = 2^m{,}45$ (also $\frac{m}{\mathfrak{m}} = 1{,}225$), $\frac{m}{M} = 400$ und $\alpha = 20^0$ beobachtet wurde, so ergiebt sich aus Gleichung 836), dass die Geschwindigkeit der Kanonenkugel $V = 557^m{,}67$ war.

§ 158.
Explosionen.

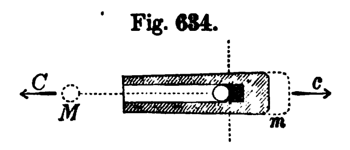
Die Geschwindigkeit u des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der beiden Massen erleidet durch den Stoss keine Aenderung (Gleichung 796); wenn also dieselbe vor dem Stosse gleich Null war, so wird dies auch nach dem Stosse noch der Fall sein, und nach Gleichung 800) ist in diesem Falle:

$$837)\quad \frac{-C}{c} = \frac{m}{M} = \frac{V}{-v},$$

d. h. sowohl vor als nach dem Stosse haben die Geschwindigkeiten der beiden Körper entgegengesetzte Richtungen und ihr Verhältniss ist beide Male gleich dem umgekehrten Massenverhältniss. Diese Gleichung bleibt auch dann noch gültig, wenn die Geschwindigkeiten V, v beide gleich Null waren und die Geschwindigkeiten C, c durch eine Explosion hervorgebracht wurden. Wenn in solchem Falle von den beiden letzteren die eine bekannt ist, so kann die andere mittelst der obigen Gleichung berechnet werden.

Eine geladene Kanone (Fig. 634) befindet sich im Momente des Abfeuerns genau in derselben Situation, in welcher das in Fig. 622 dargestellte Massen-System im Augenblicke der stärksten Zusammendrückung der Feder sich befinden würde, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten V, v in Fig. 621 der obigen Gleichung entsprochen hätten. Wenn die Masse des Pulvers sehr klein ist im Vergleich zur Masse des Geschosses, so ist die Wirkung des Pulvers im Augenblicke der Entzündung zu vergleichen mit der Wirkung einer masselosen Feder, deren vorher auf irgend eine Art gehemmte Spannkraft in jenem Augenblicke plötzlich frei wird. Nach Gleichung 837) kann daher die Geschwindigkeit des „Rücklaufes" der Kanone berechnet werden, sobald die der Kugel ertheilte Geschwindigkeit C und das Verhältniss $\frac{M}{m}$ der beiden Massen bekannt ist. Wenn z. B. $C = 400^m$ und $m = 200\,M$ ist, so hat die Geschwindigkeit des Rücklaufes die Grösse $c = \frac{400}{200} = 2^m$. Die lebendigen Kräfte der beiden Massen: $\frac{MC^2}{2}$ und $\frac{mc^2}{2}$ verhalten sich wie $C : c$ oder in diesem Falle wie 200 : 1. Von der ganzen durch die Explosion hervorgebrachten lebendigen Kraft geht also $\frac{1}{201}$ auf die Kanone, und der Rest von $\frac{200}{201}$ auf die Kugel über.

Fig. 634.

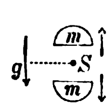


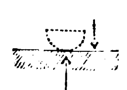
Die Kräfte, welche bei der Explosion eine Trennung des vorher verbunden gewesenen Massen-Systems hervorbringen, sind in

Bezug auf die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes als innere Kräfte zu betrachten. Wenn ausserdem noch äussere Kräfte vorhanden sind, so kann man sich die Bewegung des Schwerpunktes in zwei Bewegungen zerlegt denken: nämlich diejenige, welche den inneren Kräften für sich allein, und diejenige, welche den äusseren Kräften für sich allein entsprechen würde. Die erstere ist eine gleichförmige, die letztere im Allgemeinen eine ungleichförmige Bewegung, deren Beschleunigung dieselbe bleibt, so lange die äusseren Kräfte dieselben bleiben, in welcher also durch die Explosion selbst keinerlei Aenderung hervorgebracht wird.

Wenn z. B. eine vertical abwärts fallende Bombe plötzlich in zwei Stücke zersprengt würde in der Weise, dass die obere Hälfte nach oben, die untere Hälfte nach unten hin geschleudert wird (Fig. 635), so würde der Schwerpunkt seine Bewegung mit der Beschleunigung g fortsetzen, und erst in dem Augenblicke, wo die untere Hälfte gegen den Boden stösst, wo also in dem Gegendrucke der festen Bodenfläche eine neue äussere Kraft hinzukommt, erleidet die Beschleunigung plötzlich eine Aenderung und geht — wenn der Boden als unelastisch vorausgesetzt wird — von der Grösse $\frac{2mg}{2m} = g$ sprungweise in die Grösse $\frac{mg}{2m} = \frac{1}{2} g$ über.

Fig. 635.





Das Gleiche gilt von der Bewegung des Schwerpunktes einer Bombe, welche eine parabolische Flugbahn beschreibt und während der Bewegung plötzlich in beliebig viele Stücke zersprengt wird. Durch die Explosion selbst erleidet die Bahnlinie des Schwerpunktes keinerlei Veränderung. In dem Augenblicke aber, wo das erste Stück gegen den festen Boden stösst, springt der Schwerpunkt aus der ursprünglichen in eine neue parabolische Linie über, und bei dem Niederfallen jedes einzelnen Stückes entsteht in der Bahnlinie des Schwerpunktes eine Ecke.

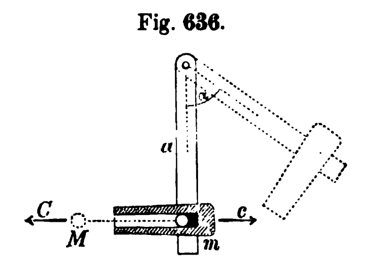
Da bei einem an fester Drehachse hängenden Pendel die Beschleunigung des Stosspunktes wie die eines einfachen materiellen Punktes zu bestimmen ist, dessen Masse gleich der auf den Stosspunkt reducirten Masse des Pendels ist, so kann die Gleichung 837) auch auf den Fall angewendet werden, in welchem der explodirende Körper aus einem an fester Drehachse hängenden Systeme von zwei Massen M und m besteht, sobald darin statt derjenigen Masse m, welche nach der Explosion noch als Pendel mit der Drehachse vereinigt bleibt, die auf den Stosspunkt reducirte Masse $\mathfrak{m}$ substituirt wird. Für die Geschwindigkeit, welche der

Masse M durch die Explosion ertheilt wird, erhält man alsdann die Gleichung:

$$838)\quad C = \frac{\mathfrak{m}}{M} \cdot c.$$

Hieraus ergiebt sich eine zweite Methode der Benutzung des ballistischen Pendels zum Messen der Geschwindigkeit einer Kanonenkugel. Anstatt die Kanone von aussen her gegen das Pendel abzufeuern, kann man auch die Kanone selbst als Pendel aufhängen und durch Messung des beim Abfeuern entstehenden Ausschlagwinkels α die Geschwindigkeit C der Kanonenkugel bestimmen (Fig. 636). Wenn man in obiger Gleichung den im vorigen Paragraphen (aus Gleichung 834 zu entnehmenden) Werth für c substituirt, so erhält man die Gleichung:

Fig. 636.



$$839)\quad C = \frac{\mathfrak{m}}{M} \sqrt{2 \cdot \frac{m}{\mathfrak{m}} \cdot gr\,(1 - \cos\alpha)},$$

in welcher m die aus Pendel und Kanone zusammengesetzte schwingende Masse bedeutet. Setzt man hierin (wie bei dem Zahlenbeispiele des vorigen Paragraphen): $\frac{m}{\mathfrak{m}} = 1{,}225$, $\frac{m}{M} = 400$, $a = 2^m{,}45$, $r = 2^m$ und $\alpha = 20^0$, so erhält man:

$$C = 555^m{,}95.$$

§ 159.

Excentrischer Stoss.

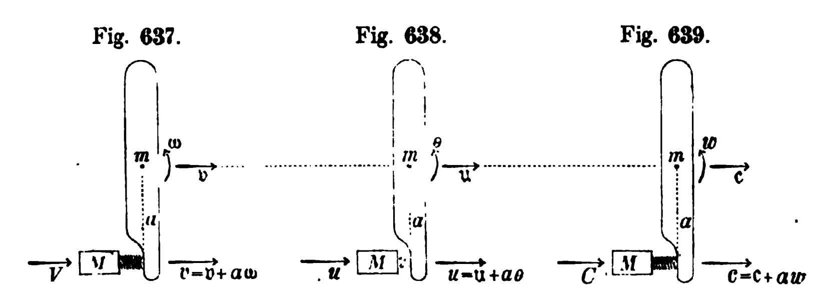
(Mittelpunkt des Stosses.)

Es soll angenommen werden, dass die Bewegung der Masse m vor dem Stosse zusammengesetzt war aus einer fortschreitenden Bewegung, entsprechend der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ihres Schwerpunktes und einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω geschehenden Drehbewegung um eine rechtwinkelig zur ersteren stehende Schwerpunktsachse, welche letztere als eine freie Achse (§ 111) vorausgesetzt wird; ferner, dass der Stosspunkt in einer rechtwinkelig zu dieser Drehachse liegenden Schwerpunktsebene, im Abstande a vom Schwerpunkte sich befindet, und dass der Stoss in Bezug auf beide Körper ein gerader Stoss ist, d. h. dass die Bewegungsrichtungen der stossenden Masse M und des Stosspunktes an der Masse m beide rechtwinkelig zur Berührungsebene gerichtet sind, endlich, dass der Stoss in Bezug auf die stossende Masse M zugleich ein centraler Stoss ist.

Wie in § 154 kann man sich die Elasticitäts-Wirkungen an der Berührungsstelle wiederum durch eine zwischen beide Körper

eingeschaltete masselose Feder versinnlichen, und da die Stossdauer als sehr klein angenommen werden darf — folglich trotz der Drehung der Masse m die Stellung derselben während der Stossdauer keine wesentliche Aenderung erleidet — so kann man sich (nach Analogie der drei Figuren **621**, **622**, **623**) die drei Stellungen der beiden Körper im Augenblicke der ersten Berührung, der grössten Zusammendrückung und am Ende der Stossdauer resp. durch die drei Figuren **637**, **638**, **639** veranschaulichen.

Fig. **637**. Fig. **638**. Fig. **639**.



Durch den excentrisch wirkenden Stossdruck D wird sowohl die Geschwindigkeit des Schwerpunktes als auch die Drehgeschwindigkeit der Masse m geändert. Nach § 121 (Gleichung 545) ist die dem Momente Da entsprechende Drehbeschleunigung $\psi = \frac{D a}{\mathfrak{m} a^2}$ (wenn mit $\mathfrak{m} a^2$ das Trägheitsmoment der Masse m in Bezug auf die Schwerpunktsachse bezeichnet wird), folglich die der Drehbeschleunigung entsprechende Bogen-Beschleunigung des Stosspunktes $a \,.\, \psi = \frac{D}{\mathfrak{m}}$. Die Masse M erhält gleichzeitig die Verzögerung $\frac{D}{M}$. Letztere verhält sich zur ersteren wie $\mathfrak{m}$ zu M; es müssen daher auch die ganzen während des Ueberganges aus der Stellung Fig. **637** in die Stellung Fig. **638** hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen resp. $V - u$ und $a\theta - a\omega$ dieser beiden Bewegungen sich verhalten wie $\mathfrak{m}$ zu M. Hieraus ergiebt sich die Gleichung:

$$840)\qquad \frac{V-u}{a\theta - a\omega} = \frac{\mathfrak{m}}{M},$$

welche nach Substitution der aus den Figuren zu entnehmenden Werthe $a\theta = u - \mathfrak{u}$ und $a\omega = v - \mathfrak{v}$ die Form annimmt:

$$841)\qquad \frac{V-u}{(u-v)-(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})} = \frac{\mathfrak{m}}{M}.$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Masse m ändert sich genau in derselben Weise wie die eines einfachen materiellen Punktes von gleicher Masse unter Einwirkung des Stossdruckes D sich ändern würde. Es muss daher wie bei dem centralen Stosse das Verhältniss der Geschwindigkeits-Aenderungen der beiden Schwerpunkte gleich dem umgekehrten Massenverhältniss sein; folglich ist:

$$842)\quad \frac{V-u}{\mathfrak{u}-\mathfrak{v}}=\frac{m}{M}.$$

Aus den letzteren drei Gleichungen ergeben sich für die während der ersten Periode hervorgebrachten drei Geschwindigkeits-Aenderungen die Werthe:

$$843)\quad V-u=\frac{V-v}{1+\frac{M}{m}+\frac{M}{\mathfrak{m}}},\qquad 844)\quad \mathfrak{u}-\mathfrak{v}=\frac{V-v}{1+\frac{m}{M}+\frac{m}{\mathfrak{m}}}.$$

$$845)\quad a\theta-a\omega=\frac{V-v}{1+\frac{\mathfrak{m}}{M}+\frac{\mathfrak{m}}{m}}.$$

Um die während der g a n z e n Stossdauer hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen zu erhalten, hat man diese Werthe noch mit $1+\varepsilon$ zu multipliciren (§ 153) und erhält dann die Gleichungen:

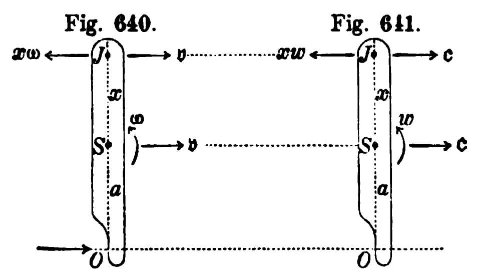
$$846)\quad V-C=\frac{(1+\varepsilon)(V-v)}{1+\frac{M}{m}+\frac{M}{\mathfrak{m}}},\qquad 847)\quad \mathfrak{c}-\mathfrak{v}=\frac{(1+\varepsilon)(V-v)}{1+\frac{m}{M}+\frac{m}{\mathfrak{m}}},$$

$$848)\quad aw-a\omega=\frac{(1+\varepsilon)(V-v)}{1+\frac{\mathfrak{m}}{M}+\frac{\mathfrak{m}}{m}}.$$

§ 160.

Mittelpunkt des Stosses.

Mit Hülfe der letzteren beiden Gleichungen lässt sich auch die Geschwindigkeits-Aenderung bestimmen, welche ein beliebiger anderer Punkt der Masse m, z. B. der dem Stosspunkte gegenüberliegende im Abstande x vom Schwerpunkte befindliche Punkt J durch den Stoss erhält. Nach Fig. 640 war die Geschwindigkeit dieses Punktes v o r dem Stosse



gleich $\mathfrak{v} - x\omega$, und nach Fig. 641 ist die Geschwindigkeit desselben **nach** dem Stosse gleich $\mathfrak{c} - xw$ geworden. Denjenigen Punkt, welcher durch den Stoss **gar keine** Geschwindigkeits-Aenderung erleidet, findet man, indem man die Differenz jener beiden Geschwindigkeiten gleich Null setzt, also aus der Gleichung:

$$849)\quad 0 = (\mathfrak{c} - xw) - (\mathfrak{v} - x\omega), \quad \text{oder:} \quad x = \frac{\mathfrak{c} - \mathfrak{v}}{w - \omega}.$$

Wenn man hierin für $\mathfrak{c} - \mathfrak{v}$ und $w - \omega$ resp. die aus den Gleichungen 847) und 848) zu entnehmenden Werthe substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$850)\quad x = a \cdot \frac{\mathfrak{m}}{m},$$

aus welcher sich ergiebt, dass die Lage des gesuchten Punktes vollkommen unabhängig ist: sowohl von dem Coefficienten ε als auch von der anfänglichen Geschwindigkeitsdifferenz $V - v$, sowie von dem Verhältniss der stossenden zur gestossenen Masse.

Für die Entfernung $x + a = l$ der beiden Punkte O und J ergiebt sich aus obiger Gleichung der Werth:

$$851)\quad l = a + \frac{\mathfrak{m}\, a}{m} = \frac{m a^2 + \mathfrak{m}\, a^2}{m\, a}.$$

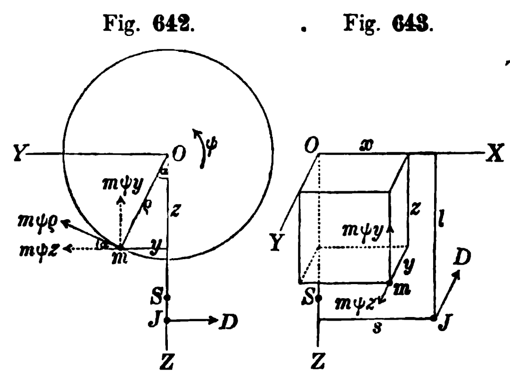
Der im Zähler des letzteren Bruches stehende Ausdruck ist nach Gleichung 483) das Trägheits-Moment der Masse m in Bezug auf eine der Schwerpunkts-Achse parallele durch den Stosspunkt O gelegte Achse. Folglich ist (nach Gleichung 522) der Abstand des Punktes J von dem Stosspunkte gleich demjenigen Abstande, in welchem bei der um die Achse O schwingenden Masse m der sogenannte **Schwingungspunkt** liegen würde (§ 117). Wenn die Masse m vor dem Stosse im Ruhezustande sich befunden hätte, so würde von allen in der Richtungslinie OS liegenden Punkten des Körpers der Punkt J der einzige sein, dessen Geschwindigkeit auch unmittelbar nach dem Stosse noch die Grösse Null hat; es würde also die durch den Stoss hervorgebrachte Bewegung im ersten Augenblicke gerade so beschaffen sein, wie wenn der Körper um eine im Punkte J rechtwinkelig zur Stossebene stehende Drehachse sich drehte. Wäre der Körper an dieser Drehachse vorher aufgehängt gewesen, so würden die Widerstände, welche die Drehachse unbeweglich erhalten, durch den Stoss selbst auf keinerlei Weise in Anspruch genommen, d. h. die Zapfenlager würden bei dem Stosse keine Erschütterung erleiden. Der Punkt O wird deshalb in Bezug auf diese Drehachse J der „Mittelpunkt

des Stosses“ genannt. Da nach § 118 der Aufhängepunkt zum Schwingungspunkte wird, wenn der frühere Schwingungspunkt als Aufhängepunkt gewählt wird, so bildet in gleicher Weise der Punkt J den Mittelpunkt des Stosses in Bezug auf eine durch den Punkt O rechtwinkelig zur Stossebene gelegte Drehachse.

Wenn z. B. eine geradlinige prismatische Stange von der Länge L an einem ihrer Endpunkte aufgehängt ist, so liegt der Mittelpunkt des Stosses in der Entfernung $l = \frac{2}{3} L$ vom Aufhängepunkte; und umgekehrt: wenn der im Abstande $\frac{2}{3} L$ von einem Endpunkte liegende Punkt als Aufhängepunkt genommen wird, so fällt der Mittelpunkt des Stosses mit diesem Endpunkte der Stange zusammen. Die in § 117 und § 118 erklärte Methode der Bestimmung des Schwingungspunktes mittelst Pendel-Beobachtungen kann daher auch benutzt werden, um den Mittelpunkt des Stosses zu bestimmen, und würde auf solche Weise z. B. bei einem Hammer diejenige Stelle des Stieles ermittelt werden können, an welcher derselbe angefasst werden muss, wenn bei dem Aufschlagen des Hammers die den Stiel führende Hand keine Erschütterung empfinden soll.

Für den Fall, dass die der Drehachse parallele Schwerpunkts-Achse die Eigenschaften einer freien Achse nicht besitzt, findet man den Mittelpunkt des Stosses — so wie die Bedingungen, unter welchen ein solcher überhaupt existirt — indem man (auf ähnliche Weise wie in § 121 mit Bezug auf Fig. 463 und Fig. 464 geschehen) das d'Alembert'sche Princip anwendet, und untersucht: unter welchen Bedingungen der Stossdruck D mit den der hervorgebrachten Winkelbeschleunigung ψ entsprechenden Trägheits-Widerständen der einzelnen materiellen Punkte zusammen ein Kräfte-System bildet, welches den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen genügt. Man erhält alsdann nach Fig. 642 und Fig. 643 folgende fünf Bedingungs-Gleichungen:

Fig. 642. Fig. 643.



852) $0 = \Sigma (m \psi z) - D,$ 853) $0 = \Sigma (m \psi y),$

854) $0 = \Sigma (m \psi \varrho^2) - D l,$ 855) $0 = \Sigma (m \psi y x),$

856) $0 = D s - \Sigma (m \psi z x).$

Die zweite von diesen Gleichungen drückt aus, dass der vom Stosse getroffene Punkt J nur dann Mittelpunkt des Stosses sein kann, wenn die rechtwinkelig zur Stossrichtung durch die Drehachse gelegte Ebene OXZ zugleich den Schwerpunkt des Körpers enthält. Die vierte Gleichung zeigt, dass ein Mittelpunkt des Stosses nur in dem Falle wirklich vorhanden ist, wenn die Drehachse OX im Innern des Körpers eine solche Lage hat, bei welcher der Ausdruck $\Sigma(myx)$ gleich Null ist, was z. B. dann der Fall sein wird, wenn die Masse des Körpers in Bezug auf die den Schwerpunkt und die Drehachse enthaltene Ebene OXZ symmetrisch vertheilt ist. Wenn mit M die ganze Masse des Körpers bezeichnet wird, so kann der ersten Gleichung auch die Form gegeben werden: $Mz_0\psi = D$, oder: $z_0\psi = \frac{D}{M}$. Diese Gleichung drückt demnach aus: dass — wenn der vom Stosse getroffene Punkt J Mittelpunkt des Stosses ist — die Peripherie-Beschleunigung des Schwerpunktes so gross ist wie die Beschleunigung, welche die Kraft D einem einfachen materiellen Punkte von der Masse M ertheilen würde. Wenn man endlich in der dritten und fünften Gleichung den aus der ersten für D sich ergebenden Werth substituirt, so erhält man für die Coordinaten des Punktes J die Gleichungen:

$$857)\quad l = \frac{\Sigma(m\varrho^2)}{Mz_0}, \qquad 858)\quad s = \frac{\Sigma(mzx)}{Mz_0},$$

aus denen sich ergiebt, dass die Entfernung desselben von der Drehachse immer dem Abstande des Schwingungspunktes von derselben gleich ist, dass aber der Punkt J seitwärts von der Drehungs-Ebene des Schwerpunktes liegt, sobald die Grösse $\Sigma(mzx)$ von Null verschieden ist, d. h. wenn die der Drehachse parallele Schwerpunkts-Achse keine freie Achse ist.

Wenn man nach den obigen Gleichungen z. B. für die in Fig. 441 dargestellte Stange die Grössen l und s berechnet, so findet man, dass der Mittelpunkt des Stosses zusammenfällt mit dem Angriffspunkte J der Centrifugalkraft, dass derselbe also um die Grösse $\frac{2}{3}L$ vom Endpunkte O und um die Grösse $\frac{1}{6}L$ vom Schwerpunkte entfernt liegt.

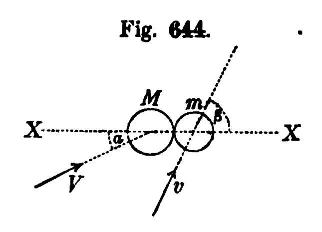
§ 161.

Schiefer Stoss.

Wenn die Geschwindigkeiten V und v, welche die beiden Körper vor dem Stosse hatten, zu der Berührungsebene im Augen-

blicke des Zusammentreffens nicht rechtwinkelig gerichtet sind (Fig. 644), so kann man sich die Bewegung jedes der beiden Körper aus zwei Seitenbewegungen zusammengesetzt denken, von denen die eine mit der Richtung der Normalen XX zusammenfällt, und die andere parallel zur Berührungsebene gerichtet ist. Nach den allgemeinen Gleichungen 804) und 805) erhält man alsdann für die Aenderungen derjenigen Seitengeschwindigkeiten, welche in die Richtung XX fallen, die Gleichungen:

Fig. 644.



$$859)\quad V_x - C_x = \frac{(1+\varepsilon)(V_x - v_x)}{1+\frac{M}{m}},$$

$$860)\quad c_x - v_x = \frac{(1+\varepsilon)(V_x - v_x)}{1+\frac{m}{M}},$$

in welchen der Index „x" andeutet, dass dieselben auf die in der Richtung XX erfolgenden Bewegungen sich beziehen — in welchen also $V_x = V\cos\alpha$ und $v_x = v\cos\beta$ zu setzen ist. Die parallel zur Berührungsebene gerichteten Seitenbewegungen dagegen würden durch den Stoss gar keine Aenderungen erleiden, wenn an der Berührungsstelle — wie zunächst vorausgesetzt werden soll — keine Reibung während der Stossdauer stattfände. Für diesen Fall erhält man die wirkliche Bewegung jedes der beiden Körper nach dem Stosse, indem man jene unverändert gebliebene Seitengeschwindigkeit mit der durch den Stoss veränderten (in die Richtung XX fallenden) Seitengeschwindigkeit wiederum zu einer Resultirenden zusammensetzt.

Setzt man z. B. $\varepsilon = 1$, $M = m$ und $v = 0$, so erhält man nach Gleichung 859) $C_x = 0$, und nach Gleichung 860) $c_x = V_x = V\cos\alpha$. Es würde also nach dem Stosse die gestossene Masse mit der Geschwindigkeit $V\cos\alpha$ in der Richtung XX, und die stossende Masse mit der rechtwinkelig zu XX gerichteten Geschwindigkeit $V\sin\alpha$ sich weiter bewegen.

Wenn die parallel zur Berührungsfläche gerichteten Seitengeschwindigkeiten vor dem Stosse ungleiche Grössen oder Richtungen hatten, so findet während der Stossdauer an der Berührungsfläche ein Gleiten statt, und durch die dabei auftretende Reibung erleidet die parallel zur Reibungsfläche gerichtete Seitengeschwindigkeit jedes der beiden Körper ebenfalls eine Aenderung.

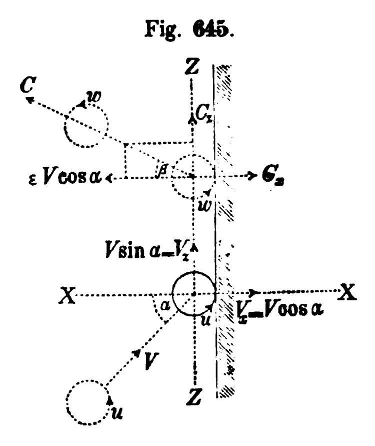
Da ferner diese Reibungswiderstände im Allgemeinen als excentrisch wirkende Stosskräfte auftreten, so wird ausserdem jedem der beiden Körper eine Drehbewegung durch dieselben ertheilt, oder die etwa schon vorhandene Drehbewegung durch den Stoss verändert. Auf die rechtwinkelig zur Berührungsfläche gerichteten Seitenbewegungen dagegen hat die Reibung keinerlei Einfluss, und sind daher die in dieser Richtung hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderungen unter allen Umständen nach den Gleichungen 859) und 860) zu bestimmen.

§ 162.

Schiefer Stoss einer Kugel gegen eine feste Wand.

Durch die Reibung wird der Kugel eine Drehbewegung ertheilt um diejenige Schwerpunkts-Achse, welche sowohl zu der anfänglichen Bewegungsrichtung der Kugel, als auch zur Normalen der Wandfläche rechtwinkelig gerichtet ist; oder wenn die Kugel in Bezug auf diese Achse vor dem Stosse schon die Drehgeschwindigkeit ω hatte, so wird dieselbe je nach ihrer Richtung durch die Reibung entweder vergrössert oder verkleinert werden. Bei dem in Fig. 645 angenommenen Falle, in welchem die der Winkelgeschwindigkeit ω entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit u des Berührungspunktes gleiche Richtung mit der parallel zur Wandfläche gerichteten Seitengeschwindigkeit $V \sin \alpha$ des Schwerpunktes hatte, wird jede dieser beiden Geschwindigkeiten durch die Reibung eine Abnahme erleiden, und wenn die Geschwindigkeit $u + V \sin \alpha$, mit welcher das Gleiten des Berührungspunktes längs der Wand beginnt — wie hier zunächst vorausgesetzt werden soll — so gross war, dass während der ganzen Berührungszeit das Gleiten des Berührungspunktes fortdauert, so wird auch jenes Abnehmen der beiden Geschwindigkeiten während der ganzen Stossdauer sich fortsetzen.

Fig. 645.



Für die in der Richtung XX durch den Stoss hervorgebrachte

Geschwindigkeits-Verminderung erhält man aus Gleichung 859), wenn man darin $v = 0$ und $\frac{M}{m} = 0$ setzt, die Grösse:

$$861)\quad V_x - C_x = (1+\varepsilon)\, V_x = (1+\varepsilon)\, V\cos\alpha, \text{ oder: } C_x = -\varepsilon\, V\cos\alpha.$$

Wenn f der Reibungscoefficient ist, und der normale Gegendruck der Wand in irgend einem Augenblicke die Grösse D hat, so ist in demselben Zeitpunkte der Reibungswiderstand gleich $f.D$. Wie auch immer während der Berührungszeit der Druck D sich ändern möge: das Verhältniss des Reibungswiderstandes zu diesem Drucke behält immer die gleiche Grösse f; folglich ist das Verhältniss der vom Reibungswiderstande hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderung $V_z - C_z$ zu der von dem Drucke D hervorgebrachten Geschwindigkeits-Aenderung $(1+\varepsilon)\, V\cos\alpha$ ebenfalls gleich f zu setzen; es ist daher:

$$862)\quad V_z - C_z = f(1+\varepsilon)\, V\cos\alpha, \quad \text{oder:}$$
$$C_z = V\sin\alpha - f(1+\varepsilon)\, V\cos\alpha.$$

Durch den excentrisch wirkenden Reibungswiderstand fD wird ausserdem die der Drehung entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit eine Verminderung erhalten, welche zu der dem Schwerpunkte von der gleichen Kraft ertheilten Geschwindigkeits-Verminderung $V_z - C_z$ sich verhält wie die wirkliche Masse M zu der auf den Umfang reducirten Masse μ (§ 159). Also ist:

$$863)\quad u - w = \frac{M}{\mu} f(1+\varepsilon)\, V\cos\alpha, \quad \text{oder:}$$
$$w = u - \frac{M}{\mu} f(1+\varepsilon)\, V\cos\alpha.$$

Aus den letzteren beiden Gleichungen ergiebt sich für die Geschwindigkeit des Gleitens der Berührungsstelle am Ende der Stossdauer der Werth:

$$864)\quad C_z + w = V\sin\alpha + u - f(1+\varepsilon)\, V\cos\alpha\left(1 + \frac{M}{\mu}\right).$$

Die Gültigkeit der letzteren drei Gleichungen ist an die Bedingung geknüpft, dass der Reibungswiderstand während der ganzen Stossdauer zu wirken fortfährt. Wenn vor dem Ende der Stossdauer schon das Gleiten aufhörte, so würde in demselben Augenblicke auch der Reibungswiderstand zu wirken aufhören, und in diesem Falle würden die obigen Gleichungen ihre Gültigkeit verlieren. Die Gleichungen 862) und 863) sind daher nur dann als gültig zu betrachten, wenn es sich zeigt, dass der in

Gleichung 864) gefundene Ausdruck einen positiven Werth hat, also wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$865)\quad V \sin \alpha + u \geqq f(1+\varepsilon) V \cos \alpha \left(1 + \frac{M}{\mu}\right).$$

Für den elastischen Stoss würde $\varepsilon = 1$ zu setzen sein; aus den Gleichungen 861) und 862) ergeben sich für diesen Fall die Werthe: $C_x = -V \cos \alpha$ und $C_z = V(\sin \alpha - 2f \cos \alpha)$. Nach Fig. 645 ist ferner: $\operatorname{tg} \beta = \frac{C_z}{-C_x} = \operatorname{tg} \alpha - 2f$. Wäre $\operatorname{tg} \alpha = 2f$, so würde $\operatorname{tg} \beta = 0$, also die Geschwindigkeit C rechtwinkelig zur Wand gerichtet sein und die Grösse $V \cos \alpha$ haben. Für eine Kugel ist $\frac{M}{\mu} = \frac{5}{2}$ zu setzen (Gleichung 460), und die Bedingung 865) nimmt nach Substitution dieser Werthe die Form an: $\frac{u}{V \cos \alpha} \geqq 5f$, oder wenn z. B. $f = 0{,}2$ gesetzt wird, die Form: $u \geqq V \cos \alpha$. Wenn also für $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}4$ oder $\alpha = 21^{\circ}\,50'$ der Winkel $\beta = 0$ werden soll, so ist dies nur dann möglich, wenn die der anfänglichen Drehgeschwindigkeit entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit mindestens die Grösse hatte:

$$u = V \cos 21^{\circ}\,50' = 0{,}9285\,.\,V.$$

Auf ähnliche Weise findet man die Bedingungen, unter welchen der Winkel β einen negativen Werth annimmt. Wenn z. B. $\operatorname{tg} \alpha = f$, oder α gleich dem Reibungswinkel ist, so wird $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$, sobald die Bedingung 865) erfüllt ist, welche für diesen Fall die Form annimmt $u \geqq 6 f V \cos \alpha$. Die Geschwindigkeit C, mit welcher die Kugel die Wand verlässt, ist in diesem Falle der Anfangsgeschwindigkeit V gleich und entgegengesetzt. Bei hinreichender Grösse der Geschwindigkeit u kann, wenn $\operatorname{tg} \alpha < f$ ist, auch $\operatorname{tg} \beta < -\operatorname{tg} \alpha$ werden, in welchem Falle $C > V$ würde, also die der fortschreitenden Bewegung entsprechende lebendige Kraft der Kugel nach dem Stosse grösser sein würde als vor dem Stosse.

Wenn dagegen $f = 0$ ist, so wird bei elastischem Stosse unter allen Umständen $\operatorname{tg} \beta = +\operatorname{tg} \alpha$ und $C = V$.

Wenn die Bedingung 865) nicht erfüllt ist, so erkennt man daraus, dass der Reibungswiderstand nur während eines Theiles der Stossdauer wirksam war; für diesen Fall hat man also in jeder von den beiden Gleichungen 862) und 863) statt der ganzen Geschwindigkeits-Abnahme nur den n-ten Theil derselben in Rechnung zu bringen, wobei dann die Zahl n zu bestimmen ist aus der Bedingung: dass die Summe $C_z + w$ als Endgeschwindigkeit des Gleitens der Berührungsstelle gleich Null sein muss. Es gelten also für diesen Fall ausser der Gleichung 861), welche ihre Gültigkeit unter allen Umständen behält, noch die drei Gleichungen:

$$866)\quad C_z = V \sin \alpha - \frac{1}{n} f(1+\varepsilon) V \cos \alpha,$$

$$867)\quad w = u - \frac{1}{n}\frac{M}{\mu} f(1+\varepsilon) V \cos \alpha,$$

$$868)\quad 0 = V \sin\alpha + u - \frac{1}{n} f(1+\varepsilon) V \cos\alpha \left(1 + \frac{M}{\mu}\right),$$

aus denen sich nach Substitution der Werthe $\varepsilon = 1$, $\mu = \frac{2}{5} M$ und nach Elimination der Grösse n die einfachere Gleichung ergiebt:

$$869)\quad C_1 = \frac{5}{7} V \sin\alpha - \frac{2}{7} u = - w.$$

Bei dem ersten nach den früheren Gleichungen berechneten Zahlenbeispiele ergab sich, dass für $\operatorname{tg}\alpha = 2f = 0{,}4$ die der anfänglichen Drehbewegung entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit mindestens die Grösse $u = V \cos\alpha = 0{,}9285\, V$ haben musste, wenn die Bedingung 865) noch erfüllt sein sollte. Wäre u kleiner gewesen, so würden die Endgeschwindigkeiten C_1 und w nach Gleichung 869) zu bestimmen sein, und es würden z. B. für $u = 0$ die Werthe: $C_1 = \frac{5}{7} V \sin\alpha = 0{,}2653\, V$ und $w = -0{,}2653\, V$ sich ergeben. Ferner würde in diesem Falle $\operatorname{tg}\beta = \frac{C_1}{V\cos\alpha} = 0{,}2857$, also $\beta = 15^0\, 58'$ (statt gleich Null wie im vorigen Falle) und $C = 0{,}965\, V$ (statt gleich $0{,}9285\, V$) werden. Schon vor dem Augenblicke, in welchem die Kugel die Wand verlässt, würde in diesem Falle die parallel zur Wandfläche gerichtete Seitenbewegung derselben eine „rollende" Bewegung geworden sein (vergl. § 123).

SECHSUNDZWANZIGSTES CAPITEL.

Relatives Gleichgewicht elastischer Körper.

§ 163.

Relatives Gleichgewicht im beschleunigt fortschreitenden Raume.

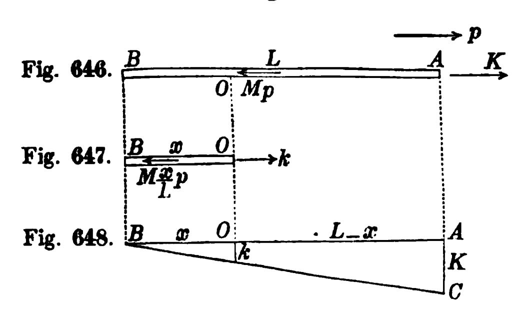
In einem elastischen Körper, welcher ohne seine Form zu ändern eine geradlinig fortschreitende Bewegung mit der constanten Beschleunigung p ausführt, befindet sich jeder einzelne materielle Punkt in relativem Ruhezustande in Bezug auf einen mit derselben Beschleunigung fortschreitenden Raum. Es müssen daher (nach § 107) die der Beschleunigung p entsprechenden Trägheitswiderstände mp der einzelnen Massentheile m mit den wirklich vorhandenen Kräften zusammen ein Kräfte-System bilden, welches den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen entspricht.

Wenn eine geradlinige prismatische Stange von der Masse M unter Einwirkung einer am vorderen Endpunkte angreifenden Zugkraft K mit der Beschleunigung p in ihrer Längenrichtung fortschreitet, so ist bei relativem Ruhezustande der einzelnen Massen-

theile die Spannung der Stange ungleichförmig über die Länge derselben vertheilt (Fig. **646**). Am vorderen Endpunkte A findet relatives Gleichgewicht statt zwischen der Kraft K und der Summe aller Trägheitswiderstände $\Sigma(mp) = Mp$. Also ist:

870) $K = Mp.$

Denkt man sich an irgend einer anderen Stelle O die Stange durchschnitten und durch Hinzufügung der Kraft k den relativen Gleichgewichtszustand des Theiles OB wiederhergestellt (Fig. **647**), so findet man auf gleiche Weise, dass die Kraft k dem Trägheitswiderstande des Stückes OB gleich zu setzen ist, welcher zu dem der ganzen Stange sich verhält wie x zu L. Folglich ist:



871) $\frac{k}{K} = \frac{x}{L},$

und das Gesetz, nach welchem die Spannung k mit dem Abstande vom Endpunkte B zunimmt, lässt sich durch die gerade Linie BC veranschaulichen (Fig. **648**).

Wäre die Beschleunigung p gleich der Beschleunigung g des freien Falles, so würde die Stange genau in demselben Spannungszustande sich befinden, wie wenn dieselbe in verticaler Lage an dem Punkte A hängend durch ihr eigenes Gewicht gespannt würde. In diesem Falle würde die bei A pro Flächeneinheit der Querschnittsfläche F stattfindende Spannung S zu bestimmen sein aus der Gleichung $SF = qLF$ oder $S = qL$, in welcher q das Gewicht des Materials pro Cubikeinheit bezeichnet. Wenn dagegen die Beschleunigung n-mal so gross ist als die Beschleunigung der Schwere, so befindet sich die Stange in demselben Zustande, wie wenn dieselbe mit einem Gewichte belastet wäre, welches n-mal so gross ist als ihr eigenes Gewicht, und in diesem Falle würde die Spannung S zu bestimmen sein aus der Gleichung:

872) $S = n \,.\, qL.$

Setzt man hierin $n = 2$, $L = 1000^{\text{m}}$, und (als Gewicht eines Cubikmeters Schmiedeisen) $q = 7750$ Kil., so erhält man $S = 15\,500\,000$ Kil. (pro Quadratmeter); d. h. es würde bei einem 1000 Meter langen Eisendrahte, welcher auf

die oben beschriebene Art mit der Beschleunigung: $p = 2 \, . \, g = 19^m{,}62$ fortschreitet, am Vorderende eine Spannung von 15,5 Kil. pro Quadratmillimeter der Querschnittsfläche stattfinden.

Wenn die Stange unter Einwirkung einer am Mittelpunkte angreifenden Kraft rechtwinkelig zu ihrer Längenrichtung mit der Beschleunigung p fortschreitet (Fig. 649), so finden Biegungs-Spannungen in derselben statt, und wenn z. B. $p = g$ wäre, so würde die Stange genau in demselben Biegungszustande sich befinden, wie wenn dieselbe in horizontaler Lage am Mittelpunkte aufgehängt unter Einwirkung ihres eigenen Gewichtes sich befände, oder unter Einwirkung einer gleichförmig über die Länge $2l$ vertheilten Belastung von der Grösse $2lqF$. Für diesen Fall würde (nach § 135) die grösste Biegungsspannung zu bestimmen sein aus der Gleichung:

Fig. 649.

$$873) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = \frac{qFl^2}{2}, \quad \text{oder:} \quad S = \frac{wF}{\mathfrak{T}} \frac{ql^2}{2},$$

welche z. B. für eine cylindrische Stange vom Durchmesser D die Form annehmen würde:

$$874) \quad S = \frac{4ql^2}{D}.$$

Wenn dagegen $p = n \, . \, g$ wäre, so würde der Biegungszustand der Stange einer Belastung entsprechen, welche n-mal so gross ist als ihr eigenes Gewicht, also die Spannung S zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$875) \quad S = \frac{4nql^2}{D}.$$

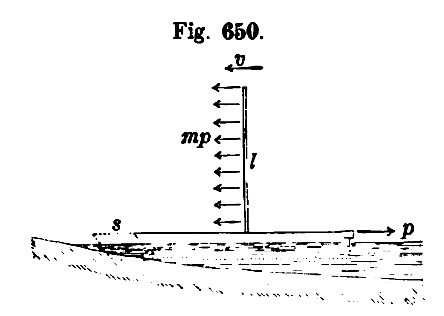
Wenn z. B. eine hölzerne cylindrische Stange von der Länge $2l = 2 \, . \, 10^m$, vom Durchmesser $D = 0^m{,}2$ und vom Gewichte pro Cubikmeter: $q = 750$ Kil. in der angegebenen Weise mit der Beschleunigung $p = 20^m$ (entsprechend dem Werthe $n = 2{,}04$) bewegt wird, so hat in der Mitte die Biegungsspannung die Grösse: $S = 3\,060\,000$ Kil. (pro $\square^m$) oder 3,06 Kil. pro Quadratmillimeter.

Die beiden Gleichungen 872) und 875) setzen als Bedingung ihrer Gültigkeit voraus, dass sämmtliche materielle Punkte der Stange in Bezug auf den beschleunigt fortschreitenden Raum bereits diejenigen Orte wirklich eingenommen haben, welche den relativen Gleichgewichts-Bedingungen entsprechen, d. h. dass die Stange schon von Anfang an in demjenigen Spannungszustande sich befunden hatte, welcher für die beschleunigte Bewegung zugleich den relativen Gleichgewichtszustand derselben bildet. Wenn

dagegen beim Beginne der beschleunigten Bewegung die Stange im spannungslosen Zustande sich befand, so wird im Augenblicke des Eintretens der Beschleunigung die Stange in derselben Situation sich befinden, wie wenn sie in dem Punkte A aufgehängt plötzlich der Wirkung ihres eigenen Gewichtes, resp. einer Belastung, welche das n-fache ihres eigenen Gewichtes beträgt, überlassen würde. In diesem Falle wird der Schwerpunkt der Stange um seine relative Gleichgewichtslage herum Schwingungen ausführen (vergleichbar denen des in Fig. **113** dargestellten Pendels), und am Ende der ersten Schwingung wird die Maximal-Spannung doppelt so gross geworden sein, als die in den obigen Gleichungen gefundene dem relativen Ruhezustande entsprechende Spannung (vergl. § 150, Gleichung 768).

Wenn z. B. ein vorher mit der Geschwindigkeit $v = 4^m$ sich bewegendes Schiff auf den Strand läuft (Fig. **650**) und dabei noch die Strecke $s = 0^m,4$ zurücklegt, bevor der Ruhezustand eintritt, so ist (nach § 7, Gleichung 4) unter Voraussetzung einer gleichförmig verzögerten Bewegung die Grösse der Geschwindigkeits-Aenderung pro Secunde zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. **650**.



$$p = \frac{v^2}{2s} = \frac{4^2}{2 \cdot 0,4} = 20^m.$$

Wenn also für den Mast des Schiffes die im vorigen Zahlenbeispiele gewählten Werthe $l = 10^m$, $D = 0^m,2$, $q = 750$ Kil. angenommen werden, so würde für die dem relativen Gleichgewichtszustande entsprechende Maximal-Spannung wiederum die Grösse 3,06 Kil. pro Quadratmillimeter sich ergeben; d. h. wenn vor dem Beginn der Verzögerung schon der Mast in solchem Biegungszustande sich befunden hätte, so würde während der verzögerten Bewegung diese Spannung nicht überschritten werden. Im Momente des Eintretens der Verzögerung beginnt der Mast Feder-Schwingungen um diese relative Gleichgewichtslage herum auszuführen und am Ende der ersten Schwingung wird die grösste Biegungsspannung $2 \cdot 3,06 = 6,12$ Kil. pro $\square^{mm}$ betragen, falls nicht vor diesem Augenblicke schon der Ruhezustand des Schiffes eintrat.

§ 164.

Centrifugal-Spannungen in rotirenden Körpern.

Nach § 110 (Gleichung 490) hat bei einer geradlinigen prismatischen Stange, welche um eine in dem Enpunkte derselben rechtwinkelig zu ihrer Längenrichtung stehende Drehachse sich

dreht, die Mittelkraft sämmtlicher Centrifugal-Kräfte im Schwerpunkte ihren Angriffspunkt und dieselbe Grösse, wie wenn die ganze Masse der Stange in diesem Punkte vereinigt wäre (Fig. 651). Mit Beibehaltung der im vorigen Paragraphen gewählten Bezeichnungsweise erhält man also für die unmittelbar neben dem Drehpunkte stattfindende Spannung pro Flächeneinheit die Gleichung:

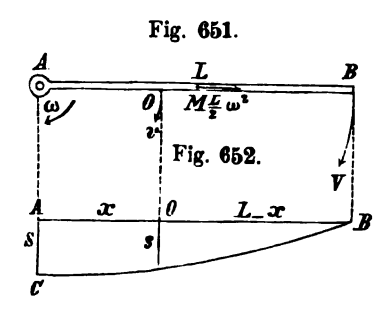


Fig. 651.

Fig. 652.

876) $SF = M \frac{L}{2} \omega^2$,

welche, wenn darin (wie im vorigen Paragraphen) das Gewicht $Mg = qFL$ gesetzt wird, für S aufgelöst die Form annimmt:

877) $S = q \frac{(L\omega)^2}{2g}$,

oder wenn die Grösse $L\omega$ als Peripherie-Geschwindigkeit des Endpunktes B mit V bezeichnet wird, die Form:

878) $S = q \left(\frac{V^2}{2g}\right)$.

Zu dieser Spannung liefert das Stück AO den Beitrag $q \left(\frac{v^2}{2g}\right)$. Wenn man diese letztere Grösse subtrahirt von der Spannung S, so erhält man die in dem Punkte O stattfindende Spannung s. Also ist:

879) $s = q \left(\frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right)$, oder: $\frac{s}{S} = \frac{V^2 - v^2}{V^2} = 1 - \frac{x^2}{L^2}$.

Das Gesetz, nach welchem die Spannung mit der Entfernung vom Drehpunkte abnimmt, lässt sich also auf die in Fig. 652 angegebene Art graphisch darstellen durch eine Parabel BC, deren Achse mit der Drehachse der Stange zusammenfällt.

Wenn man die der Geschwindigkeit V entsprechende Fallhöhe $\frac{V^2}{2g}$ mit H bezeichnet, so erhält man aus Gleichung 878) für die Maximal-Spannung S den Werth:

880) $S = qH$,

d. h. die Spannung beim Drehpunkte A ist eben so gross wie die Spannung am Aufhängepunkte einer vertical herabhängenden Stange sein würde, deren Länge gleich der Geschwindigkeitshöhe H ist.

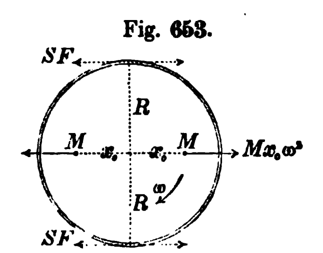
Hiernach ergiebt sich z. B. für die in einer schmiedeisernen Stange vom Gewichte $q = 7750$ Kil. pro Cubikmeter bei einer Peripherie-Geschwindigkeit des Endpunktes $V = 56^m$ (entsprechend der Geschwindigkeitshöhe $H = 160^m$) eintretende Maximal-Spannung die Grösse: $S = 7750 \,.\, 160 = 1\,240\,000$ Kil. pro □^{m} oder 1,24 Kil. pro □^{mm}.

Umgekehrt lässt sich aus obiger Gleichung die Grenze berechnen, über welche hinaus die Drehgeschwindigkeit nicht gesteigert werden darf, wenn die Maximal-Spannung die für das Material der Stange als zulässig anzunehmende Grösse nicht überschreiten soll. Setzt man z. B. $S = 6\,000\,000$ Kil., so erhält man für die bei einer schmiedeisernen Stange zulässige Geschwindigkeitshöhe die Grenze: $H = \frac{6\,000\,000}{7750} = 774^m,2$, entsprechend einer Peripherie-Geschwindigkeit des Endpunktes: $V = \sqrt{2\,g\,H} = 123^m,2$.

Für eine Stange von Blei würde man auf gleiche Weise nach Substitution der Werthe $S = 500\,000$ Kil. und $q = 11\,500$ Kil. die Grenzen erhalten: $H = 43^m,478$ und $V = 29^m,2$.

Ein um seine geometrische Achse rotirender Ring (Fig. **653**) würde durch die Centrifugal-Kräfte seiner beiden Hälften an zwei gegenüberliegenden Querschnittsflächen zerrissen werden, wenn nicht durch die in diesen beiden Querschnittsflächen auftretenden Spannungswiderstände das Zerreissen verhindert würde. Jede von den beiden Ringhälften wird im relativen Gleichgewicht gehalten durch die Centrifugal-Kraft $M x_0 \omega^2$ einerseits und die Summe der beiden Spannungswiderstände oder die Kraft $2\,S\,F$ andererseits; also ist:

Fig. **653**.



$$881)\quad 2\,S\,F = M x_0 \omega^2.$$

Wenn das Gewicht der Ringhälfte $M g = q \,.\, F R \pi$, und der Abstand des Schwerpunktes desselben vom Mittelpunkte (nach Gleichung 157) $x_0 = \frac{2\,R}{\pi}$ gesetzt wird, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$882)\quad S = 2\,q\,\frac{(R\,\omega)^2}{2\,g},$$

oder, wenn die der Peripherie-Geschwindigkeit $V = R\,\omega$ entsprechende Fallhöhe wiederum mit H bezeichnet wird, die Form:

$$883)\quad S = 2\,q\,H.$$

Auf analoge Weise erhält man für eine massive cylindrische Scheibe (Fig. **654** und Fig. **655**) die Gleichung:

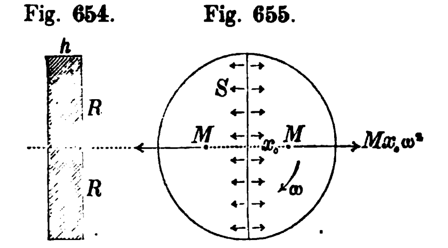
$$884)\quad S \,.\, 2\,h\,R = M x_0 \omega^2,$$

welche nach Substitution der Werthe: $M = \frac{q}{g} \cdot \frac{R^2 \pi h}{2}$ und $x_0 = \frac{4R}{3\pi}$, für S aufgelöst die Form annimmt:

$$885)\quad S = \frac{2}{3}\, q\, \frac{(R\omega)^2}{2g} = \frac{2}{3}\, q\, H.$$

Aus den drei Gleichungen 880), 883) und 885) ergiebt sich: dass die einer und derselben Peripherie-Geschwindigkeit entsprechenden Centrifugal-Spannungen der Stange, des Ringes und der cylindrischen Scheibe bei gleicher Materialbeschaffenheit sich verhalten wie die Zahlen $1 : 2 : \frac{2}{3}$, oder dass die Grenzwerthe der zulässigen Geschwindigkeitshöhen sich verhalten wie die Zahlen $1 : \frac{1}{2} : \frac{3}{2}$, folglich die zulässigen Peripherie-Geschwindigkeiten selbst wie die Zahlen $1 : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{3}{2}}$. Während für die zulässige Peripherie-Geschwindigkeit einer schmiedeisernen Stange nach Gleichung 880) die Grösse $V = 123^m,2$ gefunden wurde, ergiebt sich für einen schmiedeisernen Ring der Werth $V = 87^m,1$ und für eine schmiedeiserne Scheibe der Werth $V = 150^m,9$. Auf gleiche Weise erhält man aus dem für eine Stange von Blei gefundenen Werthe $V = 29^m,2$ resp. die Werthe: $V = 20^m,65$ und $V = 35^m,77$ als zulässige Peripherie-Geschwindigkeiten resp. für einen Ring und eine Scheibe von Blei.

Fig. 654. Fig. 655.



§ 165.

Spannungen in beschleunigt rotirenden Körpern.

Der Trägheitswiderstand eines im Abstande ϱ von der Drehachse befindlichen materiellen Punktes an einem mit der constanten Winkelbeschleunigung ε sich drehenden Körper ist anzusehen als die Mittelkraft aus der radial gerichteten Centrifugal-Kraft, welche der augenblicklich erlangten Drehgeschwindigkeit entspricht, und dem tangential gerichteten Trägheitswiderstande $m\varrho\varepsilon$ (Fig. **444**), welcher der Peripherie-Beschleunigung des Punktes entspricht. Das statische Moment des Trägheitswiderstandes in Bezug auf die Drehachse ist $m\varrho\varepsilon \,.\, \varrho$, und für die Summe aller dieser statischen Momente erhält man (nach Gleichung 504) den Ausdruck:

$$886)\quad \mathfrak{M} = \varepsilon \Sigma (m\varrho^2) = T \,.\, \varepsilon,$$

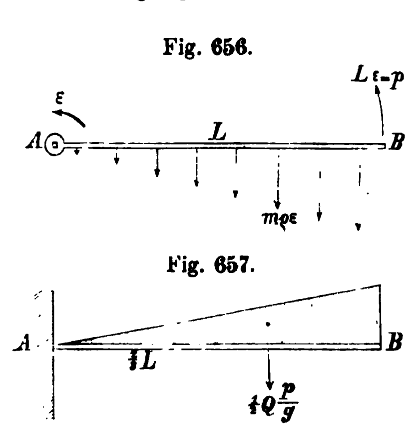
in welchem T das Trägheits-Moment des rotirenden Körpers in Bezug auf seine Drehachse bedeutet.

Für die um den Endpunkt A mit der Winkelbeschleunigung ε rotirende Stange AB (Fig. 656) ist (nach Gleichung 466) $T = \frac{1}{3} ML^2$ zu setzen, also ist:

$$887)\quad \mathfrak{M} = \frac{1}{3} ML \,.\, L\varepsilon,$$

oder, wenn das Gewicht der Stange mit Q, und die Peripherie-Beschleunigung des Endpunktes mit p bezeichnet wird:

$$888)\quad \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(Q \cdot \frac{p}{g}\right) \cdot \frac{2}{3} L.$$



Wenn die Drehbeschleunigung durch die Kräfte, welche in unmittelbarer Nähe der Drehachse angreifen (etwa auf die in Fig. 656 angedeutete Art mittelst des viereckigen Zapfens) auf die Stange übertragen wird, so befindet sich die Stange unter Einwirkung der Trägheitswiderstände $m\varrho\varepsilon$ genau in demselben Biegungszustande, wie wenn dieselbe auf die in Fig. 657 angedeutete Art in horizontaler Lage befestigt und mit einem von A nach B gleichförmig zunehmend über ihre Länge vertheilten Gewichte von der Grösse $\frac{1}{2} Q \frac{p}{g}$ belastet wäre.

Die in der Querschnittsfläche A stattfindende grösste Zugspannung S setzt sich zusammen aus zwei Theilen S_1 und S_2, von denen der erstere durch die der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit ω entsprechende Centrifugal-Spannung an dieser Stelle gebildet wird, und nach Gleichung 880) zu bestimmen ist. Der andere Theil S_2 besteht in der dem Biegungs-Momente $\mathfrak{M}$ entsprechenden grössten Zugspannung dieses Querschnittes und ist nach Gleichung 610) zu bestimmen. Für die Maximal-Spannung S ergiebt sich demnach die Gleichung:

$$889)\quad S = S_1 + S_2 = qH + \frac{1}{3} \frac{w}{\mathfrak{T}} QL \frac{p}{g},$$

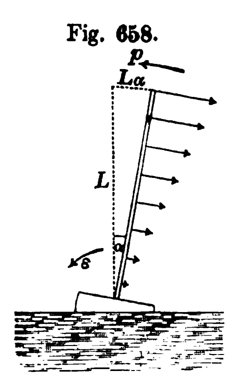
welche z. B. für eine cylindrische Stange vom Durchmesser D die Form annehmen würde:

$$890)\quad S = q\left[H + \frac{8}{3}\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{p}{g}\right)L\right].$$

Wenn z. B. $\frac{L}{D} = 120$, $\frac{p}{g} = 1$ und $\frac{L}{H} = \frac{1}{80}$ ist, so wird $S = qH(1 + 4) = 5 \cdot S_1$. Als Centrifugal-Spannung einer schmiedeisernen Stange, welche mit der Peripherie-Geschwindigkeit $V = 56^m$ (entsprechend der Geschwindigkeitshöhe $H = 160^m$) sich dreht, wurde in dem nach Gleichung 880) berechneten Zahlenbeispiele die Grösse $S_1 = 1{,}24$ Kil. pro □mm gefunden. Wenn die Drehbewegung der Stange in der Weise erfolgte, dass die Peripherie-Geschwindigkeit in jeder Secunde um die Grösse $p = g$ zunimmt, so würde in dem Augenblicke, wo dieselbe die Grösse $V = 56^m$ erreicht, bei den oben angenommenen Dimensionen $\left(L = \frac{H}{80} = 2^m \text{ und } D = \frac{2}{120} = \frac{1^m}{60}\right)$ die Maximal-Spannung die Grösse $5 \cdot 1{,}24 = 6{,}2$ Kil. pro □mm erreichen.

Bei kleinem Schwingungswinkel kann die Bewegung eines schwankenden Schiffes als nach dem Gesetze der Pendelschwingungen erfolgend angenommen werden. Wenn t die Schwingungsdauer ist, so hat nach Gleichung 70) die Peripherie-Beschleunigung der Mastspitze in dem Augenblicke, wo die Entfernung derselben von der Gleichgewichtslage gleich der Längeneinheit ist, die Grösse $\frac{\pi^2}{t^2}$, und in dem Augenblicke, wo diese Entfernung $L \cdot \alpha$ beträgt, die Grösse $p = L\alpha \cdot \frac{\pi^2}{t^2}$ (Fig. 658). Wenn z. B. $L = 20^m$ ist, und die Schwingungsdauer 5 Secunden beträgt, so hat bei einem Elongations-Winkel von 10 Graden (entsprechend dem Werthe $\alpha = 0{,}1745$) die Peripherie-Beschleunigung der Mastspitze am Ende oder am Anfange einer Schwingung die Grösse $p = 1^m{,}3778$. Da die Geschwindigkeit der Drehbewegung — und in Folge dessen auch die Centrifugal-Spannung — in demselben Augenblicke die Grösse Null hat, so ergiebt sich aus Gleichung 890), wenn darin (als Durchmesser des cylindrischen Mastes) $D = 0^m{,}25$ und (als Gewicht eines Cubikmeters Holz) $q = 750$ Kil. gesetzt wird, für die Maximal-Spannung der Werth:

Fig. 658.



$$S = 750 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{20}{0{,}25} \cdot \frac{1{,}3778}{9{,}81} \cdot 20 = 450\,000 \text{ Kil.}$$

pro Quadratmeter oder 0,45 Kil. pro Quadratmillimeter.

SIEBENTER ABSCHNITT.

Statik flüssiger Körper.

SIEBENUNDZWANZIGSTES CAPITEL.

Gleichgewichtszustand eines unter Einwirkung von äusseren gegen die Oberfläche wirkenden Druckkräften befindlichen flüssigen Körpers.

§ 166.

Unterschiede zwischen festen und flüssigen, zwischen gasförmigen und tropfbar flüssigen Körpern.

Im Gegensatze zu den sogenannten festen elastischen Körpern, bei denen die Elasticitäts-Kräfte jeder Formänderung entgegenwirken, können die flüssigen Körper betrachtet werden als elastische Systeme von materiellen Punkten, bei welchen die Elasticitäts-Kräfte nur einer Art der Formänderung entgegenwirken, nämlich solchen Formänderungen, welche mit einer Verkleinerung der Abstände zwischen den benachbarten materiellen Punkten oder mit einer Verminderung des Rauminhaltes verbunden sind. In der Mechanik werden die Flüssigkeiten als vollkommen flüssige Körper behandelt, d. h. als elastische Körper, denen der Widerstand gegen „Abscheerung“ und der Widerstand gegen „Zerreissen“ gänzlich fehlt, und bei denen überdies der „Reibungs-Coefficient der Ruhe“ die Grösse Null hat — obwohl die Physik lehrt, dass die Beschaffenheit der in der Natur wirklich vorkommenden Flüssigkeiten der obigen Definition nur annäherungsweise entspricht.

Die Elasticitäts-Kräfte, durch welche die benachbarten materiellen Punkte einer vollkommen flüssigen Masse auf einander gegenseitig einwirken, bestehen lediglich in abstossenden Kräften. Hinsichtlich des Gesetzes, nach welchem diese abstossen-

den Kräfte mit den Abständen der materiellen Punkte sich ändern, findet ein bemerkenswerther Unterschied statt zwischen den sogenannten „tropfbar flüssigen“ Körpern, als deren Repräsentant das „Wasser“ gelten kann, und den sogenannten „gasförmigen“ Flüssigkeiten, als deren Repräsentant die „atmosphärische Luft“ betrachtet werden kann.

In einem tropfbar flüssigen Körper nehmen die abstossenden Kräfte bei einer bestimmten Grösse des Rauminhaltes, oder bei einer bestimmten Grösse des Abstandes zwischen den benachbarten materiellen Punkten die Grösse Null an, und giebt es daher für einen der Einwirkung aller äusseren Kräfte entzogenen tropfbar flüssigen Körper einen Zustand, bei welchem derselbe in Form eines isolirt im Raume schwebenden „Tropfens“ im Gleichgewichtszustande sich befinden würde.

Die abstossenden Kräfte zwischen den benachbarten materiellen Punkten einer gasförmigen Flüssigkeit dagegen nehmen zwar mit der Vergrösserung ihrer Abstände oder mit der Zunahme des Rauminhaltes fortwährend ab, erreichen jedoch niemals die Grösse Null — wie weit auch immer die Vergrösserung des Rauminhaltes fortschreiten möge. Eine gasförmige Flüssigkeit kann daher bei bestimmter Form und Grösse des von derselben eingenommenen Raumes nur dann im Gleichgewichtszustande sich befinden, wenn die Theile derselben durch äussere Druckkräfte, z. B. durch die Gegendrücke der einschliessenden Gefässwände, zusammengehalten werden.

Ausserdem findet zwischen den gasförmigen und den tropfbar flüssigen Körpern noch ein anderer minder wesentlicher Unterschied statt, welcher lediglich den Grad ihrer Elasticität betrifft. Während bei den gasförmigen Flüssigkeiten eine Aenderung des Rauminhaltes schon durch vergleichsweise kleine Aenderungen der äusseren Druckkräfte hervorgebracht wird, ist bei den tropfbar flüssigen Körpern eine geringe Verminderung des Abstandes zwischen den benachbarten materiellen Punkten schon mit einer so beträchtlichen Zunahme der abstossenden Kräfte verbunden (oder mit anderen Worten der Elasticitäts-Modulus so gross), dass die unter gewöhnlichen Verhältnissen vorkommenden Aenderungen des Rauminhaltes als vergleichsweise klein unberücksichtigt bleiben können. In diesem Sinne ist es zulässig, nach Analogie der im dritten Abschnitte von den absolut festen Körpern gegebenen Definition, die tropfbar flüssigen Körper — im Gegensatze zu den

gasförmigen Flüssigkeiten — vorläufig zu definiren als flüssige Körper von absolut unveränderlichem Rauminhalt.

§ 167.

Gesetz des hydrostatischen Druckes.

Die Gleichgewichts-Bedingungen flüssiger Körper können aus den im dritten Abschnitte für absolut feste Körper gefundenen allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen abgeleitet werden durch Anwendung desselben Verfahrens, welches im § 130 in Bezug auf die elastischen Körper erklärt wurde. Der Gleichgewichtszustand einer flüssigen Masse würde keine Störung erleiden, wenn entweder die ganze Masse oder ein beliebig auszuwählender Theil derselben zu einem festen Körper erstarrte. Es können daher sowohl auf die ganze Masse als auch in Bezug auf jeden beliebig auszuwählenden Theil derselben die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen des § 43 in derselben Weise angewendet werden, wie wenn die flüssige Masse ein absolut fester Körper wäre.

Denkt man sich durch eine beliebig gewählte Schnittfläche irgend einen Theil der Flüssigkeit von der übrigen Masse getrennt, und an der Trennungsfläche Kräfte hinzugefügt, welche die Wirkung des weggenommenen Theiles genau ersetzen, also diejenigen Kräfte, welche vorher an der Trennungsfläche als innere Kräfte thätig waren, so kann man nunmehr auf das ganze System von Kräften die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen anwenden und dieselben zur Bestimmung jener inneren Kräfte benutzen. Da nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition weder Zugkräfte, noch Abscheerungskräfte, noch Reibungswiderstände vorhanden sind, so können jene an der Trennungsfläche anzubringenden Kräfte lediglich in Druckkräften bestehen, welche überall rechtwinkelig zu der Fläche gerichtet sind. Diese normalen Druckkräfte werden im Allgemeinen an den verschiedenen Stellen jener Fläche verschiedene Grössen haben; d. h. wenn mit f der Inhalt eines Flächentheilchens von unendlich kleinen Dimensionen, und mit $p\,.f$ die Summe der auf dieses Flächentheilchen wirkenden Druckkräfte, also mit p der an dieser Stelle wirkende Druck pro Flächeneinheit bezeichnet wird, so ist im Allgemeinen die Grösse p als eine mit dem Orte jenes Flächentheilchens sich ändernde Grösse zu betrachten, und das Gesetz dieser Aenderung wird in jedem besonderen Falle von den äusseren

Kräften abhängen, welche die flüssige Masse im Gleichgewichtszustande halten. Wenn jedoch diese äusseren Kräfte lediglich in Druckkräften bestehen, welche auf die Oberfläche der flüssigen Masse wirken, so lässt sich nachweisen, dass in diesem speciellen Falle die Grösse p einen von Ort und Lage des Flächen-Elementes unabhängigen für alle Punkte der Flüssigkeit gemeinsamen Werth annimmt. Denn der von den Flächen-Elementen $ab = f_1$ und $cd = f_2$ als Endflächen begrenzte cylindrische oder prismatische Theil $abcd$ der in Fig. 659 dargestellten flüssigen Masse befindet sich in derselben Situation wie eine an den Seitenflächen von festen Wänden umgebene cylindrische oder prismatische Stange (Fig. 660), welche in ihrer Längenrichtung ohne Reibung verschiebbar von den auf die Endflächen f_1 und f_2 wirkenden beiden Druckkräften $p_1 f_1$ und $p_2 f_2$ im Gleichgewichte gehalten wird. Als Bedingung des Gleichgewichtes in Bezug auf eine solche Verschiebung längs der einschliessenden Wände ergiebt sich die Gleichung:

Fig. 659.

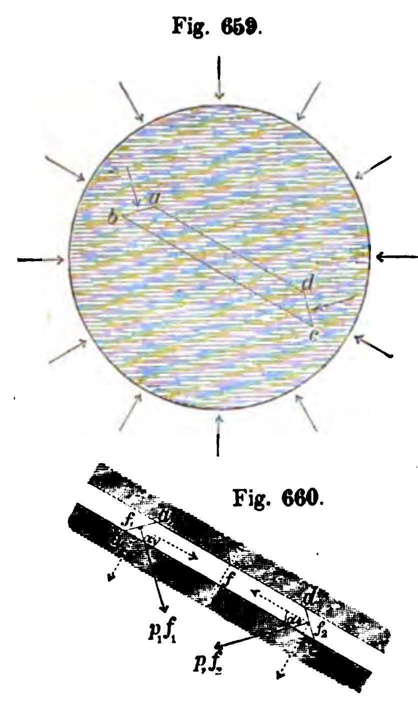


Fig. 660.

$$891)\quad p_1 f_1 \cos \alpha_1 = p_2 f_2 \cos \alpha_2,$$

welche nach Substitution der Werthe $f_1 \cos \alpha_1 = f$ und $f_2 \cos \alpha_2 = f$ die Form annimmt:

$$892)\quad p_1 = p_2,$$

und zeigt, dass die an den beiden Endflächen wirkenden Druckkräfte pro Flächeneinheit gleiche Grösse haben müssen. Da dieselbe Beweisführung auch gelten würde für einen cylindrischen oder prismatischen Theil, dessen eine Endfläche in die Oberfläche der Flüssigkeit fällt, so ergiebt sich hieraus das folgende Gesetz:

Wenn eine flüssige Masse im Gleichgewicht gehalten wird durch Druckkräfte, welche auf die äussere Oberfläche derselben wirken, so hat der Druck pro

Flächeneinheit im Innern sowohl als an der Oberfläche in allen Punkten und in allen Richtungen eine und dieselbe Grösse.

§ 168.

Gleichgewicht einer von festen Gefässwänden und beweglichen Kolben eingeschlossenen flüssigen Masse.

Eine an allen Seiten von festen Körpern eingeschlossene Flüssigkeit, auf deren Oberfläche an irgend einer Stelle mittelst eines beweglichen cylindrischen Kolbens ein Druck p pro Flächeneinheit übertragen wird, kann nur dann im Gleichgewichtszustande sich befinden, wenn an allen übrigen Stellen von jenen festen Körpern auf die Oberfläche ebenfalls Druckkräfte übertragen werden, welche pro Flächeneinheit die Grösse p haben (Fig. 661). Diese Kräfte, in entgegengesetzten Richtungen genommen, bilden die Druckkräfte, welche von der Flüssigkeit auf die einschliessenden festen Körper übertragen werden. Wenn mit F die Endfläche jenes Kolbens und mit K die von aussen her auf den Kolben in der Achsenrichtung desselben wirkende Kraft bezeichnet wird, so hat der auf jede Flächeneinheit der Oberfläche übertragene Druck die Grösse:

Fig. 661.

$$893)\quad p = \frac{K}{F}.$$

Ebenso gross ist an denjenigen Stellen, wo die Flüssigkeit von den Wänden eines unbeweglichen Gefässes eingeschlossen ist, der auf die Wandfläche pro Flächeneinheit übertragene Druck, und wenn ein Theil dieser Gefässwand durch einen anderen beweglichen cylindrischen Kolben von der Endfläche F_1 ersetzt wird, so ist zum Gleichgewichts-Zustande dieses zweiten Kolbens eine von aussen her in der Achsenrichtung desselben wirkende Kraft erforderlich von der Grösse $K_1 = pF_1$, oder:

$$894)\quad K_1 = K \cdot \left(\frac{F_1}{F}\right).$$

Das Verhältniss der beiden Kräfte K und K_1 muss also gleich dem Verhältniss der beiden Kolbenflächen sein. An jedem Punkte

einer beliebigen durch das Innere der Flüssigkeit hindurchgelegten Fläche werden von den beiden durch die Fläche getrennten Theilen der Flüssigkeit Druckkräfte auf einander gegenseitig übertragen, welche pro Flächeneinheit ebenfalls die Grösse p haben und überall rechtwinkelig zu derselben gerichtet sind.

Die beiden Gleichungen 893) und 894) bleiben auch dann noch gültig, wenn die ebenen Endflächen der Kolben durch beliebig geformte krumme Endflächen ersetzt werden, sobald mit F und F_1 resp. die Querschnittsflächen der von den beiden Kolben verschlossenen geradlinigen Ansatzröhren oder Gefässmündungen bezeichnet werden. Denn wenn man sich den auf irgend ein unendlich kleines Theilchen ε der krummen Fläche wirkenden Druck $p \,.\, \varepsilon$ in zwei rechtwinkelig zu einander gerichtete Seitenkräfte zerlegt denkt, von denen die eine der Achsenrichtung des Kolbens parallel ist (Fig. 662), so findet man, dass diese Seitenkraft:

$$895)\quad p\,\varepsilon \cos\alpha = p\,\Delta$$

Fig. 662.

dieselbe Grösse und Länge hat, welche der Druck gegen die Projection Δ jenes Flächentheilchens auf der rechtwinkelig zur Achsenrichtung stehenden Querschnittsebene F_1 der Ansatzröhre haben würde, und da dasselbe in Bezug auf jedes der übrigen Flächentheilchen gilt, so hat auch die Summe oder Mittelkraft aller dieser Seitenkräfte dieselbe Grösse und Lage, wie wenn jene Querschnittsebene F_1 selbst die Druckfläche bildete, ist also vollkommen unabhängig von der Form der Endfläche des Kolbens. Da ferner die einzelnen Seitenkräfte $p\,\Delta$ ein System von gleichgerichteten Parallelkräften bilden, deren Grössen den Flächentheilen Δ, auf welche sie wirken, proportional sind, so ist (nach § 44 und § 48) als Angriffspunkt jener Mittelkraft der Schwerpunkt der Fläche F_1 zu betrachten.

Die Wände der cylindrischen Ansatzröhre dienen dem Kolben als Führung und verhindern jede Bewegung desselben mit Ausnahme einer Verschiebung in der Achsenrichtung desselben. Es sind daher die parallel zur Achsenrichtung wirkenden Seitenkräfte

der Druckkräfte die einzigen, welche einen Einfluss auf den Gleichgewichtszustand des Kolbens haben können, und wenn irgend ein Theil der krummen Fläche sich zerlegen lässt in Flächentheilchen, welche je paarweise gleich grosse entgegengesetzte Druckkräfte als Beiträge zu dem ganzen in der Achsenrichtung wirkenden Drucke liefern — wie z. B. die beiden Flächentheilchen *ab* und *cd*, deren gemeinschaftliche Projection das Flächentheilchen *mn* bildet — so können sämmtliche gegen diesen Theil der krummen Fläche wirkenden Druckkräfte als ohne Einfluss auf jenen Gleichgewichtszustand ganz unberücksichtigt gelassen werden. Wenn also das Wort „Projection" in dem Sinne aufgefasst wird, dass da, wo die Projectionen von zwei — oder überhaupt einer geraden Anzahl von — Flächentheilchen auf einander fallen, diese Projectionen wie positive und negative Grössen betrachtet werden, welche bei der Summation einander gegenseitig aufheben, so kann man allgemein den Satz aufstellen: Der ganze in der Achsenrichtung der Röhre wirkende Druck der Flüssigkeit gegen den von ihr berührten Theil der Oberfläche eines die Röhre verschliessenden Körpers ist gleich dem Drucke, welchen die Projection der Druckfläche auf einer rechtwinkelig zur Achse der Röhre stehenden Ebene erleiden würde.

Betrachtet man irgend einen Theil der inneren Wandfläche des Gefässes (oder der äusseren Oberfläche eines in die Flüssigkeit eingetauchten Körpers) als Endfläche eines nur in einer bestimmten Achsenrichtung verschiebbaren Kolbens, so kann man den obigen Satz dazu benutzen, um von den Drücken der Flüssigkeit gegen jenen Flächentheil die Mittelkraft aller derjenigen Seitenkräfte zu bestimmen, welche bei rechtwinkeliger Zerlegung in die zu jener (beliebig zu wählenden) Achsenrichtung parallelen Richtungen fallen; und wenn man dieses Verfahren in Bezug auf drei rechtwinkelig zu einander stehende Achsenrichtungen wiederholt, so findet man auf diese Weise, dass die Gesammtwirkung der Flüssigkeit gegen jene Fläche allemal durch drei rechtwinkelig zu einander gerichtete Mittelkräfte sich darstellen lässt, welche im Allgemeinen verschiedene Angriffspunkte haben und daher nur in besonderen Fällen durch eine einzige Mittelkraft ersetzt werden können. In dem speciellen Falle: wenn in Bezug auf zwei von jenen drei Achsenrichtungen die Projectionen des betreffenden Flächentheiles — und in Folge dessen die in diese

Richtungen fallenden Mittelkräfte — gleich Null sind, ist die in der dritten Achsenrichtung wirkende Mittelkraft zugleich die Mittelkraft von sämmtlichen gegen den Flächentheil überhaupt wirkenden Druckkräften.

§ 169.

Stärke der Gefässwände.

Die innere Wandfläche eines hohlkugelförmigen Gefässes wird von einer durch den Mittelpunkt gelegten Durchschnittsebene in zwei Halbkugelflächen zerlegt, deren gemeinschaftliche Projection auf dieser Ebene eine Kreisfläche ist vom Durchmesser D gleich der inneren Weite der Hohlkugel (Fig. 663). Wenn das Gefäss mit einer Flüssigkeit angefüllt ist, in welcher ein Druck p pro Flächeneinheit stattfindet, so ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen die Mittelkraft von den gegen jede der beiden Hälften des Gefässes wirkenden Druckkräften gleich dem Drucke $\frac{1}{4} D^2 \pi p$, welchen jene Kreisfläche als Druckfläche erleiden würde. Diese Druckkräfte würden die beiden Hälften von einander trennen, wenn durch die in der ringförmigen Trennungsfläche auftretenden Spannungswiderstände der Gefässwand eine solche Trennung nicht verhindert würde. Bei geringer Wandstärke δ kann der Flächeninhalt der Ringfläche annähernd gleich $D\pi\delta$ gesetzt werden, und für die pro Flächeneinheit in derselben entstehende Spannung S ergiebt sich die Gleichung:

Fig. 663.

$p\frac{D^2\pi}{4}$ $p\frac{D^2\pi}{4}$ D p δ

$$896)\quad S D\pi\delta = p\frac{D^2\pi}{4}, \quad \text{oder:}\ S = \frac{pD}{4\delta}.$$

Nach derselben Gleichung würde auch die Spannung zu bestimmen sein, welche in der ringförmigen Querschnittsfläche einer cylindrischen Röhre hervorgebracht wird durch den Druck der Flüssigkeit gegen die geschlossenen Enden der Röhre. Es entstehen jedoch in einer solchen Röhre ausserdem noch Spannungen, welche rechtwinkelig zu den vorigen gerichtet sind, in der Längendurchschnittsfläche, oder derjenigen Schnittfläche, in welcher die

Röhrenwände von einer durch die Achse der Röhre gelegten Ebene geschnitten werden (Fig. 664 und Fig. 665). Wenn die Länge L der Röhre im Verhältniss zum inneren Durchmesser D sehr gross ist, so kann diese Schnittfläche als Summe zweier Rechtecke betrachtet werden, deren jedes die Länge L und die Breite δ hat, während die Projection der Druckfläche für diesen Fall ein Rechteck ist vom Flächeninhalt DL. Man erhält also für die in der Längendurchschnitts-Fläche stattfindende Spannung S die Gleichung:

Fig. 664.

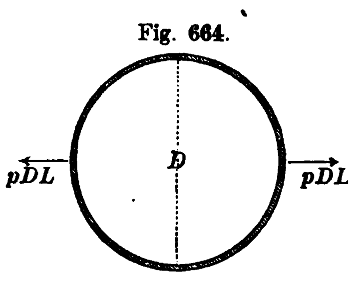
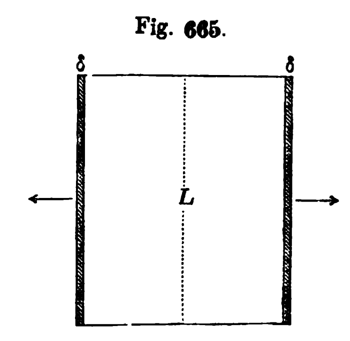


Fig. 665.



$$897)\quad 2SL\delta = pDL, \text{ oder: } S = \frac{pD}{2\delta}\text{*)},$$

welche zeigt, dass diese Spannung doppelt so gross ist, als die in der ringförmigen Querschnittsfläche entstehende Spannung.

Wenn z. B. in einer langen cylindrischen Röhre von 500 Millimeter Durchmesser und 20 Millimeter Wandstärke die Flüssigkeit unter einem Drucke von 0,1 Kil. pro Quadratmillimeter sich befindet, so ergiebt sich für die grösste Spannung in der Röhrenwand der Werth:

---

*) Die obige Gleichung ist nur für kleine Werthe des Quotienten $\frac{\delta}{D}$ als gültig zu betrachten, insofern bei grösseren Werthen desselben die Annahme nicht mehr zulässig sein würde: dass die Spannung gleichförmig über die Schnittfläche sich vertheilt. In Wirklichkeit vertheilt sich die Spannung immer ungleichförmig über diese Fläche, und zwar in der Weise, dass die grösste Spannung S an der inneren Wandfläche stattfindet. Die Untersuchungen der höheren Mechanik ergeben für die Beziehungen zwischen den Grössen S und δ die allgemeinere Gleichung:

$$897_a)\quad S = p\left[1 + \frac{D^2}{2\delta(D+\delta)}\right], \text{ oder: } \delta = \frac{D}{2}\left[\sqrt{\frac{S+p}{S-p}} - 1\right],$$

aus welcher man z. B. bei den oben angenommenen Zahlenwerthen für die wirkliche Maximalspannung die Grösse erhalten würde: $S = 1{,}302$ Kil., also einen Werth, welcher von dem nach Gleichung 897) berechneten verhältnissmässig nur wenig abweicht. Setzt man dagegen z. B. $\delta = D$, so erhält man als wirkliche Maximalspannung $S = \frac{5}{4}p$, während nach Gleichung 897) der

$$S = \frac{0{,}1\ .\ 500}{2\ .\ 20} = 1{,}25 \text{ Kil. pro } \square^{mm}.$$

Die obige Gleichung würde für δ aufgelöst in der Form:

$$898)\quad \delta = \frac{pD}{2S}$$

auch zur Berechnung der erforderlichen Wandstärke δ benutzt werden können, wenn darin für S die Grösse der praktisch zulässigen Spannung substituirt wird. Da indessen bei sehr kleinen Werthen von p und D aus dieser Gleichung für die Wandstärke δ Werthe sich ergeben würden, welche aus anderen Gründen als praktisch unzureichend sich erweisen (theils wegen der Porosität des Materials, theils wegen der Schwierigkeiten, welche mit der praktischen Ausführung verbunden sein würden), so pflegt man statt dessen die bei einem gegebenen Drucke erforderliche Wandstärke zu berechnen nach der Gleichung:

$$899)\quad \delta = \delta_0 + \frac{pD}{2S},$$

in welcher für die von der Beschaffenheit des Materials abhängige Grösse δ_0 als das (dem Drucke $p = 0$ entsprechende) Minimum der praktisch zulässigen Wandstärke und für die Grösse S resp. die Werthe zu substituiren sein würden, z. B.

für Gusseisen:	$\delta_0 = 8^{mm}$,	$S = 4$	Kil.,
„ Schmiedeisen:	$\delta_0 = 3$ „,	$S = 8$	„
„ Kupfer:	$\delta_0 = 4$ „,	$S = 3$	„
„ Blei:	$\delta_0 = 5$ „,	$S = 0{,}25$	„
„ Zink:	$\delta_0 = 4$ „,	$S = 0{,}5$	„
„ Holz:	$\delta_0 = 27$ „,	$S = 0{,}2$	„
„ Stein:	$\delta_0 = 30$ „,	$S = 0{,}15$	„

Es würde also z. B. einer cylindrischen Röhre von 500 Millimetern innerem Durchmesser bei einem Drucke von 0,04 Kil. pro $\square^{mm}$ die Wandstärke zu geben sein resp. für Gusseisen: $\delta = 10^{mm},5$, Schmiedeisen: $\delta = 4^{mm},25$, Kupfer: $\delta = 7^{mm},33$, Blei: $\delta = 45^{mm}$, Zink: $\delta = 24^{mm}$, Holz: $\delta = 77^{mm}$, Stein: $\delta = 97^{mm}$.

§ 170.

Hydraulische Pressen und Zapfenlager.

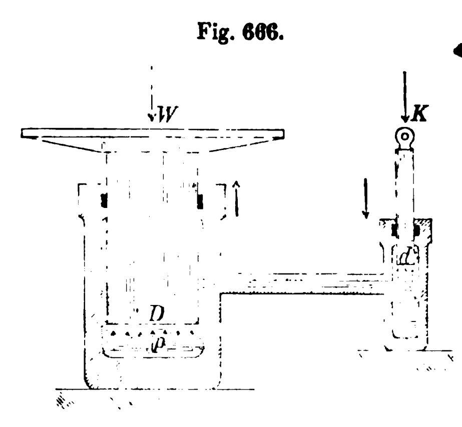
Eine flüssige Masse, welche auf die in Fig. 666 angedeutete Art eingeschlossen ist einerseits von zwei beweglichen cylindrischen Kolben, andererseits von den Wänden der zugehörigen Cylinder und ihrer Verbindungsröhre, befindet sich im Gleichgewichtszustande, wenn der pro Flächeneinheit auf die Oberfläche

---

beträchtlich kleinere Werth $S = \frac{p}{2}$ sich ergeben würde. Hieraus folgt, dass bei sehr hohem Drucke auch die nach Gleichung 898) berechneten Werthe der **Wandstärke** δ zu klein ausfallen würden, und dass für solche Fälle vielmehr die Gleichung 897a) an die Stelle zu setzen sein würde.

derselben übertragene Druck p an allen Stellen dieselbe Grösse hat. Für die in den Achsenrichtungen der beiden Kolben wirkenden Kräfte K und W, welche diesen Druck hervorbringen, würde man also unter der Voraussetzung, dass zwischen den Kolben und den Cylindern keine Reibungswiderstände wirken, nach § 168 die Gleichungen erhalten:

Fig. 666.



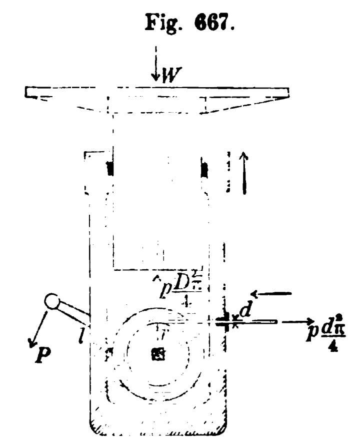
$$900)\quad K = p\,\frac{d^2\pi}{4},$$

$$901)\quad W = p\,\frac{D^2\pi}{4},$$

$$902)\quad \frac{W}{K} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Diese Gleichungen würden unter der erwähnten Voraussetzung auch dann noch gelten, wenn jeder von den beiden Kolben eine gleichförmig fortschreitende Bewegung ausführt, also z. B. für den Fall, wenn durch die den kleinen Kolben hineinwärtstreibende Kraft K der grosse Kolben herauswärts gedrängt, und die an demselben wirkende Kraft W als Widerstand dabei überwunden wird. Wenn z. B. $D = 20\,d$ wäre, so würde $W = 400 \,.\, K$ sein, und eine am kleinsten Kolben wirkende Kraft $K = 100$ Kil. würde ausreichen, um am grossen Kolben einen Gegendruck $W = 40\,000$ Kil. zu überwinden.

Fig. 667.



Da nach § 168 der auf den Kolben in der Achsenrichtung desselben übertragene hydrostatische Druck unabhängig ist von der Form der Endfläche und immer der Querschnittsfläche der durch den Kolben verschlossenen Mündung proportional ist, so bleiben die obigen drei Gleichungen auch in dem Falle noch gültig, wenn der kleine Kolben die Form eines Drahtes hat, welcher um eine im Innern des Cylinders befindliche Rolle sich aufwickelnd durch Umdrehung derselben in den Cylinder hineingezogen wird (Fig. 667). Die Mittelkraft von den auf die Drahtrolle übertragenen hydrostatischen Drücken hat die Grösse

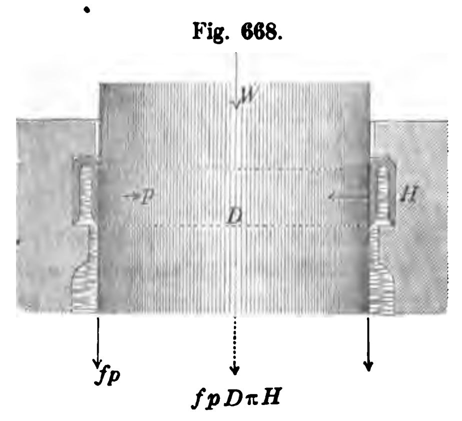
$\frac{1}{4} p d^2 \pi$, und ihre Richtungslinie fällt mit der Achse der Oeffnung zusammen. Diese Kraft bildet in Bezug auf die Rollen-Achse eine excentrisch wirkende Kraft, welche für sich allein wirkend die Rolle nach rechts herumdrehen und den Draht hinauswärts treiben würde. Eine am gleichen Hebelarme r in entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft K, welche diese Drehung verhindern oder die Rolle gleichförmig nach links herumdrehen soll, würde daher die in Gleichung 900) oder 902) angegebene Grösse haben müssen. Für die am Hebelarme l wirkende Kraft P, welche die gleiche Wirkung hervorbringen soll, ergiebt sich demnach die Gleichung:

$$903)\quad \frac{P}{K} = \frac{r}{l}, \text{ oder: } \frac{P}{W} = \frac{r}{l} \cdot \frac{d^2}{D^2}.$$

Setzt man hierin $l = 5r$ und $D = 20d$, so erhält man $W = 2000 \cdot P$. Es würde also, wenn keine Reibungswiderstände vorhanden wären, eine an der Rolle wirkende Kraft $P = 20$ Kil. ausreichen, um einen an dem grossen Kolben wirkenden Widerstand $W = 40000$ Kil. zu überwinden.

Wenn an der Stelle, wo der grosse Kolben in den Cylinder eintritt, der wasserdichte Verschluss auf die in Fig. 668 angedeutete Art bewirkt wird mittelst eines gabelförmig gefaltenen biegsamen (Leder-) Ringes, dessen beide Zweige durch den hydrostatischen Druck selbst einerseits gegen die Aussenfläche des Kolbens, andererseits gegen die innere Wandfläche des Cylinders gepresst werden, so entsteht bei der Bewegung des Kolbens an jeder Flächeneinheit der Berührungsfläche zwischen Kolben und Ring ein Reibungswiderstand von der Grösse $f \cdot p$ = Reibungscoefficient mal Normaldruck. Die ganze Reibungsfläche ist eine Cylindermantelfläche von der Höhe H und vom Durchmesser D, enthält also $D \pi H$ Flächeneinheiten; folglich beträgt der ganze Reibungswiderstand $f p D \pi H$, und man erhält demnach mit Berücksichtigung desselben (statt Gleichung 901) als Gleichgewichts-Bedingung für den grossen Kolben die Gleichung:

Fig. 668.



$$W = \frac{1}{4} p D^2 \pi - f p D \pi H,$$

oder wenn das Verhältniss $\frac{H}{D}$ mit n bezeichnet wird, die Gleichung:

$$904) \quad W = p D^2 \pi \left(\frac{1}{4} - fn \right).$$

Bei der in Fig. 666 angedeuteten Bewegungsrichtung wirkt am kleinen Kolben der Reibungswiderstand der treibenden Kraft K entgegen. Man erhält also als Gleichgewichts-Bedingung für den kleinen Kolben (unter der Voraussetzung, dass am kleinen Cylinder eine ähnliche Vorrichtung sich befindet) die Gleichung:

$$905) \quad K = p d^2 \pi \left(\frac{1}{4} + fn \right).$$

Aus der Verbindung der beiden letzteren Gleichungen ergiebt sich für das Verhältniss der beiden Kräfte W und K der Werth:

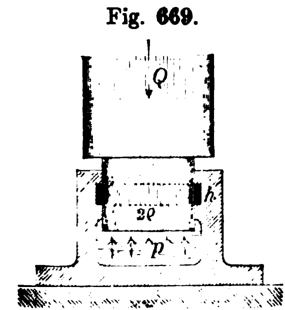
$$906 \quad \frac{W}{K} = \frac{D^2}{d^2} \left(\frac{0{,}25 - fn}{0{,}25 + fn} \right).$$

Da in den grossen Cylinder ebenso viel Flüssigkeit eintritt, als aus dem kleinen Cylinder verdrängt wird, so ist das Verhältniss der beiden Kolben-Geschwindigkeiten V und v gleich dem umgekehrten Verhältniss der beiden Kolbenflächen, also $\frac{V}{v} = \frac{d^2}{D^2}$. Für das Verhältniss der Nutzarbeit zur Total-Arbeit ergiebt sich also der Werth:

$$907) \quad \mathfrak{N} = \frac{W V}{K v} = \frac{W}{K} \frac{d^2}{D^2} = \frac{0{,}25 - fn}{0{,}25 + fn}.$$

Wenn man z. B. $f = 0{,}2 = n$ und $D = 20 d$ setzt, so erhält man $W = 289{,}655\, K$ und $\mathfrak{N} = 0{,}724$. Eine am kleinen Kolben wirkende Kraft $K = 100$ Kil. würde ausreichen, um einen am grossen Kolben wirkenden Gegendruck $W = 28965{,}5$ Kil. als Widerstand zu überwinden, und der Nutzeffect würde 72,4 Procent betragen.

Fig. 669.



Auf ähnliche Weise würde das Moment des Zapfenreibungs-Widerstandes zu berechnen sein für das in Fig. 669 dargestellte Zapfenlager, bei welchem der Zapfendruck Q aufgehoben wird durch den gegen die Bodenfläche $\varrho^2 \pi$ des Zapfens wirkenden hydrostatischen Druck $p \varrho^2 \pi$, und der pro Flächeneinheit wirkende hydrostatische Druck p demnach zu bestimmen sein würde aus der Gleichung:

908) $p\varrho^2\pi = Q$, oder: $p = \frac{Q}{\varrho^2\pi}$.

An jeder Flächeneinheit der Reibungsfläche $2\varrho\pi h$ wirkt ein Reibungswiderstand fp, dessen statisches Moment gleich $fp\varrho$ ist. Für das Moment $\mathfrak{M}$ des zum gleichförmigen Drehen der Welle erforderlichen Kräftepaares ergiebt sich also die Gleichung:

$$\mathfrak{M} = fp\varrho \,.\, 2\varrho\pi h,$$

welche nach Substitution des für p gefundenen Werthes die Form annimmt:

909) $\mathfrak{M} = fQ \,.\, 2h$.

Eine Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem in Gleichung 327) für das auf gewöhnliche Art construirte Zapfenlager gefundenen Werthe zeigt, dass bei gleicher Grösse des Reibungscoefficienten und des Zapfenhalbmessers mittelst der in Fig. 669 dargestellten Anordnung ein Vortheil — d. h. eine Verminderung des Zapfenreibungs-Momentes erreicht wird, sobald $2h < \frac{1}{2}\varrho$ ist, oder sobald die Höhe der Liderung kleiner ist als der vierte Theil des Zapfenhalbmessers.

ACHTUNDZWANZIGSTES CAPITEL.

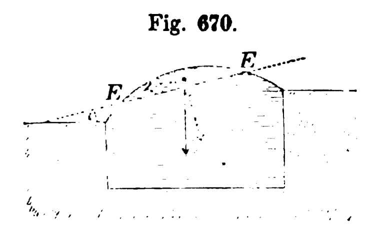
Einfluss der Schwerkraft auf den Druck tropfbar flüssiger Körper.

§ 171.

Druck gegen ebene Flächen.

Die freie Oberfläche einer tropfbar flüssigen Masse, welche unter Einwirkung der Schwerkraft im Gleichgewichtszustande sich befindet, muss eine horizontale Ebene sein. Denn bei jeder abweichenden Form würde eine gegen die Horizontale geneigte Ebene EE auf solche Weise durch die Flüssigkeit hindurchgelegt werden können, dass dieselbe für den oberhalb liegenden Theil der Flüssigkeit eine Gleitfläche bilden würde, auf welcher derselbe hinabgleiten müsste, weil (nach § 166) der Reibungswinkel die Grösse Null hat, folglich kleiner ist als der Neigungswinkel α jener Ebene (Fig. 670).

Fig. 670.

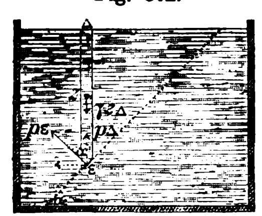


Auf gleiche Weise überzeugt man sich auch in solchen Fällen, wo auf die Theilchen der Flüssigkeit statt der Gewichte ein anderes System von Parallelkräften wirkt, welche den einzelnen Massentheilchen proportional sind,

dass beim Gleichgewichtszustande die freie Oberfläche der Flüssigkeit stets eine rechtwinkelig zur Kraftrichtung stehende Ebene bilden muss; ferner: dass in solchen Fällen, wo die Richtung der Kraft von Ort zu Ort stetig sich ändert, die Gleichgewichts-Oberfläche eine krumme Fläche ist, welche überall rechtwinkelig zur Kraftrichtung steht.

Der Gleichgewichtszustand einer unter Einwirkung der Schwerkraft befindlichen Flüssigkeit würde nicht gestört werden, wenn irgend ein Theil derselben zu einem festen Körper erstarrte. Denkt man sich diesen Theil von der Form einer unten schräg abgeschnittenen verticalen cylindrischen oder prismatischen Säule, deren obere Endfläche einen Theil der horizontalen Oberfläche bildet. so findet man bei Anwendung der für feste Körper geltenden allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen, dass unter Anderen die algebraische Summe der auf diese Säule wirkenden Verticalkräfte gleich Null sein muss (Fig. 671). Da die Druckkräfte, welche von der angrenzenden Flüssigkeit auf die Seitenflächen der Säule übertragen werden, sämmtlich horizontale Richtungen haben, so sind die beiden einzigen Verticalkräfte, welche auf die Säule wirken, erstens das Gewicht derselben, zweitens die verticale Seitenkraft des gegen die untere Endfläche ε wirkenden Druckes. Wenn mit Δ die unendlich kleine Querschnittsfläche, mit z die Höhe der Säule und mit γ das Gewicht der Flüssigkeit pro Cubikeinheit bezeichnet wird, so ist das Gewicht der Säule gleich $\gamma \Delta z$. Wenn ferner mit p der am Fusse der Säule stattfindende Druck pro Flächeneinheit bezeichnet wird, so hat der gegen die unendlich kleine Endfläche ε wirkende Druck die Grösse $p \cdot \varepsilon$, und der Winkel, den die Richtung desselben mit der Verticalen einschliesst, ist gleich dem Neigungswinkel α der unteren Endfläche der Säule gegen die Horizontale. Folglich hat die vertical aufwärts gerichtete Seitenkraft dieses Druckes die Grösse $p \varepsilon \cos \alpha$, oder da $\varepsilon \cos \alpha = \Delta$ ist, die Grösse $p \Delta$. Durch Gleichsetzung der beiden Verticalkräfte erhält man die Gleichung:

Fig. 671.



$$910) \quad p \Delta = \gamma \Delta z, \quad \text{oder:} \quad p = \gamma z.$$

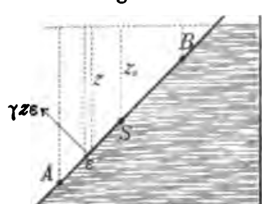
Der gegen das Flächentheilchen ε rechtwinkelig gerichtete Druck, welchen die beiden angrenzenden Theile der Flüssigkeit in diesem Flächentheilchen auf einander gegenseitig übertragen, hat also die Grösse:

$$911) \quad p \varepsilon = \gamma \varepsilon z.$$

Der Druck gegen ein im Abstande z von der Oberfläche befindliches unendlich kleines Flächentheilchen ε ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeits-Säule vom Querschnitte ε und von der Höhe z.

Betrachtet man das Flächentheilchen ε als einer festen Fläche angehörend, welche die Flüssigkeit in zwei Theile zerlegt, so findet man — da in solchem Falle das Wegnehmen des einen Theiles den Gleichgewichtszustand des anderen nicht stören würde — dass die Gültigkeit dieses Satzes unabhängig ist von dem wirklichen Vorhandensein einer vertical oberhalb des Flächenelementes befindlichen Flüssigkeits-Säule, dass also z. B. auch bei dem in Fig. 672 dargestellten Falle der Druck gegen das Flächentheilchen ε nach der oben genannten Regel zu bestimmen sein würde, obwohl hier der vertical oberhalb desselben befindliche Raum gar keine Flüssigkeit enthält.

Fig. 672.



Da die Druckkräfte, welche von der Flüssigkeit auf die unendlich kleinen Theilchen der ebenen Fläche AB übertragen werden, rechtwinkelig zu dieser Ebene wirken, folglich sämmtlich gleiche Richtungen haben, so ist ihre Mittelkraft D gleich ihrer Summe, also:

$$912)\quad D = \Sigma(\gamma \varepsilon z) = \gamma \Sigma(\varepsilon z).$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte kann statt der Producten-Summe $\Sigma(\varepsilon z)$ auch das Product aus der ganzen Druckfläche $AB = F$ in den Abstand z_0 ihres Schwerpunktes S von der Horizontalebene der Oberfläche gesetzt werden; also ist:

$$913)\quad D = \gamma F z_0.$$

Der Druck der Flüssigkeit gegen eine ebene Fläche ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeits-Säule, deren Querschnitt gleich der Druckfläche, und deren Höhe gleich dem Abstande des Schwerpunktes der Druckfläche von der Horizontalebene der Oberfläche ist.

Wenn auf die horizontale Oberfläche J der in einem Gefässe eingeschlossenen Flüssigkeit mittelst eines Kolbens von gleicher Bodenfläche durch die Kraft K ein Druck ausgeübt wird, welcher pro Flächeneinheit die Grösse $p = \frac{K}{J}$ hat, so kann man diesen

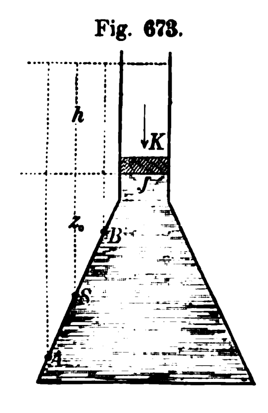


Fig. 673.

Fall auf den vorigen zurückführen, indem man sich den Kolben durch eine auf der Oberfläche ruhende Flüssigkeitsschicht ersetzt denkt, welche den gleichen Druck ausüben würde (Fig. 673). Die Höhe h, welche diese Schicht haben müsste, ist zu bestimmen aus der Gleichung:

914) $\gamma J h = K$, oder: $h = \frac{K}{\gamma J} = \frac{p}{\gamma}$.

Der Druck gegen die ebene Fläche $AB = F$ hat also in diesem Falle die Grösse:

915) $D = \gamma F (z_0 + h)$.

§ 172.

Mittelpunkt des Druckes.

Um den Angriffspunkt der Mittelkraft von den Drücken der Flüssigkeit gegen die einzelnen Theilchen der ebenen Druckfläche, oder den sogenannten „Mittelpunkt des Druckes" zu finden, hat man das statische Moment der Mittelkraft D gleich der Summe der statischen Momente von allen gegen die einzelnen Flächentheilchen ε wirkenden Druckkräften $\gamma \varepsilon z$ zu setzen. Wenn man dabei als Drehachse die horizontale gerade Linie OX wählt, in welcher die Ebene der Druckfläche und die Horizontal-Ebene der Oberfläche einander schneiden (Fig. 674 und Fig. 675), so erhält man die Gleichung:

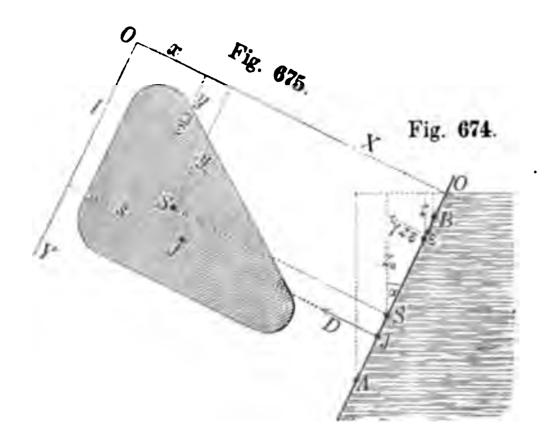


Fig. 675. Fig. 674.

$$D l = \Sigma (\gamma \varepsilon z y),$$

welche für l aufgelöst nach Substitution des in Gleichung 913) für D gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$l = \frac{\Sigma (\gamma \varepsilon z y)}{\gamma F z_0}.$$

Hierin ist $z_0 = y_0 \cos\alpha$ und $z = y \cos\alpha$ zu setzen; man erhält also für den Abstand des Druckmittelpunktes J von der Horizontalen OX die Gleichung:

$$916) \quad l = \frac{\Sigma(\varepsilon y^2)}{F y_0}.$$

Betrachtet man das Linienstück AB in Fig. **674** als Darstellung einer unendlich dünnen Platte von gleicher Form mit der Druckfläche, und denkt man sich diese Platte an der horizontalen Drehachse OX aufgehängt, Pendel-Schwingungen um dieselbe ausführend, so findet man (nach Gleichung 522), dass die Länge l mit dem Abstande des Schwingungspunktes dieser Platte von der Drehachse gleiche Grösse hat; und wenn man die Grösse $\Sigma(\varepsilon y^2)$ als das Trägheitsmoment der Druckfläche in Bezug auf die Achse OX mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet, so nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$917) \quad l = \frac{\mathfrak{T}}{F y_0}.$$

Durch diese Gleichung ist die Lage der Horizontalen bestimmt, in welcher der Mittelpunkt des Druckes liegt. Um die Lage desselben in dieser Horizontalen zu bestimmen, hat man nach Fig. **675**, in welcher die Drücke als rechtwinkelig zur Bildfläche stehend anzusehen sind, das statische Moment der im Punkte J angreifenden Mittelkraft D und die Momenten-Summe sämmtlicher gegen die einzelnen Flächentheilchen ε wirkenden Drücke $\gamma \varepsilon z$ in Bezug auf die in der Ebene der Druckfläche rechtwinkelig zu OX stehende — übrigens beliebig zu wählende — Drehachse OY einander gleich zu setzen; man erhält dann die Gleichung:

$$D \, . \, s = \Sigma(\gamma \varepsilon z x),$$

welche für s aufgelöst nach Substitution des in Gleichung 913) für D gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$s = \frac{\Sigma(\varepsilon z x)}{F z_0},$$

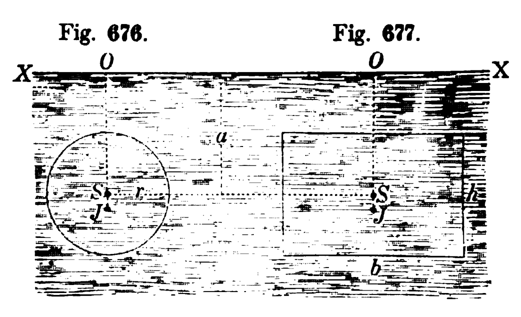
oder, wenn wiederum $z_0 = y_0 \cos\alpha$ und $z = y \cos\alpha$ gesetzt wird, die Form:

$$918) \quad s = \frac{\Sigma(\varepsilon y x)}{F y_0}.$$

Bei einer Vergleichung der für l und s gefundenen Werthe mit den in § 160 für den Mittelpunkt des Stosses gefundenen Gleichungen 857) und 858) findet man, dass der Mittelpunkt des Druckes zusammenfällt mit demjenigen Punkte, welcher für die

an der Drehachse OX hängende ebene Platte von gleicher Form mit der Druckfläche den Mittelpunkt des Stosses bilden würde. Denkt man sich die Achse OY durch den Schwerpunkt der Druckfläche gelegt, so findet man, dass für alle solche Flächen, welche in Bezug auf diese Achse symmetrisch geformt sind, die Grösse s gleich Null wird.

Fig. 676. Fig. 677.



Für das Trägheits-Moment der Kreisfläche Fig. 676 in Bezug auf die Achse XX ergiebt sich aus der Verbindung der beiden Gleichungen 483) und 488) der Werth $\mathfrak{T} = \frac{1}{4} r^4 \pi + r^2 \pi a^2$; man erhält also nach Gleichung 917), wenn darin ausserdem $F = r^2 \pi$ und $y_0 = a$ substituirt wird, die Gleichung:

$$919)\quad OJ = l = \frac{\frac{\pi}{4} r^4 + r^2 \pi a^2}{r^2 \pi a} = a\left(1 + \frac{1}{4}\frac{r^2}{a^2}\right),$$

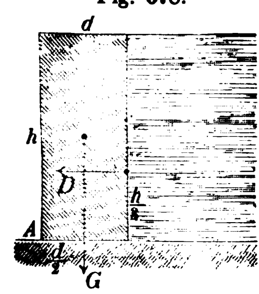
welche zeigt, dass der Mittelpunkt des Druckes dem Schwerpunkte S um so mehr sich nähert, je kleiner das Verhältniss $\frac{r}{a}$ ist.

Für die Rechteckfläche Fig. 677 ist $\mathfrak{T} = \frac{1}{12} b h^3 + b h a^2$, ferner $F = bh$ und $y_0 = a$ zu substituiren; man erhält also die Gleichung:

$$920)\quad OJ = l = \frac{\frac{1}{12} b h^3 + b h a^2}{bha} = a\left(1 + \frac{1}{12}\frac{h^2}{a^2}\right),$$

welche zeigt, dass $l = \frac{2}{3} h$ wird, wenn die obere Seite des Rechtecks in der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit liegt.

Fig. 678.



Aus den Gleichungen 913) und 920) ergiebt sich, dass der Druck des Wassers gegen die in Fig. 678 dargestellte senkrechte Mauer für jede Längeneinheit derselben die Grösse:

$$921)\quad D = \frac{\gamma h^2}{2}$$

hat, und dass der Angriffspunkt dieses Druckes — von unten gerechnet — im ersten Drittel der Höhe liegt. Für diejenige Dicke d, welche die Mauer mindestens haben muss, wenn dieselbe durch den Druck D nicht um die Kante A gedreht werden soll, erhält man also die Gleichung:

$$922)\quad D \cdot \frac{h}{3} = G \cdot \frac{d}{2},$$

in welcher G das Gewicht der Mauer bezeichnet. Wenn mit γ_1 das Gewicht des Mauerwerks pro Cubikeinheit bezeichnet wird, so ist $G = \gamma_1 d h$ zu setzen, und die obige Gleichung nimmt nach Substitution der für D und G gefundenen Werthe die Form an:

$$923)\quad \frac{\gamma h^3}{6} = \frac{\gamma_1 h d^2}{2},\ \text{oder:}\ \frac{d}{h} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

Diejenige Dicke, welche die Mauer mindestens haben muss, wenn dieselbe durch den Druck D nicht auf ihrer Unterlage fortgeschoben werden soll, findet man aus der Gleichung:

$$924)\quad D = f G,$$

in welcher f den Reibungs-Coefficienten bezeichnet. Die letztere Gleichung nimmt nach Substitution der für D und G gefundenen Werthe die Form an:

$$925)\quad \frac{\gamma h^2}{2} = f \gamma_1 d h,\ \text{oder:}\ \frac{d}{h} = \frac{1}{2f} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Um die wirklich erforderliche Dicke zu bestimmen, hat man das Verhältniss $\frac{d}{h}$ gleich dem grösseren von den beiden Werthen zu setzen, welche aus den Gleichungen 923) und 925) sich ergeben.

Wenn z. B. $\gamma_1 = 2\gamma$ und $f = \frac{2}{3}$ gesetzt wird, so erhält man nach Gleichung 923): $\frac{d}{h} = 0{,}408$ und nach Gleichung 925): $\frac{d}{h} = 0{,}375$. Für die in diesem Falle erforderliche Dicke der Mauer ergiebt sich also die Bedingung:

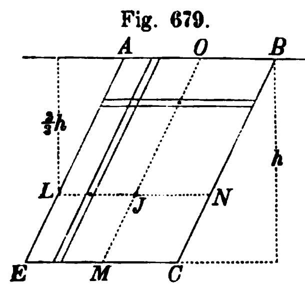
$$d \geqq 0{,}408 \,.\, h.$$

Die Gleichsetzung der beiden in Gleichung 923) und Gleichung 925) gefundenen Ausdrücke führt zu der Gleichung:

$$\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1}} = \frac{1}{2f} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1},\ \text{oder:}\ \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{3}{4f^2},$$

aus welcher man für $f = \frac{2}{3}$ den Werth: $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{27}{16}$ erhält. Wenn also $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ grösser ist als $\frac{27}{16}$, so ist die Mauerstärke nach Gleichung 923) zu berechnen; wenn dagegen $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ kleiner ist als $\frac{27}{16}$, so ist die Mauerstärke nach Gleichung 925) zu berechnen.

Fig. 679.

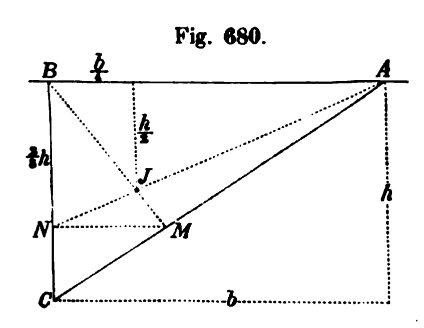


Um den Mittelpunkt des Druckes für die Parallelogramm-Fläche $ABCE$ (Fig. 679) zu finden, hat man sich dieselbe zerlegt zu denken in unendlich schmale Flächenstreifen — das eine Mal in solche, welche der Seite AE, das andere Mal in solche, welche der Seite AB parallel sind. Für jeden der ersteren Flächenstreifen liegt der Mittelpunkt des Druckes im Abstande $\frac{2}{3}h$ von der Seite AB (vergl.

Fig. 421 und Fig. 441), und für jeden der horizontalen Streifen in der Mitte desselben. Der gesuchte Punkt J ist also der Durchschnittspunkt der Halbirungslinie OM und der im Abstande $\frac{2}{3}h$ von der Seite AB liegenden Horizontalen LN.

Auf analoge Weise findet man als Mittelpunkt des Druckes für die Dreieckfläche ABC (Fig. 680) — indem man sich dieselbe zerlegt denkt in unendlich schmale Flächenstreifen, das eine Mal in solche, welche der Seite BC, das andere Mal in solche, welche der Seite AC parallel sind — den Durchschnittspunkt der beiden Linien AN und BM, welche die im Abstande $\frac{2}{3}h$ von der Seite AB liegenden Punkte der Seiten BC und AC resp. mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbinden.

Fig. 680.

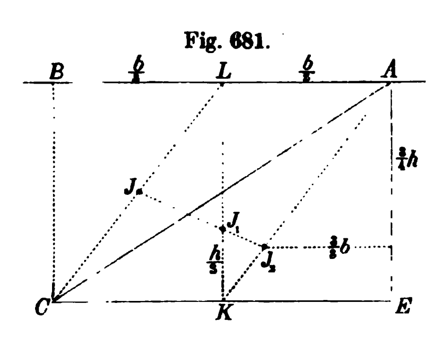


Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABJ und NMJ (deren Seiten-Verhältniss gleich 3:1 ist) ergeben sich als Coordinaten des Punktes J in Bezug auf den Punkt B die Grössen:

$$s = \frac{1}{4}b \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{2}h.$$

Der Mittelpunkt des Druckes für das Dreieck AEC (Fig. 681) liegt in der Linie AK, welche den Mittelpunkt der Seite EC mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte A verbindet, zugleich auch in der Verlängerung der Linie JJ_1, welche die Mittelpunkte des Druckes resp. des Dreiecks ABC und des Rechtecks $ABCE$ mit einander verbindet. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke LJJ_1 und KJ_2J_1 (deren Seiten-Verhältniss gleich 2 : 1 ist) ergeben sich als Coordinaten des Punktes J_2 in Bezug auf den Punkt A die Grössen:

Fig. 681.



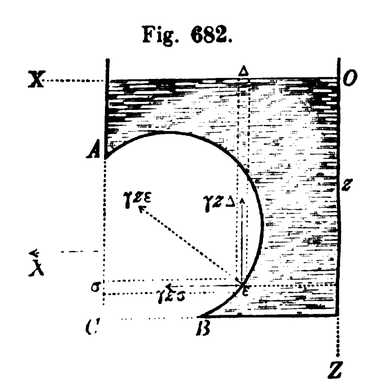
$$s = \frac{3}{8}b \quad \text{und} \quad t = \frac{3}{4}h.$$

§ 173.

Druck gegen krumme Flächen.

Auf gleiche Weise wie in § 168 mit Bezug auf Fig. **662** gezeigt wurde, ergiebt sich auch hier, dass die gegen die unendlich kleinen Theilchen der krummen Fläche wirkenden Drücke im Allgemeinen durch eine einzige Mittelkraft n i c h t ersetzt werden können. Denkt man sich den gegen das Flächentheilchen ε wirkenden Druck $\gamma z \varepsilon$ zerlegt nach drei rechtwinkelig zu einander gerichteten Achsen, von denen die eine OZ vertical steht, und die anderen beiden OX und OY horizontale Richtungen haben, so findet man, dass die verticale Seitenkraft $\gamma z \Delta$ (Gleichung 910) so gross ist, wie das Gewicht einer verticalen Flüssigkeitssäule sein würde, welche oben durch die Horizontal-Ebene der Oberfläche und unten durch das Flächentheilchen selbst begrenzt ist (Fig. **682**). Diese Kraft ist vertical aufwärts oder vertical abwärts gerichtet, jenachdem die Richtung des Druckes $\gamma \varepsilon z$ nach oben hin oder nach unten hin von der Horizontalen abweicht. Die Gesammtwirkung dieser Verticaldrücke lässt sich im Allgemeinen durch eine Verticalkraft Z darstellen, welche gleich der algebraischen Summe jener verticalen Seitenkräfte ist — kann jedoch in dem besonderen Falle, wenn diese algebraische Summe gleich Null ist, ausnahmsweise auch ein Kräftepaar bilden.

Fig. **682**.



Die der Achse OX parallele Seitenkraft $\gamma z \sigma$ ist gleich dem Drucke, welchen die Vertical-Projection σ des Flächenelements ε auf der rechtwinkelig zu OX stehenden Vertical-Ebene erleiden würde. Die Mittelkraft X aller in dieser Richtung wirkenden Seitenkräfte ist gleich deren algebraischer Summe, also ihrer Grösse, Richtung und Lage nach gleich dem Drucke, welchen die ganze Vertical-Projection AC der krummen Fläche auf dieser Vertical-Ebene erleiden würde, wobei das Wort „Projection" in dem mit Bezug auf Fig. **662** in § 168 erklärten Sinne zu nehmen ist. Auf gleiche Weise ist der gesammte Horizontaldruck Y in der rechtwinkelig zur Ebene der Figur stehenden Richtung OY zu bestimmen.

Wenn z. B. die krumme Oberfläche eines Kugel-Octanten, dessen drei geradlinige Kanten den drei Coordinaten-Achsen parallel sind, die Druckfläche bildet (Fig. 683 und Fig. 684), so ist von den Horizontaldrücken X und Y ein jeder gleich dem Drucke, welchen die quadrantenförmige Vertical-Projection der Druckfläche erleiden würde, also (nach Gleichung 913 und Gleichung 159):

Fig. 683.

$$X = Y = \frac{\gamma r^2 \pi}{4}\left(h - \frac{4r}{3\pi}\right),$$

und die Abstände ihrer Richtungslinien von der Horizontalebene der Oberfläche haben (nach Gleichung 917 und Gleichung 615) die Grösse:

$$l = \frac{\frac{1}{16} r^4 \pi - \frac{1}{4} r^2 \pi \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 + \frac{1}{4} r^2 \pi \left(h - \frac{4r}{3\pi}\right)^2}{\frac{1}{4} r^2 \pi \left(h - \frac{4r}{3\pi}\right)}.$$

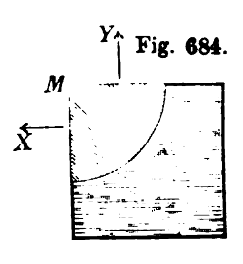


Fig. 684.

Um den gesammten Vertical-Druck gegen die krumme Fläche zu bestimmen, hat man das Gewicht eines flüssigen Körpers zu berechnen, dessen Inhalt man erhält, indem man den Inhalt des Kugel-Octanten $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{4}{3} r^3 \pi\right)$ subtrahirt von dem Inhalte $\frac{1}{4} r^2 \pi h$ einer Säule, deren Höhe gleich h ist, und deren Grundfläche $\frac{1}{4} r^2 \pi$ die quadrantenförmige Horizontal-Projection der Druckfläche bildet; folglich ist:

$$Z = \gamma \left(\frac{1}{4} r^2 \pi h - \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi\right).$$

§ 174.

Auftrieb.

Wenn der ganze von der Flüssigkeit berührte Theil der inneren Wandfläche des die Flüssigkeit enthaltenden Gefässes die Druckfläche bildet, so ergiebt sich, dass für diesen Fall sowohl $X = 0$ als $Y = 0$ ist; da die Vertical-Projection dieser Fläche für jede beliebige Lage der verticalen Projections-Ebene gleich Null ist (Fig. 685). Die Mittelkraft aller gegen die einzelnen Theilchen der Druckfläche wirkenden Drücke ist daher in diesem Falle eine Verticalkraft Z, welche zugleich die Mittelkraft der verticalen Seitenkräfte aller jener Drücke bildet. Der Ueberschuss des gegen das Flächentheilchen m wirkenden Verticaldruckes über den gegen das senkrecht oberhalb desselben liegende Flächentheilchen n wirkenden Verticaldruck ist gleich der Differenz zwischen den Gewichten, welche die verticalen Flüssigkeits-

Säulen *ml* und *nl* haben würden, also gleich dem Gewichte der Säule *mn*. Folglich ist die Mittelkraft *Z* zugleich die Mittelkraft von den Gewichten sämmtlicher verticalen Säulen, aus welchen die ganze flüssige Masse besteht, d. h. gleich dem Gewichte der ganzen flüssigen Masse *ACB*, und die Richtungslinie dieser Kraft fällt mit der Verticalen des Schwerpunktes *J* der flüssigen Masse zusammen.

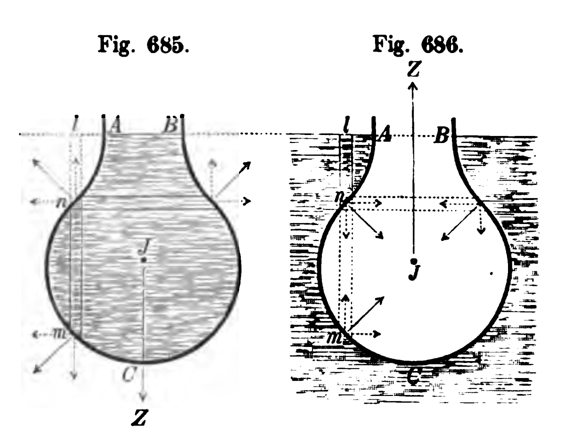


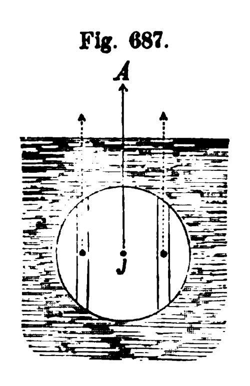
Fig. 685. Fig. 686.

Denkt man sich von den Kräften, deren Mittelkraft *Z* ist, die Richtung jeder einzelnen in die entgegengesetzte verwandelt, so findet man, dass in diesem Falle auch die Mittelkraft *Z* die entgegengesetzte Richtung annehmen würde. Die Mittelkraft sämmtlicher von der Gefässwand auf die Flüssigkeit übertragenen Gegendrücke bildet daher eine im Schwerpunkte der Flüssigkeit vertical aufwärts wirkende Kraft *Z* von gleicher Grösse mit dem Gewichte der Flüssigkeit und hält diesem Gewichte das Gleichgewicht. Wenn dieselbe Druckfläche, auf welche bei dem in Fig. 685 dargestellten Falle die Flüssigkeit von der Innenseite her drückt, ein anderes Mal bei gleicher Druckhöhe dem Drucke der Flüssigkeit von aussen her ausgesetzt ist — wie in Fig. 686 — so geht ebenfalls die Richtung des gegen jedes einzelne Flächentheilchen wirkenden Druckes in die entgegengesetzte über, folglich ist die Mittelkraft der von der Flüssigkeit auf die Fläche übertragenen Drücke in diesem Falle vertical aufwärts gerichtet, von gleicher Grösse mit dem Gewichte der flüssigen Masse, welche vorher den Raum *ACB* ausfüllte, und ihren Angriffspunkt bildet der Schwerpunkt dieses Raumes. Diese vertical aufwärts gerichtete Mittelkraft wird der „Auftrieb" genannt.

Auch bei dem in Fig. 687 dargestellten Falle, bei welchem die in sich zurücklaufende, nach allen Seiten hin geschlossene Oberfläche eines ganz von der Flüssigkeit umgebenen Raumes die Druckfläche bildet, ist die Vertical-Projection derselben für jede

Lage der verticalen Projections-Ebene gleich Null, folglich wird die Mittelkraft sämmtlicher auf die Fläche übertragenen Drücke auch in diesem Falle durch den vertical aufwärts gerichteten Auftrieb dargestellt. Denkt man sich den ganzen eingetauchten Raum in verticale Säulen von unendlich kleinen Querschnitts-Dimensionen zerlegt, so findet man, dass der Auftrieb für jeden dieser Raumtheile dem Gewichte der Flüssigkeit, welche denselben ausfüllen würde, seiner Grösse, Richtung und Lage nach gleich und entgegengesetzt ist, dass also der ganze Auftrieb dem Gewichte der Flüssigkeit, welche den ganzen eingetauchten Raum ausfüllen würde, gleich und entgegengesetzt ist. Wenn mit J der Inhalt des eingetauchten Raumes, und mit γ das Gewicht der Flüssigkeit pro Cubikeinheit bezeichnet wird, so ist der Auftrieb:

Fig. 687.



926) $A = \gamma \,.\, J.$

Diese Kraft hängt ausschliesslich ab von Grösse, Form und Lage des eingetauchten Raumes, ist dagegen vollkommen unabhängig von dem, was im Inneren dieses Raumes sich befindet — also z. B. in dem Falle, wenn der eingetauchte Raum von der Substanz eines festen Körpers ausgefüllt ist, unabhängig von dem Gewichte und von der Lage des Schwerpunktes des eingetauchten Körpers. Sowohl für die in Fig. **686** als für die in Fig. **687** dargestellte Lage eines solchen eingetauchten Körpers gilt das allgemeine Gesetz:

Der auf den eingetauchten Körper vertical aufwärts wirkende Auftrieb ist seiner Grösse nach gleich dem Gewichte der aus dem eingetauchten Raume verdrängten Flüssigkeit und hat seinen Angriffspunkt in dem Schwerpunkte des eingetauchten Raumes.

§ 175.

Absolutes, relatives und specifisches Gewicht.

Wenn mit J der Inhalt eines homogenen Körpers bezeichnet wird, und mit q das Gewicht der in jeder Cubikeinheit desselben enthaltenen Masse, so ist das absolute Gewicht des Körpers:

927) $G = q \,.\, J.$

Der Schwerpunkt des homogenen Körpers fällt zusammen mit dem Schwerpunkte des von demselben ausgefüllten Raumes. Wenn der Körper in eine Flüssigkeit ganz eingetaucht ist, d. h. mindestens so weit, dass kein Theil desselben über die Oberfläche hervorragt, so ist der von dem Körper ausgefüllte Raum zugleich der eingetauchte Raum. Der Schwerpunkt dieses Raumes bildet daher den gemeinschaftlichen Angriffspunkt des Gewichtes G und des Auftriebes A. Nach Gleichung 926) ist das Verhältniss des Gewichtes zum Auftriebe:

$$928) \quad s = \frac{G}{A} = \frac{q \cdot J}{\gamma \cdot J} = \frac{q}{\gamma}$$

gleich dem Verhältniss des Gewichtes des eingetauchten Körpers pro Cubikeinheit zu dem Gewichte der Flüssigkeit pro Cubikeinheit. Diese Verhältnisszahl s, welche unabhängig ist von der Wahl der Cubikeinheit und der Gewichtseinheit, wird das „specifische Gewicht" des Körpers in Bezug auf die Flüssigkeit genannt; und zwar ist — mit Ausnahme derjenigen Fälle, in welchen ausdrücklich eine andere Flüssigkeit als solche bezeichnet wird — unter jener Flüssigkeit immer das „Wasser" zu verstehen. Das specifische Gewicht des Wassers selbst ist unter dieser Voraussetzung gleich Eins zu setzen, und für die specifischen Gewichte anderer Körper ergeben sich alsdann die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

Specifische Gewichte.

Gusseisen	6,6	bis	7,9	Blei	11,2	bis	11,5
Schmiedeisen	7,4	„	7,9	Messing	7,8	„	8,7
Gussstahl	7,8	„	8,1	Silber	10,1	„	10,6
Kupfer	8,6	„	9,0	Gold	18,6	„	19,5
Zink	6,9	„	7,8	Platin	19,3	„	22,1
Zinn	7,1	„	7,6	Aluminium	2,5		
Granit	2,5	„	3,0	Kalkmörtel	1,6	bis	1,8
Basalt	2,4	„	3,3	Sand	1,2	„	1,9
Kieselstein	2,3	„	2,7	Erde	1,4	„	2,4
Kalkstein	2,4	„	2,8	Lehm	1,5	„	2,8
Marmor	2,5	„	2,9	Steinkohle	1,2	„	1,8
Sandstein	1,9	„	2,7	Glas	2,5	„	3,8
Ziegelstein	1,4	„	2,3	Eis	0,926		
Eichenholz	0,62	„	1,17	Pockholz	1,26	bis	1,34
Tannenholz	0,5	„	0,9	Kork	0,24		
Pappelholz	0,35	„	1,02	Kautschuk	0,93		
Meerwasser	1,02	„	1,03	Alkohol	0,79		
Oel	0,91	„	0,94	Quecksilber	13,6		
Atmosphärische Luft	0,001 293			Wasserstoffgas	0,000 089 4.		

Wenn man (nach Gleichung 928) die Grösse q ausdrückt durch das specifische Gewicht des Körpers, so erhält man für das absolute Gewicht desselben die Gleichung:

$$929)\quad G = s \,.\, \gamma J,$$

d. h. man findet das absolute Gewicht des Körpers, indem man das Gewicht einer Wassermasse von gleichem Rauminhalte multiplicirt mit dem specifischen Gewichte des Körpers.

Ein Cubikmeter Wasser wiegt 1000 Kil. Das specifische Gewicht des Bleis ist im Mittel gleich 11,35; folglich wiegt ein Cubikmeter Blei 11 350 Kil.

Der Ueberschuss des absoluten Gewichtes über den Auftrieb bildet das „relative“ oder „scheinbare“ Gewicht des in die Flüssigkeit eingetauchten Körpers und hat die Grösse:

$$930)\quad Q = G - A = \gamma J (s - 1).$$

Das Verhältniss des relativen Gewichtes zum absoluten Gewichte ist also:

$$931)\quad \frac{Q}{G} = \frac{s-1}{s}.$$

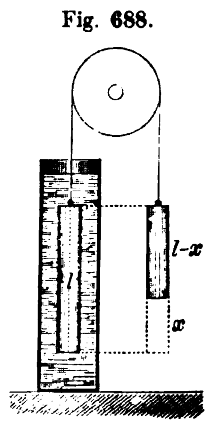
Wenn eine Bleimasse von 1 Cubikmeter Inhalt in Wasser eingetaucht wird, so vermindert sich das Gewicht derselben scheinbar in dem Verhältniss von 11,35 zu 10,35, und der Unterstützungspunkt würde einen Druck von 10 350 Kil. erleiden, während ausserhalb des Wassers dieser Druck 11 350 Kil. betragen würde.

Die obige Gleichung nimmt für s aufgelöst die Form an:

$$932)\quad s = \frac{G}{G - Q}.$$

Wenn man mittelst einer Wage das eine Mal das absolute Gewicht, das andere Mal das relative Gewicht des in Wasser eingetauchten Körpers bestimmt hat, so findet man das specifische Gewicht des Körpers, indem man das absolute Gewicht dividirt durch den Ueberschuss des absoluten Gewichtes über das relative Gewicht.

Fig. 688.



Das specifische Gewicht lässt sich auch als Verhältniss von zwei Längengrössen darstellen. Wenn zwei aus gleichem Stoffe bestehende Cylinder vom Querschnitt Eins an einer gleicharmigen Wage (oder an einem über eine Rolle gelegten Faden) im Gleichgewicht hängen — der eine im Wasser eingetaucht, der andere ausserhalb desselben befindlich (Fig. 688) — so wird bei dem eingetauchten Cylinder der Ueberschuss seines absoluten Gewichtes durch den Auftrieb aufgewogen. Für das specifische Gewicht ergiebt sich demnach die Gleichung:

933) $s \gamma x = \gamma l$, oder: $s = \frac{l}{x}$.

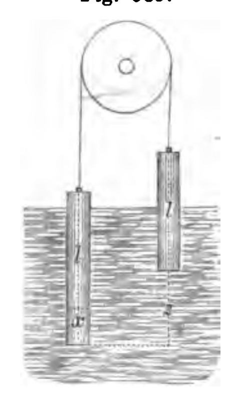
Es würden also z. B. die Längen von zwei Blei-Cylindern, welche auf solche Art einander die Wage halten, wie 11,35 zu 10,35 sich verhalten.

§ 176.

Wirkung des Auftriebes bei theilweise eingetauchten Körpern.

Zwei theilweise eingetauchte Cylinder vom Querschnitte Eins, von ungleicher Länge und von gleichem specifischen Gewichte, halten an den Endpunkten eines gleicharmigen Wagebalkens (oder eines über eine ohne Reibung drehbare Rolle gelegten Fadens) hängend einander im Gleichgewichte, wenn der Gewichtsüberschuss des schwereren und in Folge dessen tiefer eingetauchten Cylinders aufgewogen wird durch den Ueberschuss des Auftriebes. Für die dem specifischen Gewichte s und der Längen-Differenz x entsprechende Gleichgewichtslage ergiebt sich also nach Fig. **689** die Bedingungs-Gleichung:

Fig. 689.



934) $s \gamma x = \gamma z$, oder: $s = \frac{z}{x}$.

Die Rolle befindet sich dabei im stabilen Gleichgewichtszustande, insofern bei einer Drehung derselben — sowohl nach der einen als nach der anderen Seite hin — die damit verbundenen Aenderungen der Auftriebe ein in entgegengesetzter Richtung drehendes Kräftepaar bilden würden.

Der Druck des in einen cylindrischen Gefässe enthaltenen Wassers gegen die horizontale Bodenfläche des Gefässes ist (nach § 172) unter allen Umständen gleich dem Gewichte der cylindrischen Wassersäule, welche die Höhe des Wasserspiegels über der Bodenfläche zur Höhe und die Bodenfläche selbst zur Grundfläche hat. Wenn durch eingetauchte Körper ein Theil des Wassers verdrängt und in Folge dessen ein Steigen des Wasserspiegels hervorgebracht wird, so wächst jener Druck in gleichem Verhältniss mit der Zunahme der Wasserstandshöhe in dem Gefässe.

Die in Fig. **690** dargestellte Doppelrolle befindet sich unter Einwirkung der vier symmetrisch auf beide Seiten vertheilten Belastungen — bestehend an jeder Seite in einem theilweise mit

Wasser gefüllten cylindrischen Gefässe und einem in das Wasser hineinhängenden cylindrischen Körper — in stabilem Gleichgewichtszustande. Wenn durch das Anhängen des Uebergewichtes P an der linken Seite eine Drehung der Rolle um den Winkel α hervorgebracht wird (Fig. 691), so entfernt sich in dem Gefässe links der eingetauchte Cylinder von dem Boden des Gefässes um die Grösse:

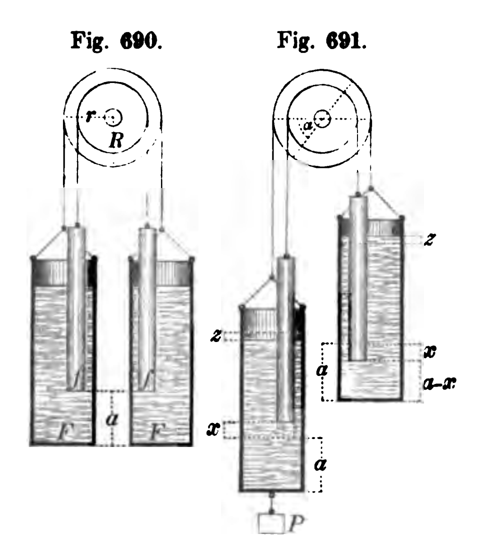


Fig. 690. Fig. 691.

$$935)\quad x = (R - r)\,\alpha,$$

während in dem Gefässe rechts der eingetauchte Cylinder um eben so viel dem Boden sich nähert. In Folge dessen findet in dem Gefässe links eine Verminderung und in dem Gefässe rechts eine Vermehrung der Wasserstandshöhe statt von der Grösse:

$$636)\quad z = \left(\frac{f}{F-f}\right)x.$$

In dem Gefässe links wird der Druck des Wassers gegen den Boden, um die Grösse $\gamma F z$ vermindert, während in dem Gefässe rechts der Bodendruck um eben dieselbe Grösse vermehrt wird. Diesen beiden Aenderungen entspricht eine zwischen den statischen Momenten der an dem Hebelarme R wirkenden Belastungen entstehende Differenz von der Grösse $2\gamma F z R$.

Die Eintauchungstiefe des in das Gefäss links hinabhängenden Cylinders vermindert sich um die Grösse $x + z$; folglich ist $\gamma f(x + z)$ die Grösse, um welche der Auftrieb abnimmt, oder das am Hebelarme r wirkende relative Gewicht des Cylinders zunimmt. Ebenso gross ist in dem Gefässe rechts die Abnahme des relativen Gewichtes des in das Gefäss hinabhängenden Cylinders. Diesen letzteren beiden Aenderungen entspricht eine zwischen den statischen Momenten der an dem Hebelarme r wirkenden relativen Gewichte entstehende Differenz von der Grösse $2\gamma f(x + z)\,r$.

Durch das Uebergewicht P kommt ein drittes statisches Mo-

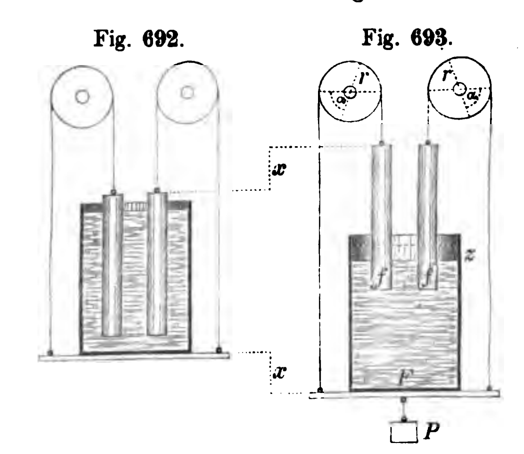
ment hinzu von der Grösse PR. Die algebraische Summe der drei neu hinzugekommenen statischen Momente muss gleich Null sein, also ist:

$$937)\quad 0 = PR - 2\gamma F z R + 2\gamma f(x + z)\, r.$$

Wenn man hierin für x und z die oben gefundenen Werthe substituirt, so erhält man für den durch das Uebergewicht P hervorgebrachten Ausschlagwinkel α die Gleichung:

$$938)\quad \alpha = \frac{PR\,(F - f)}{2\gamma F f\,(R - r)^2}.$$

Bei der in Fig. **692** dargestellten Anordnung wird die an den beiden äusseren Fäden hängende Last — bestehend in der Platte nebst dem auf der Platte stehenden cylindrischen Wassergefässe — im Gleichgewicht gehalten durch die an den beiden inneren Fäden hängende Last — bestehend in den relativen Gewichten der beiden theilweise eingetauchten Cylinder. Wenn durch das Anhängen des Uebergewichtes P bewirkt wird, dass die Platte um die Grösse



$x = r\alpha$ sinkt (Fig. **693**), so werden gleichzeitig die beiden Cylinder um dieselbe Grösse steigen, also von dem Boden des Gefässes um die Grösse $2x$ sich entfernen. In Folge dessen sinkt der Wasserstand in dem Gefässe um die Grösse:

$$939)\quad z = 2x \cdot \left(\frac{2f}{F - 2f}\right),$$

und der Bodendruck nimmt ab um die Grösse $\gamma F z$. Dabei vermindert sich die Eintauchungstiefe der beiden Cylinder um die Grösse $2x + z$, und ihr relatives Gewicht erhält dadurch die Zunahme $2\gamma f(2x + z)$. Diese beiden Belastungs-Aenderungen werden durch das Gewicht ausgeglichen, also ist:

$$940)\quad 0 = P - \gamma F z - 2\gamma f(2x + z).$$

Wenn man hierin für z den oben gefundenen Werth substituirt, so erhält man für die durch das Uebergewicht P hervorgebrachte Senkung x die Gleichung:

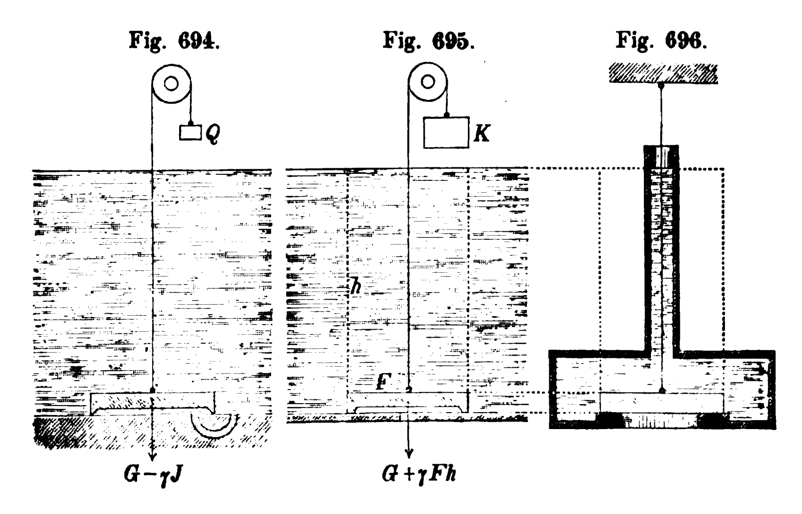
941) $x = \frac{P(F - 2f)}{8\gamma f F}$.

Die zum Emporheben eines ganz unterhalb des Wasserspiegels befindlichen auf der horizontalen Bodenfläche eines mit Wasser gefüllten Gefässes ruhenden Körpers erforderliche Kraft wird im Allgemeinen gleich dem Ueberschusse des absoluten Gewichtes über den Auftrieb oder gleich dem relativen Gewichte des Körpers sein (Gleichung 930); da unter gewöhnlichen Umständen zwischen jenem Körper und seiner Unterstützungsfläche eine mit der übrigen Wassermasse communicirende Wasserschicht sich befindet, und in Folge dessen der Körper als an allen Seiten von Wasser umgeben zu betrachten ist. Für den in Fig. **694** dargestellten Fall z. B. würde die zum Heben des Körpers erforderliche Kraft Q zu bestimmen sein aus der Gleichung:

$$Q = G - \gamma J,$$

in welcher J den wirklichen Rauminhalt des Körpers und G das absolute Gewicht desselben bezeichnet.

Fig. **694**. Fig. **695**. Fig. **696**.



Wenn jedoch auf irgend eine Art bewirkt wird, dass zwischen der Grundfläche des Körpers und seiner Unterlage entweder eine vollkommene Berührung stattfindet, oder statt jener Wasserschicht ein leerer Raum sich befindet, so wird an der Grundfläche der von unten nach oben wirkende hydrostatische Druck, welcher bei dem vorigen Falle einen Theil des Gewichtes G trug, nunmehr wegfallen, und es würde z. B. bei dem in Fig. **695** dargestellten

Falle zum Emporheben des Körpers im ersten Augenblicke die Kraft erforderlich sein:

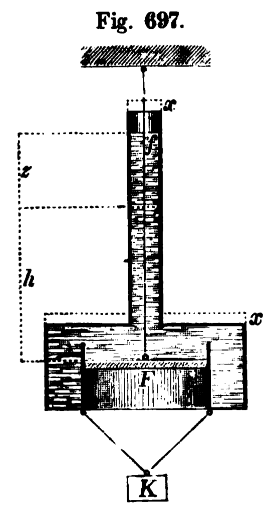
$$942)\quad K = G + \gamma F h.$$

Wenn der Ueberschuss der Kraft K über das Gewicht G mehr betrüge als das Gewicht der Wassermasse und des Gefässes zusammengenommen, so würde bei dem Hinaufziehen des Körpers das ganze Gefäss mit emporgehoben werden. In diesem Falle würde es möglich sein, das Gefäss auf die in Fig. **696** angedeutete Weise aufzuhängen, bei welcher der die Bodenöffnung verschliessende Deckel an einem Faden aufgehängt ist, und an dem Deckel wiederum das Gefäss hängt — letzteres getragen durch den hydrostatischen Druck des in dem Gefässe selbst enthaltenen Wassers. Wenn mit P das Gewicht der ganzen Wassermasse und mit Q das Gewicht des Gefässes selbst (ohne den Deckel) bezeichnet wird, so ist die Bedingungs-Gleichung für die Grenze des Gleichgewichtes:

$$943)\quad \gamma F h = P + Q.$$

Auf demselben Principe beruht der stabile Gleichgewichtszustand des in Fig. **697** dargestellten Apparates. Durch das Anhängen des Uebergewichtes K wird die Spannung des Fadens, an welchem das Ganze hängt, jedenfalls um die Grösse K vermehrt. Wenn das Gefäss um die Grösse x sich senkt, so steigt die Höhe des Wasserspiegels über dem Kolben um die Grösse $z = \frac{F}{f} x - x$, und der auf den Kolben wirkende hydrostatische Druck wächst um die Grösse $\gamma F z = \gamma F x \left(\frac{F}{f} - 1\right)$, welche ebenfalls die Vergrösserung der Spannung des Fadens bildet. Die durch das Uebergewicht K hervorgebrachte Senkung x ist also zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. **697**.



$$944)\quad K = \gamma F x \left(\frac{F}{f} - 1\right).$$

Denkt man sich in die verticale Wand eines mit Wasser gefüllten Gefässes einen um seine horizontale in der Wand-Ebene liegende Achse drehbaren Cylinder von der Länge l eingeschaltet (Fig. **698**), so findet man, dass der gegen die eingetauchte Mantel-

hälfte wirkende horizontale Druck D sich zusammensetzt aus einem Horizontaldrucke H, welcher der rechteckförmigen Vertical-Projection dieser Fläche gegen die Wand-Ebene entspricht, und einer verticalen Seitenkraft A, welche in dem Auftriebe der eingetauchten Cylinderhälfte besteht. Nach Gleichung 913) und Gleichung 920) ist:

$H = \gamma \,.\, 2rl \,.\, h$ und $z = \frac{1}{12} \cdot \frac{(2r)^2}{h}$; folglich: $Hz = \frac{2}{3}\gamma l r^3$.

Es ist ferner nach Gleichung 926): $A = \gamma \frac{r^2\pi}{2} l$, und nach Gleichung 159): $x = \frac{4r}{3\pi}$; folglich: $A \,.\, x = \frac{2}{3}\gamma l r^3$. Da die statischen Momente der beiden Seitenkräfte H und A in Bezug auf den Drehpunkt O einander gleich sind, so geht ihre Mittelkraft D durch den Punkt O hindurch, kann also keine Drehung des Cylinders hervorbringen.

Das Hinwegnehmen des oberen oder unteren Quadranten von der eingetauchten Cylinderhälfte ändert Nichts in dem Horizontal-

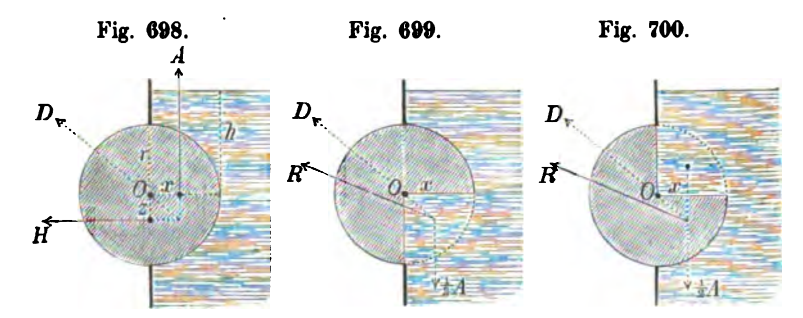


Fig. 698. Fig. 699. Fig. 700.

Drucke und hat in Bezug auf den Vertical-Druck dieselbe Wirkung, wie wenn der dem weggenommenen Theile entsprechende Auftrieb $\frac{1}{2} A = \gamma \frac{r^2\pi}{4} l$ in entgegengesetzter Richtung (also vertical abwärts wirkend) hinzugefügt würde. Hieraus ergiebt sich, dass in jedem der beiden in Fig. **699** und Fig. **700** dargestellten Fälle der Total-Druck R betrachtet werden kann als die Mittelkraft aus der Kraft D und der vertical abwärts am Hebelarme x wirkenden Kraft $\frac{A}{2}$. Dieser Druck R hat also in Bezug auf den Drehpunkt O das statische Moment:

$$945)\quad \frac{1}{2} A x = \frac{1}{3}\gamma l r^3,$$

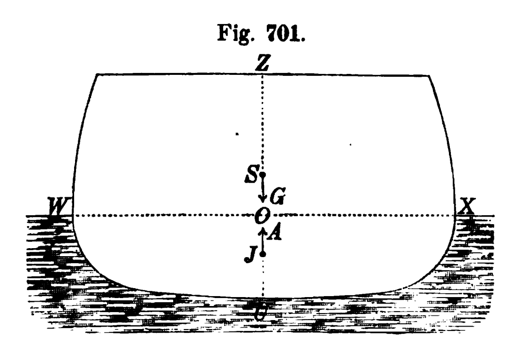
und würde in beiden Fällen eine von links nach rechts gerichtete Drehung hervorbringen.

§ 177.

Stabilität schwimmender Körper. Metacentrum.

Ein schwimmender Körper befindet sich in der Gleichgewichtslage, wenn der dem eingetauchten Raume entsprechende Auftrieb A gleich dem Gewichte G des Körpers ist, und wenn zugleich der Schwerpunkt J des eingetauchten Raumes, als Angriffspunkt des Auftriebes, mit dem Schwerpunkte S des Körpers, als dem Angriffspunkte seines Gewichtes, in einer und derselben Verticalen liegt (Fig. 701). Die bei solcher Gleichgewichtslage mit der Verticalen SJ zusammenfallende Achse ZU des Körpers wird „Schwimm-Achse", und die mit der Ebene des Wasserspiegels WOX zusammenfallende Ebene des Körpers wird „Schwimm-Ebene" genannt.

Fig. 701.

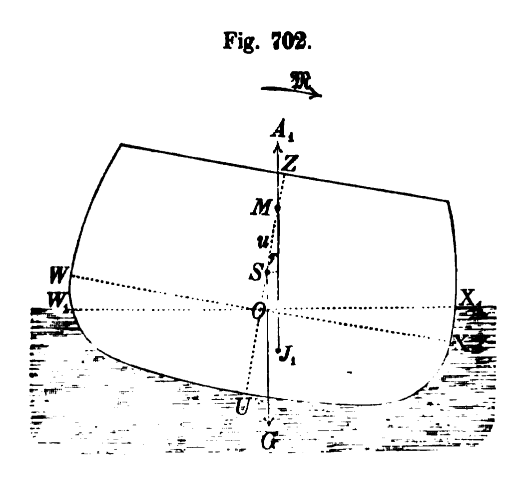


Um die Stabilität der Gleichgewichtslage zu prüfen, hat man sich die Schwimm-Achse des Körpers in eine um den sehr kleinen Elongations-Winkel φ von ihrer verticalen Gleichgewichtslage abweichende Lage gebracht zu denken, und das Moment $\mathfrak{M}$ desjenigen Kräftepaares zu berechnen, welches erforderlich sein würde, um den Körper bei dieser geneigten Lage im Gleichgewicht zu halten. Es soll bei dieser Untersuchung hier vorausgesetzt werden, dass der Körper eine gewisse einfache symmetrische Form hat, nämlich die Form eines Prisma, dessen Längen-Achse rechtwinkelig zu jener verticalen Drehungs-Ebene (also horizontal) gerichtet ist, und dessen Querschnittsfläche symmetrisch halbirt wird von einer rechtwinkelig zu derselben durch die Schwimm-Achse gelegten Ebene. Wenn alsdann die Länge dieses Prisma als Längeneinheit gewählt wird, so bildet die dem eingetauchten Raume entsprechende Inhaltszahl zugleich die Flächenzahl des unter dem Wasserspiegel befindlichen Theiles der Querschnittsfläche, und auf analoge Weise können die einzelnen Theile dieser Fläche den durch

sie repräsentirten Theilen des eingetauchten Raumes substituirt werden.

Die Kräfte, durch welche der Körper in seiner neuen Gleichgewichtslage (Fig. 702) erhalten wird, sind: erstens der neue Auftrieb A_1, zweitens das Gewicht des Körpers, drittens das Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M}$. Da ein Kräftepaar nur durch ein anderes Kräftepaar im Gleichgewichte gehalten werden kann, so müssen die beiden Kräfte A_1 und G ein Kräftepaar bilden, woraus folgt, dass $A_1 = G$ ist. Nach Fig. 702 ist der Hebelarm dieses Kräftepaares gleich $u \,.\, \sin \varphi$, wofür wegen vorausgesetzter Kleinheit des Winkels φ auch $u \,.\, \varphi$ gesetzt werden kann. Die Momente der beiden Kräftepaare müssen einander gleich und entgegengesetzt sein, also ist:

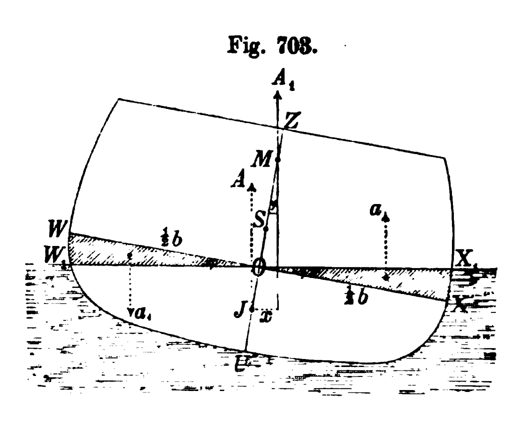
Fig. 702.



946) $\mathfrak{M} = G u \varphi$.

Der neue Auftrieb A_1 kann betrachtet werden als die Mittelkraft aus drei Kräften, nämlich aus dem früheren Auftriebe A, aus dem Auftriebe a, welcher dem an der einen Seite neu eingetauchten Raume entspricht, und aus dem negativen Auftriebe a_1, welcher dem an der anderen Seite über den Wasserspiegel emporgestiegenen Theile des früher eingetaucht gewesenen Raumes entspricht (Fig. 703). Da $A_1 = G = A$ ist, so muss auch $a_1 = a$ sein. Es muss also der neu eingetauchte Raumtheil gleiche Grösse haben mit dem an der

Fig. 703.



anderen Seite über den Wasserspiegel emporgehobenen Raumtheile. Hieraus folgt bei der vorausgesetzten symmetrischen Form des Körpers, dass die jene beiden Raumtheile repräsentirenden Flächentheile zwei gleich grosse Dreieckflächen bilden, deren gemeinschaftliche Spitze mit dem Punkte O zusammenfällt, als dem Durchschnittspunkte der Schwimm-Ebene mit der Schwimm-Achse. Jede dieser Flächen kann betrachtet werden als ein Kreissector oder ein gleichschenkeliges Dreieck von der Grundlinie $\frac{1}{2} b \varphi$ und der Höhe $\frac{1}{2} b$, also ist:

$$947) \quad a = \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{1}{2} b \varphi \cdot \frac{1}{2} b = \frac{1}{8} \gamma b^2 \varphi = a_1.$$

Der Schwerpunkt jedes der beiden Dreiecke liegt im Abstande $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} b = \frac{1}{3} b$ von der Spitze, also bilden die beiden Kräfte a und a_1 ein Kräftepaar vom Hebelarme $\frac{2}{3} b$ und vom Momente:

$$948) \quad \mathfrak{m} = a \cdot \frac{2}{3} b = \frac{1}{12} \gamma b^3 \varphi.$$

Das statische Moment der Mittelkraft A_1 muss gleich der Summe der statischen Momente ihrer drei Seitenkräfte sein in Bezug auf jeden beliebigen Punkt, z. B. auch in Bezug auf den Punkt J, oder — da das Moment der Kraft A in Bezug auf den Punkt J gleich Null ist — gleich der Momenten-Summe der beiden Kräfte a und a_1, d. h. gleich dem Momente des aus diesen beiden Kräften bestehenden Kräftepaares; also ist:

$$949) \quad A_1 \,.\, x = \mathfrak{m}.$$

Wenn mit F der unter dem Wasserspiegel befindliche Theil der Querschnittsfläche (oder auch der Inhalt des ganzen eingetauchten Raumes) bezeichnet wird, so ist $A_1 = A = \gamma F$ zu setzen, und wenn die Höhe des Punktes S über dem Punkte J mit h bezeichnet wird, so kann $x = \overline{JM} \,.\, \sin \varphi = (u + h)\, \varphi$ gesetzt werden. Man erhält also die Gleichung:

$$950) \quad \gamma F \,.\, (u + h)\, \varphi = \mathfrak{m}.$$

Wenn man diesen Werth für $\mathfrak{m}$ in Gleichung 948) substituirt, so nimmt dieselbe für u aufgelöst die Form an:

$$951) \quad u = \frac{b^3}{12 F} - h.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Grösse u unabhängig ist von der Grösse des Elongationswinkels φ (so lange nämlich dieser

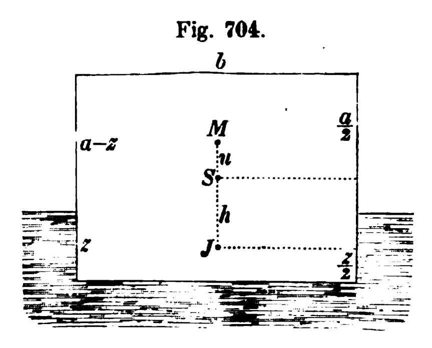
Winkel überhaupt eine geringe Grösse hat). Es giebt also in der Schwimm-Achse einen Punkt M, welcher vor den übrigen Punkten derselben die bemerkenswerthe Eigenschaft voraus hat, bei kleinen Schwankungen des schwimmenden Körpers beständig den Durchschnittspunkt der Schwimm-Achse mit der Richtungslinie des Auftriebes zu bilden. Dieser Punkt wird das „Metacentrum" des schwimmenden Körpers genannt. Aus Gleichung 946) ergiebt sich, dass das dem Elongationswinkel φ entsprechende Drehungsmoment $\mathfrak{M}$ unter übrigens gleichen Umständen der Grösse u proportional ist. Die Stabilität des schwimmenden Körpers ist also um so grösser, je höher das Metacentrum über dem Schwerpunkte liegt, und das Gleichgewicht überhaupt ein stabiles, so lange u grösser ist als Null. Nach Gleichung 951) ist diese Bedingung immer erfüllt, wenn h negativ ist; d. h. das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers ist unter allen Umständen stabil, sobald der Schwerpunkt des Körpers tiefer liegt als der Schwerpunkt des eingetauchten Raumes. Der Gleichgewichtszustand ist dagegen labil, wenn u negativ ist, und indifferent, wenn u gleich Null ist, oder:

$$952)\quad \frac{b^3}{12F} = h,$$

d. h. wenn das Metacentrum mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt.

Für ein homogenes Parallelepipedon vom specifischen Gewichte s, von der Länge Eins, der Höhe a und der Breite b (Fig. 704), findet man zunächst die Eintauchungstiefe z (indem man das Gewicht $G = s\gamma ab$ und den Auftrieb $A = \gamma zb$ einander gleich setzt) aus der Gleichung:

Fig. 704.



$$953)\quad s\gamma ab = \gamma zb, \quad \text{oder:} \quad z = as.$$

Die Querschnittsfläche des eingetauchten Raumes hat den Inhalt:

$$954)\quad F = zb = sab,$$

und die Höhe des Schwerpunktes des ganzen Körpers über dem Schwerpunkte des eingetauchten Theiles hat die Grösse:

$$955)\quad h = \frac{a}{2} - \frac{z}{2} = \frac{a}{2}(1-s).$$

Nach Substitution dieser Werthe erhält man aus Gleichung 951) für die Höhe des Metacentrums über dem Schwerpunkte den Werth:

$$u = \frac{b^3}{12sab} - \frac{a}{2}(1-s),$$

oder wenn das Verhältniss $\frac{b}{a} = n$ gesetzt wird, den Werth:

$$956)\quad u = \frac{a}{12s}\left[n^2 - 6s(1-s)\right].$$

Bei einem Parallelepipedon, dessen specifisches Gewicht gleich $\frac{1}{2}$ ist, und dessen Breite das Sechsfache der Höhe a beträgt, liegt also das Metacentrum in der Höhe: $u = 5{,}75\,a$ über dem Schwerpunkte.

Wenn man $u = 0$ setzt in der obigen Gleichung, so erhält man für denjenigen Werth des Quotienten n, welcher der Grenze der Stabilität oder dem indifferenten Gleichgewichtszustande entspricht, die Gleichung:

$$957)\quad n^2 - 6s(1-s) = 0, \quad \text{oder:} \quad n = \sqrt{6s(1-s)},$$

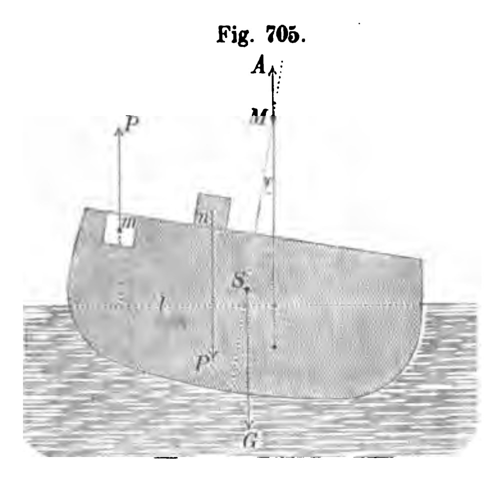
aus welcher z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe der Grössen s und n sich ergeben:

$s =$ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$n =$ 0,735	0,98	1,1225	1,2	1,225	1,2	1,1225	0,98	0,735.

Die Stabilität des Gleichgewichtes erfordert also einen um so grösseren Werth des Verhältnisses der Breite zur Höhe, je mehr das specifische Gewicht dem Werthe 0,5 sich nähert.

Wenn bei einem im stabilen Gleichgewichte schwimmenden prismatischen Körper ein Theil vom Gewichte P an irgend einer Stelle m (ausserhalb des Wassers) hinweggenommen und an irgend einer anderen (in derselben Querschnitts-Ebene liegenden) Stelle n wieder hinzugefügt wird (Fig. 705), so hat diese Aenderung der Gewichtsvertheilung genau dieselbe Wirkung wie das Hinzufügen eines Kräftepaares vom Momente $\mathfrak{M} = P\,.\,l$, dessen Hebelarm l die Horizontal-Projection des Abstandes $\overline{mn}$ bildet. Für den von diesem Kräftepaare hervorgebrachten Ausschlagwinkel φ ergiebt sich aus Gleichung 946) der Werth:

Fig. 705.



$$958)\quad \varphi = \frac{P}{G}\cdot\frac{l}{u}.$$

Wenn z. B. der schwimmende Körper ein Parallelepipedon ist (von der Höhe a, von der Breite $b = 6a$ und vom specifischen Gewichte $s = 0{,}5$) dessen

Metacentrum — wie oben gefunden — in der Höhe $u = 5{,}75\,a$ über dem Schwerpunkte liegt, so bringt eine Verschiebung des Gewichtstheiles $P = 0{,}01\,G$ in der Breitenrichtung um die Grösse $l = 2\,a$ einen Ausschlagwinkel hervor von der Grösse:

$$\varphi = 0{,}01 \cdot \frac{2\,a}{5{,}75\,a} = 0{,}003\,48 = 0{,}2 \text{ Grad.}$$

Anstatt die obige Gleichung zur Berechnung des Ausschlagwinkels φ zu benutzen, kann man dieselbe auch umgekehrt in der Form:

$$959)\quad u = \frac{P}{G} \cdot \frac{l}{\varphi}$$

dazu benutzen, um bei einem Körper von beliebiger Querschnittsform (z. B. bei einem Schiffe) die Lage des Metacentrums zu berechnen, sobald der bei einer gegebenen Veränderung in der Gewichtsvertheilung entstehende Neigungswinkel φ durch directe Beobachtung bestimmt wurde.

Wenn man z. B. beobachtet hätte, dass der Mast eines Schiffes vom Totalgewichte G um den Winkel $\varphi = 0{,}003\,48$ ($= 0{,}2$ Grad) gegen die verticale Gleichgewichtslage sich neigt, sobald ein Theil der Schiffsladung vom Gewichte $P = 0{,}01\,G$ in der Breitenrichtung des Schiffes um die Strecke $l = 4^m$ verschoben wird, so würde aus Gleichung 959) sich ergeben, dass das Metacentrum des Schiffes in der Höhe:

$$u = 0{,}01 \cdot \frac{4}{0{,}003\,48} = 11^m{,}5$$

über dem Schwerpunkte lag; und nachdem auf solche Weise die Lage des Metacentrums gefunden, würde man den durch irgend ein anderes Kräftepaar vom Momente $P_1 \,.\, l_1$ hervorgebrachten Neigungswinkel φ_1 alsdann berechnen können aus der Gleichung:

$$\varphi_1 = \frac{P_1 \,.\, l_1}{G \,.\, u}, \quad \text{oder:} \quad \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{P_1\, l_1}{P l},$$

also z. B. finden, dass in dem hier angenommenen Falle eine Verschiebung des Gewichtes $P_1 = 10\,P$ um die gleiche Strecke $l = 4^m$ eine Neigung des Schiffes um 2 Grad hervorbringen würde.

NEUNUNDZWANZIGSTES CAPITEL.

Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten.

§ 178.

Mariotte'sches Gesetz.

Der Druck, welcher von einer gasförmigen Flüssigkeit auf die einschliessenden Gefässwände übertragen wird, ist unter sonst gleichen Umständen proportional ihrer Dichtigkeit, oder umge-

kehrt proportional der Grösse des Raumes, welchen die Flüssigkeit einnimmt.

Denkt man sich in einem cylindrischen Gefässe zwischen dem festen Boden desselben und einem beweglichen luftdicht schliessenden Kolben eine Gasmasse eingeschlossen, so findet man, dass bei einer Verschiebung des Kolbens der Rauminhalt dieser Gasmasse proportional dem Abstande des Kolbens von dem Boden des Cylinders sich ändert, und dass die Dichtigkeit der Gasmasse umgekehrt proportional diesem Abstande sich ändert. Denn wenn z. B. der Abstand des Kolbens auf den n-ten Theil vermindert, und dadurch die Gasmasse auf den n-ten Theil des vorher von derselben eingenommenen Raumes zusammengedrängt wird, so ist nunmehr in jeder Cubikeinheit des Inhalts n-mal so viel Masse enthalten als bei der anfänglichen Kolben-Stellung, folglich die Dichtigkeit n-mal so gross geworden als vorher. Nach dem Mariotte'schen Gesetze würde in diesem Falle auch der auf jede Flächeneinheit der Kolbenfläche (oder der inneren Wandfläche des Cylinders) übertragene Druck n-mal so gross geworden sein als vorher — vorausgesetzt, dass nicht gleichzeitige sonstige (z. B. Temperatur-) Aenderungen erfolgten. Wenn mit p_1 der anfängliche, mit p der nachherige Druck pro Flächeneinheit bezeichnet wird, und mit x_1 der anfängliche, mit x der nachherige Abstand des Kolbens vom Cylinderboden bezeichnet wird (Fig. 706), so lässt sich das Mariotte'sche Gesetz ausdrücken durch die Gleichung:

Fig. 706.

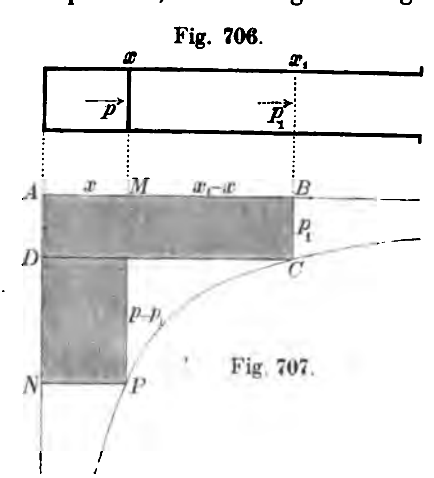


Fig. 707.

$$960)\quad \frac{p}{p_1} = \frac{x_1}{x},$$

oder: $px = p_1 x_1$,

und auf die in Fig. 707 angedeutete Weise graphisch darstellen durch eine Curve, welche den geometrischen Ort bildet für die dem Punkte A gegenüberliegenden Eckpunkte aller Rechtecke von gleichem Flächeninhalte mit dem gegebenen Rechteck $ABCD$. Zugleich stellt die Fläche $MBCP$ die mechanische Arbeit dar, welche der auf jede Flächeneinheit der Kolbenfläche

wirkende veränderliche Druck p bei dem Uebergange des Kolbens aus der Stellung M in die Stellung B verrichten würde, wenn bei dieser Ausdehnung der Gasmasse die Temperatur derselben constant bliebe. Denkt man sich jene Fläche zerlegt in unendlich schmale Streifen von der Breite Δ (Fig. 708), so findet man, dass der ganze Inhalt derselben durch den Ausdruck $\Sigma(p\Delta)$ und die von dem Drucke gegen die ganze Kolbenfläche F verrichtete mechanische Arbeit durch die Gleichung:

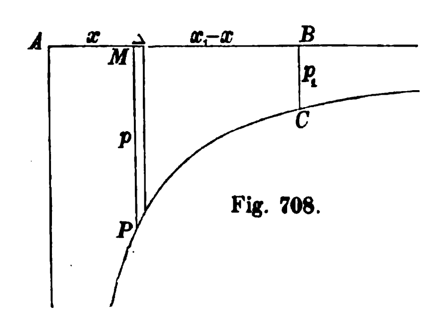


Fig. 708.

$$961)\quad \mathfrak{A} = F \,.\, \Sigma(p\Delta)$$

sich darstellen lässt, welche nach Substitution des für p aus Gleichung 960) sich ergebenden Werthes die Form annimmt:

$$962)\quad \mathfrak{A} = F \,.\, \Sigma\left(\frac{p_1 x_1}{x} \,.\, \Delta\right) = p_1\, x_1\, F \,.\, \Sigma\left(\frac{\Delta}{x}\right),$$

oder wenn das Product $x_1 \,.\, F$ als derjenige Rauminhalt, welcher dem Drucke p_1 entspricht, mit J_1 bezeichnet wird, die Form:

$$963)\quad \mathfrak{A} = p_1\, J_1\, \Sigma\left(\frac{\Delta}{x}\right). \text{ *)}$$

Hierin bedeutet der Ausdruck $\Sigma\left(\frac{\Delta}{x}\right)$ die Summe der einzelnen Quotienten, welche man erhält, indem man jeden der einzelnen Abschnitte Δ, in welche die ganze Strecke $x_1 - x$ zerlegt wurde, durch den Abstand desselben von dem Punkte A dividirt. Auf analoge Weise wie in § 90 die Gleichung 363) gefunden wurde, erhält man als Resultat dieser Summation die Gleichung:

$$964)\quad \mathfrak{A} = p_1\, J_1 \lg\left(\frac{x_1}{x}\right),$$

welcher wegen Gleichheit der Quotienten $\frac{x_1}{x} = \frac{Fx_1}{Fx} = \frac{J_1}{J} = \frac{p}{p_1}$ auch die Formen gegeben werden können:

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung würde diese Gleichung die Form erhalten:

$$\mathfrak{A} = p_1\, J_1 \int_x^{x_1} \frac{dx}{x} = p_1\, J_1\, (\lg x_1 - \lg x) = p_1\, J_1 \lg\left(\frac{x_1}{x}\right).$$

$$965)\quad \mathfrak{A} = p_1 J_1 \lg\left(\frac{J_1}{J}\right) = p_1 J_1 \lg\left(\frac{p}{p_1}\right)$$
$$= pJ \lg\left(\frac{J_1}{J}\right) = pJ \lg\left(\frac{p}{p_1}\right).$$

Derselbe Ausdruck negativ genommen bildet die negative mechanische Arbeit, welche der Druck der Gasmasse gegen die Kolbenfläche bei der rückgängigen Bewegung des Kolbens von B nach M verrichten würde.

Setzt man z. B. $p_1 = 10\,336$ Kil. pro $\square^m$ (entsprechend dem Drucke der gewöhnlichen atmosphärischen Luft bei mittlerem Barometerstande), $J_1 = 1^{cm}$ und $J = 0^{cm},5$, so erhält man nach Gleichung 960) $p = 2 \,.\, 10\,336 = 20\,672$ Kil. und nach Gleichung 965) $\mathfrak{A} = 10\,336 \lg 2 = 7164^{mk}$. Es würde also, um einen Cubikmeter gewöhnlicher atmosphärischer Luft bis auf die Hälfte des Rauminhaltes (oder das Doppelte des Druckes) zu comprimiren, einer mechanischen Arbeit von 7164 Meterkilogrammen bedürfen, und eben so gross würde die mechanische Arbeit sein, welche die Luftmasse bei ihrer Wiederausdehnung bis auf den ursprünglichen Rauminhalt auf den Kolben übertragen würde — vorausgesetzt, dass in beiden Fällen die Temperatur der Luftmasse unverändert erhalten wurde.

Ein solches Unverändertbleiben der Temperatur wird jedoch — wie die Physik lehrt — in Wirklichkeit nur dann stattfinden, wenn der eingeschlossenen Luftmasse eine gewisse Wärmemenge in dem ersten Falle entzogen und in dem zweiten Falle zugeführt wird. Unter gewöhnlichen Umständen, wo eine solche Wärme-Ableitung oder Wärme-Zuführung entweder gar nicht oder nur unvollkommen stattfindet, würde die oben gefundene Gleichung in Bezug auf den ersteren Fall einen zu kleinen und in Bezug auf den letzteren Fall einen zu grossen Werth liefern (vergl. § 184).

§ 179.

Einfluss der Schwerkraft auf den Druck der atmosphärischen Luft.

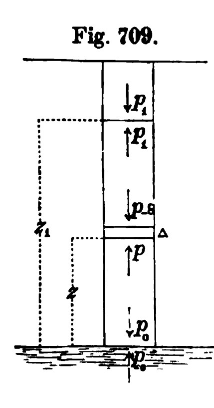
Denkt man sich durch eine feste Cylinderoberfläche aus der Atmosphäre eine verticale Luftsäule vom Querschnitt Eins herausgeschnitten, welche von der horizontalen Erd- (oder Meeres-) Oberfläche bis zu den Grenzen der Atmosphäre hiaufreicht, so findet man zunächst, dass die Unterlage, auf welcher diese Luftsäule ruht, einen Gegendruck zu leisten hat, welcher gleich dem Gewichte der ganzen Luftsäule ist, da diese beiden Kräfte die einzigen Verticalkräfte sind, welche auf die Luftsäule wirken (Fig. 709). Bei mittlerem Barometerstande hat dieser Druck — wie die Physik lehrt — die Grösse:

$$966)\quad p_0 = 10\,336 \text{ Kil. pro Quadratmeter.}$$

Betrachtet man eine in der Höhe z über der Meeresoberfläche

liegende Horizontal-Ebene als Unterlage des oberhalb derselben befindlichen Theiles der Luftsäule, so findet man auf gleiche Weise, dass der an dieser Stelle stattfindende Druck p gleich dem Gewichte des oberhalb dieser Stelle befindlichen Theiles der Luftsäule sein muss — also kleiner als der Druck p_0, und zwar um ebenso viel als das Gewicht des unterhalb jener Fläche liegenden Theiles der Luftsäule beträgt.

Fig. 709.



Um das Gesetz zu finden, nach welchem der Druck mit zunehmender Höhe abnimmt, hat man sich durch zwei resp. in den Höhen z und $z + \Delta$ über der Meeresfläche liegende Horizontal-Ebenen eine Schicht von der unendlich kleinen Dicke Δ aus jener Luftsäule herausgeschnitten zu denken und den Ueberschuss des an der unteren Grenzfläche wirkenden Druckes p über den an der oberen Grenzfläche wirkenden Druck $p - \varepsilon$ gleich dem Gewichte der Luftschicht zu setzen. Der Rauminhalt dieser Luftschicht hat die Grösse $1 . \Delta$, und wenn mit γ das Gewicht eines Cubikmeters Luft an dieser Stelle genommen bezeichnet wird, so erhält man die Gleichung:

$$967)\quad \varepsilon = \gamma \Delta, \quad \text{oder:} \quad \Delta = \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Das dem Drucke p_0 (= 10336 Kil. pro $\square^m$ bei mittlerem Barometerstande) entsprechende Gewicht eines Cubikmeters Luft an der Meeresoberfläche genommen hat bei einer Temperatur von 0° die Grösse:

$$968)\quad \gamma_0 = 1,293 \text{ Kilogramm},$$

und das Gewicht γ eines Cubikmeters Luft in der Höhe z über der Meeresoberfläche ist nach dem Mariotte'schen Gesetze zu bestimmen aus der Gleichung:

$$969)\quad \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{p}{p_0}, \quad \text{oder:} \quad \gamma = \frac{\gamma_0}{p_0} \cdot p.$$

Nach Substitution dieses Werthes nimmt die Gleichung 967) die Form an:

$$970)\quad \Delta = \frac{p_0}{\gamma_0} \frac{\varepsilon}{p}.$$

Denkt man sich in Bezug auf jede einzelne von den unendlich dünnen Schichten, aus denen die der Höhendifferenz $z_1 - z$ entsprechende Luftsäule zusammengesetzt ist, die auf analoge Weise

zu bildende Gleichung aufgestellt und sämmtliche Gleichungen alsdann zusammen addirt, so erhält man die Gleichung:

$$971)\quad \Sigma(\Delta) = \frac{p_0}{\gamma_0} \Sigma\left(\frac{\varepsilon}{p}\right).\text{*)}$$

In dieser Gleichung ist $\Sigma(\Delta) = z_1 - z$ zu setzen, und für den Ausdruck $\Sigma\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)$ findet man auf analoge Weise wie im vorigen Paragraphen für die in Gleichung 963) enthaltene Quotienten-Summe den Werth $\lg\left(\frac{p}{p_1}\right)$. Also ist:

$$972)\quad z_1 - z = \frac{p_0}{\gamma_0} \lg\left(\frac{p}{p_1}\right) = 7992 \lg\left(\frac{p}{p_1}\right).$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich die Höhendifferenz zweier Punkte berechnen, sobald der Druck der atmosphärischen Luft an jeder von diesen beiden Stellen aus directen Beobachtungen bekannt ist. Hätte man z. B. gefunden, dass an der unteren Station der Luftdruck 2,718 28 mal so gross ist als an der oberen, so würde hieraus sich ergeben, dass die letztere um 7992 Meter höher liegt als die erstere.

Da indessen die obige Gleichung auf trockene — d. h. keinen Wasserdampf enthaltende — atmosphärische Luft sich bezieht und eine überall gleichmässige Temperatur von 0° voraussetzt, da ferner die Abhängigkeit der Schwerkraft von der geographischen Breite und von der Höhe über der Meeresfläche in derselben keine Berücksichtigung findet, so dürfen die auf solche Weise berechneten Höhendifferenzen nur als Annäherungswerthe betrachtet werden, und bei Anwendung derselben auf Höhen-Messungen, welche eine grössere Genauigkeit erfordern, würde die obige Gleichung der genannten Umstände wegen noch mehrfacher Correctionen bedürfen.

§ 180.

Auftrieb der atmosphärischen Luft.

Abgesehen von dem Unterschiede, welchen die erforderliche Berücksichtigung der mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel abnehmenden Dichtigkeit der Luft bedingt, kann die Gesammtwirkung der atmosphärischen Luft auf einen an allen Seiten von derselben umgebenen festen Körper nach denselben

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung würde diese Gleichung die Form erhalten:

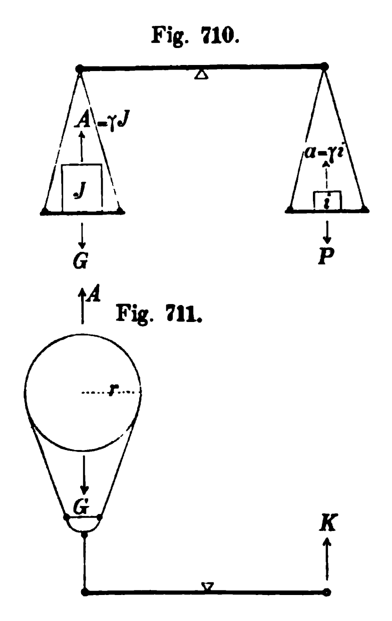
$$\int_z^{z_1} dz = \frac{p_0}{\gamma_0} \int_{p_1}^{p} \frac{dp}{p}, \quad \text{oder:} \quad z_1 - z = \frac{p_0}{\gamma_0}(\lg p - \lg p_1) = \frac{p_0}{\gamma_0} \lg\left(\frac{p}{p_1}\right).$$

Regeln bestimmt werden, welche in § 174 für die in tropfbare Flüssigkeiten eingetauchten Körper gefunden wurden. Diese Wirkung besteht unter allen Umständen in einem vertical aufwärts wirkenden Auftriebe von gleicher Grösse mit dem Gewichte derjenigen Luftmasse, welche ohne das Vorhandensein des Körpers den Raum desselben erfüllen würde. Wenn die Höhen-Differenz zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkte des Körpers — und in Folge dessen auch der Unterschied in der Dichtigkeit der Luft zwischen diesen beiden Stellen — eine vergleichsweise geringe Grösse hat, so kann man das Gewicht der verdrängten Luftmasse auf gleiche Weise wie das einer tropfbaren Flüssigkeit berechnen, indem man den Rauminhalt derselben J multiplicirt mit der Grösse γ als dem Gewichte der Cubikeinheit atmosphärischer Luft, entsprechend der mittleren Dichtigkeit derselben in der Gegend des eingetauchten Körpers.

Der Druck, welchen ein von atmosphärischer Luft umgebener Körper auf seine Unterlage oder auf seinen Aufhängepunkt überträgt, ist nicht als das wirkliche Gewicht desselben anzusehen, sondern als der Ueberschuss des wirklichen Gewichtes über den atmosphärischen Auftrieb. Aus dem Gleichgewichtszustande eines mit zwei Gewichten belasteten gleicharmigen Wagebalkens darf — wenn die Wägung im lufterfüllten Raume stattfindet — nicht die Gleichheit der wahren Gewichte, sondern nur die Gleichheit der scheinbaren Gewichte der beiden Körper gefolgert werden. Für das wahre Gewicht G des gewogenen Körpers erhält man nach Fig. 710 die Gleichung:

Fig. 710.

Fig. 711.



973) $G - \gamma J = P - \gamma i$, oder:

$$G = P + \gamma (J - i).$$

Um das wirkliche Gewicht eines Körpers zu finden, hat man also zu dem wirklichen Gewichte des zur Wägung benutzten Gewichtstückes noch das Gewicht einer Luftmasse zu addiren, deren Rauminhalt gleich dem Ueberschusse

des Rauminhaltes jenes Körpers über den Rauminhalt des Gewichtstückes ist.

Wenn z. B. dieser Ueberschuss 1 Cubikmeter betrüge und die Wägung in der Höhe der Meeresfläche stattfand, so würde man (nach Gleichung 968) zu dem gefundenen Gewichte P des Gewichtstückes noch 1,293 Kil. hinzuzurechnen haben, um das gesuchte wahre Gewicht des Körpers zu erhalten.

Wenn das wirkliche Gewicht eines im lufterfüllten Raume mittelst eines Fadens an einem festen Punkte aufgehängten Körpers kleiner ist als der Auftrieb der atmosphärischen Luft, so ist die Kraft, welche durch den Faden auf den Aufhängepunkt übertragen wird, vertical aufwärts gerichtet und ihrer Grösse nach gleich dem Ueberschusse des Auftriebes A über das Gewicht G. Für die Spannung des Fadens ergiebt sich also die Gleichung:

$$974) \quad K = A - G.$$

Ebenso gross ist die beschleunigende Kraft, welche beim Durchschneiden des Fadens den Körper nach oben treiben würde.

Nach der obigen Gleichung würde daher die Steigkraft eines Luftballons zu berechnen sein: bestehend aus einem kugelförmigen Schlauche, gefüllt mit einem Gase, dessen Dichtigkeit geringer ist als die der umgebenden atmosphärischen Luft (Fig. 711). Wenn mit Q das Gewicht des Schlauches nebst der sonstigen an demselben hängenden Last bezeichnet wird, und mit γ_1 das Gewicht eines Cubikmeters des zur Füllung desselben verwendeten Gases, so ist $G = Q + \frac{4}{3} r^3 \pi \gamma_1$ zu setzen. Da der Rauminhalt der verdrängten atmosphärischen Luft nur wenig grösser sein wird als der Inhalt des Schlauches, so kann der Auftrieb $A = \frac{4}{3} r^3 \pi \gamma$ gesetzt werden; man erhält also für die Steigkraft des Ballons die Gleichung:

$$975) \quad K = \frac{4}{3} r^3 \pi (\gamma - \gamma_1) - Q.$$

Setzt man hierin $\gamma = 1{,}3$ Kil., $\gamma_1 = 0{,}3$ Kil. und $r = 10^m$, so erhält man für K den Werth:

$$K = 4188{,}8 \text{ Kil.} - Q.$$

Ein Aufsteigen des Ballons wird also in diesem Falle stattfinden, wenn das Gewicht der Ballon-Hülle und das Gewicht der sonstigen an demselben hängenden Last zusammengenommen weniger betragen als 4188,8 Kil.

Wenn unten an dem Ballon eine Oeffnung sich befindet, so wird während des Aufsteigens das eingeschlossene Gas anfangen, durch diese Oeffnung auszuströmen, da der äussere Druck allmählich kleiner wird, und in Folge dessen das Gas sich ausdehnt. Die Grössen γ und γ_1 nehmen während des Steigens in gleichem Verhältniss ab, und die Differenz $\gamma - \gamma_1$ vermindert sich nach

demselben Gesetze. Eine Steigkraft wird also nur so lange vorhanden sein, bis der allmählich abnehmende Ueberschuss des atmosphärischen Auftriebes über das Gewicht des eingeschlossenen Gases gleich dem Gewichte Q geworden ist. Wäre anfangs dieser Ueberschuss gleich $n \,.\, Q$ gewesen (entsprechend dem Werthe $Q = \frac{4188,8}{n}$ bei dem oben gewählten Zahlenbeispiele), so würde die Steigkraft Null werden in dem Augenblicke, wo der Ballon die Höhe erreicht hat, in welcher das Gewicht eines Cubikmeters der atmosphärischen Luft gleich $\frac{\gamma}{n}$ ist, d. h. nach Gleichung 972) die Höhe:

976) $h = 7992 \lg n,$

also z. B. für $n = 2$ (entsprechend dem Werthe $Q = 2094,4$ Kil.) die Steighöhe $h = 5540$ Meter. Nach derselben Gleichung würde die Steighöhe des Luftballons auch dann zu berechnen sein, wenn im Anfange nur der n-te Theil desselben mit Gas gefüllt, und bei dieser Füllung noch ein geringer Ueberschuss an Steigkraft vorhanden war, in welchem Falle während des Steigens dieser Ueberschuss so lange unverändert bleiben wird, bis das auf den n-fachen Rauminhalt sich ausdehnende Gas allmählich den ganzen Fassungsraum des Ballons ausfüllt und anfängt, durch die Oeffnung auszuströmen.

§ 181.

Wirkungen des Luftdruckes bei theilweise von atmosphärischer Luft umgebenen Körpern.

Da bei einem festen Körper, welcher an allen Seiten von Luft umgeben ist, der atmosphärische Druck nur in Form des Auftriebes wirkt, und da das Gewicht des Körpers in der Regel beträchtlich grösser ist als das Gewicht der von dem Körper verdrängten Luftmasse, so bildet der Druck der atmosphärischen Luft eine Kraft, deren Wirkung unter gewöhnlichen Verhältnissen der Wahrnehmung häufig sich entzieht, und in vielen Fällen kann ohne grossen Fehler angenommen werden, dass die Wirkungen des Luftdruckes bei einem an allen Seiten von Luft umgebenen Körper einander gegenseitig aufheben. Sobald indessen an einer Seite des Körpers der Zutritt der atmosphärischen Luft auf irgend eine Art verhindert wird, bildet der an der entgegengesetzten Seite wirkende Luftdruck eine Kraft, welche nun nicht mehr aufgehoben wird und bei einer Bewegung des Körpers nach dieser Seite hin als Widerstand sich bemerkbar macht.

Auch dann, wenn der feste Körper längs eines Theiles seiner Oberfläche mit anderen festen Körpern in Berührung zu sein scheint, ist derselbe in der Regel als an allen Seiten von atmosphärischer Luft umgeben zu betrachten. Wenn eine feste Platte gegen eine Wand gedrückt wird, so befindet sich in der Regel

zwischen den beiden Körpern noch eine dünne Luftschicht, welche mit der äusseren Atmosphäre communicirt; und auf gleiche Weise wie in § 176 bei dem in Fig. 694 dargestellten Falle in Bezug auf tropfbare Flüssigkeiten gezeigt wurde, erklärt es sich, dass unter gewöhnlichen Umständen bei dem Losreissen der Platte von der Wand der atmosphärische Druck sich nicht bemerkbar macht. Wenn jedoch auf irgend eine Art verhindert wird, dass die atmosphärische Luft zwischen Platte und Wand sich eindrängt — wie z. B. bei einer elastischen biegsamen Platte durch den Druck der Luft selbst gegen die Ränder derselben (Fig. 712) — so wirkt dem Losreisen der Platte der ihrem ganzen Flächeninhalt F entsprechende atmosphärische Druck $p_0 F$ als Widerstand entgegen, und ist zur Ueberwindung desselben die Kraft $K = p_0 . F$ erforderlich.

Fig. 712.

In einem an beiden Seiten offenen Cylinder setzt die atmosphärische Luft der Bewegung des Kolbens keinen Widerstand entgegen, da der Druck gegen jede der beiden Endflächen dieselbe Grösse hat. Wenn aber der Cylinder an dem einen Ende durch einen luftdicht schliessenden Deckel oder durch einen anderen Kolben verschlossen wird, und aus dem Zwischenraume die atmosphärische Luft vorher hinausgetrieben wurde, so wirkt der volle atmosphärische Druck der Bewegung des Kolbens nach aussen hin (oder dem Losreissen des verschliessenden Deckels) als Widerstand entgegen, und wenn z. B. die Kolbenfläche 1 □^{m} Flächeninhalt hatte, so würde zur Ueberwindung desselben eine Kraft von 10 336 Kil. erforderlich sein (Fig. 713).

Fig. 713.

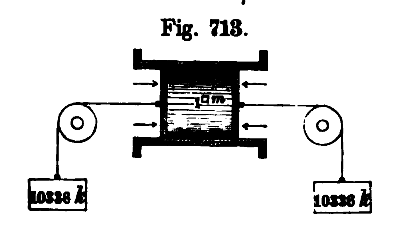
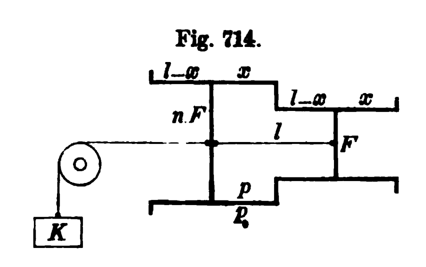


Fig. 714.



Bei dem in Fig. 714 dargestellten Apparate ist eine Verschiebung des Systems der beiden durch eine Stange in unveränderlichem Abstande von einander

gehaltenen Kolben nach der rechten Seite hin mit einer Verkleinerung, und nach der linken Seite hin mit einer Vergrösserung des Rauminhaltes der zwischen den beiden Kolben befindlichen Luftmasse verbunden. Es soll angenommen werden, dass das Kolbensystem anfangs in die äusserste Stellung nach rechts geschoben wurde — in diejenige Stellung also, bei welcher der Inhalt der eingeschlossenen Luftmasse gleich dem Inhalte Fl des kleinen Cylinders war — und dass bei dieser Stellung die eingeschlossene Luft mit der äusseren atmosphärischen Luft communicirend den Druck p_0 pro Flächeneinheit annahm (Gleichung 966). Den kleineren Druck p, welchen dieselbe bei einer Verschiebung des Kolbensystems um die Strecke x nach links annimmt, findet man nach dem Mariotte'schen Gesetze aus der Gleichung:

$$977)\quad \frac{p}{p_0} = \frac{Fl}{F(l-x)+nFx}, \quad \text{oder:} \quad p = \frac{p_0 l}{l+(n-1)x},$$

und die Kraft K, welche erforderlich ist, um das Kolbensystem bei dieser Stellung im Gleichgewicht zu halten, aus der Gleichung:

$$978)\quad K = (p_0 - p)(n-1)F,$$

welche nach Substitution des für p gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$979)\quad K = \frac{p_0 F (n-1)^2 x}{l+(n-1)x}.$$

Setzt man z. B. $x = \frac{1}{2} l$, so erhält man die Gleichung: $\frac{K}{p_0 F} = \frac{(n-1)^2}{n+1}$, aus welcher für die beiden Grössen $\frac{K}{p_0 F}$ und n die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe sich ergeben:

$n = 2,$	$1{,}01,$	$1,$	$\frac{1}{2},$	$0,$
$\frac{K}{p_0 F} = \frac{1}{3},$	$0{,}000\,049\,75,$	$0,$	$\frac{1}{6},$	$1.$

Der Gleichgewichtszustand ist stabil, da bei einer Verschiebung des Kolbensystems nach der einen oder anderen Seite hin stets ein Druck-Ueberschuss entsteht, welcher dasselbe nach der Gleichgewichtslage zurücktreibt. Wenn die Grössen K und x aus directen Beobachtungen bekannt sind, so kann aus der obigen Gleichung der Werth von p_0 berechnet werden. Es würde daher der in Fig. 714 dargestellte Apparat ebenfalls zur Messung des atmosphärischen Druckes benutzt werden können.

§ 182.

Gay-Lussac'sches Gesetz.

Wenn mit p der in einer Gasmasse pro Flächeneinheit stattfindende Druck, und mit J der Inhalt des bei diesem Drucke von

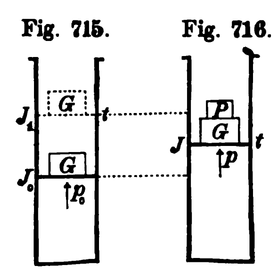
derselben eingenommenen Raumes bezeichnet wird, so ist nach § 178 das Product pJ als eine unveränderlich bleibende Grösse zu betrachten; denn wenn dieselbe Gasmasse ein anderes Mal bei dem Drucke p_0 den Rauminhalt J_0 hatte, so ist nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$980)\quad \frac{p}{p_0} = \frac{J_0}{J}, \quad \text{oder:} \quad pJ = p_0 J_0.$$

Dieses Unverändertbleiben des Productes „Druck mal Rauminhalt" findet indessen nur so lange statt, als die Temperatur der Gasmasse keine Aenderung erleidet.

Wenn auf die in Fig. 715 angedeutete Art durch ein auf den Kolben gelegtes Gewicht von bestimmter unverändert bleibender Grösse G der Druck p_0 der eingeschlossenen Gasmasse unverändert erhalten, und durch Zuführung von Wärme die Temperatur der Gasmasse allmählich von Null bis auf t Grad erhöht wird, so zeigt sich bei diesem Versuche, dass der Rauminhalt der Temperatur-Zunahme proportional zunimmt, in der Weise, dass, wenn mit α das einer Temperatur-Zunahme von 1 Grad (Celsius) entsprechende Ausdehnungsverhältniss bezeichnet wird, für die einer Temperatur-Zunahme von t Graden entsprechende Zunahme des Rauminhaltes von J_0 bis auf J_1 die Gleichung sich ergiebt:

Fig. 715. Fig. 716.



$$981)\quad \frac{J_1 - J_0}{J_0} = \alpha t, \quad \text{oder:} \quad J_1 = J_0(1 + \alpha t).$$

Die Zahl α wird der (Wärme-) Ausdehnungs-Coefficient genannt und hat für alle Gasarten nahezu den gleichen Werth:

$$982)\quad \alpha = 0{,}003\,67.$$

Wenn z. B. eine Gasmasse, welche bei einer Temperatur von Null Grad (C.) einen Cubikmeter Rauminhalt hatte, bei unverändert bleibendem Drucke auf 100° (C.) erwärmt wird, so wächst der Rauminhalt derselben um 0,367 Cubikmeter.

Denkt man sich die Gasmasse aus dem Zustande, in welchen dieselbe (auf die mit Bezug auf Fig. 715 erklärte Weise) durch jene Temperatur-Erhöhung versetzt wurde, nunmehr bei unverändert bleibender Temperatur von dem Rauminhalte J_1 auf den kleineren Rauminhalt J übergehend — etwa in Folge des Auflegens eines Uebergewichtes P auf den Kolben (Fig. 716) — so kann die dabei erfolgende Druckzunahme von p_0 auf die Grösse

p nach dem Mariotte'schen Gesetze bestimmt werden aus der Gleichung:

$$983)\quad \frac{p}{p_0} = \frac{J_1}{J}, \quad \text{oder:}\ pJ = p_0 J_1,$$

welche nach Substitution des für J_1 in Gleichung 981) gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$984)\quad pJ = p_0 J_0 (1 + \alpha t).$$

Diese Gleichung zeigt, dass es nicht das Product pJ, sondern statt dessen der Quotient:

$$985)\quad \frac{pJ}{1 + \alpha t} = p_0 J_0$$

ist, welcher einen unter allen Umständen — auch bei Temperatur-Aenderungen — unverändert bleibenden Werth behält. Wenn dieselbe Gasmasse, in welcher bei einer Temperatur von t Graden (über dem Nullpunkte des Celsius'schen Thermometers) und bei dem Rauminhalte J der Druck p stattfand, ein anderes Mal bei der Temperatur t_1 und dem Rauminhalte J_1 den Druck p_1 annimmt, so ist:

$$986)\quad \frac{pJ}{1 + \alpha t} = \frac{p_1 J_1}{1 + \alpha t_1}.$$

Da das Gewicht der Gasmasse ebenfalls eine unveränderliche Grösse ist, also $\gamma J = \gamma_1 J_1$ gesetzt werden kann (worin γ und γ_1 resp. die Gewichte pro Cubikeinheit bedeutet), so lässt sich der obigen Gleichung auch die Form geben:

$$987)\quad \frac{p}{\gamma (1 + \alpha t)} = \frac{p_1}{\gamma_1 (1 + \alpha t_1)}.$$

Wenn man die Nenner auf beiden Seiten durch α dividirt und für α alsdann den in Gleichung 982) angegebenen numerischen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$988)\quad \frac{p}{\gamma (273 + t)} = \frac{p_1}{\gamma_1 (273 + t_1)}.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass der auf der linken Seite stehende Quotient $\frac{p}{\gamma (273 + t)}$ für jede Gasart eine bestimmte unveränderlich bleibende Grösse bildet — wie auch immer Temperatur, Druck und Dichtigkeit derselben sich ändern mögen. Um den numerischen Werth dieser Constanten für atmosphärische Luft zu bestimmen, kann man $t_1 = 0$ setzen und für die Grössen p_1 und γ_1 die der Temperatur von 0° (C.) entsprechenden resp. in den Gleichungen 966) und 968) angegebenen zusammengehörigen

Werthe $p_0 = 10\,336$ und $\gamma_0 = 1,293$ substituiren und erhält dann die Gleichung:

$$989)\quad \frac{p}{\gamma(273+t)} = 29,27 = C,$$

aus welcher jede von den drei veränderlichen Grössen p, γ, t berechnet werden kann, sobald die zwei anderen gegeben sind.

Setzt man z. B. $p = 10\,336$ und $t = 100$, so erhält man $\gamma = 0,946$; d. h. bei einer Temperatur von 100° (C.) wiegt ein Cubikmeter atmosphärischer Luft nur 0,946 Kil., wenn der Druck derselben gleich dem mittleren atmosphärischen Drucke ist. Es würde also bei einem mit erwärmter atmosphärischer Luft gefüllten Ballon, wenn die Temperatur im Innern 100° (C.) und aussen 0° (C.) betrüge, ein Ueberschuss des Auftriebes gleich $1,293 - 0,946 = 0,347$ Kil. für jeden Cubikmeter des Inhalts sich ergeben, und z. B. bei den in § 180 angenommenen Zahlenwerthen die Steigkraft des Luftballons 1453,5 Kil. — Q betragen.

Setzt man in Gleichung 989): $p = 2 \,.\, 10\,336 = 20\,672$ und $\gamma = 1,293$, so erhält man $t = 273°$; d. h. wenn eine im geschlossenen Raume befindliche Luftmasse von gleicher Dichtigkeit mit der äusseren atmosphärischen Luft bei unverändert bleibendem Rauminhalte von 0° bis auf 273° (C.) erwärmt wird, so wächst der Druck von 10 336 Kil. auf 20 672 Kil pro □^{m}, also auf das Doppelte. Auf gleiche Weise findet man, dass $p = 3 \,.\, 10\,336$ wird für $t = 2 \,.\, 273°$ und dass überhaupt $p = n \,.\, 10\,336$ wird für $t = (n - 1) \,.\, 273$; d. h. für je 273° Temperatur-Zunahme ergiebt sich eine Druck-Zunahme von 10 336 Kil. gleich dem einfachen atmosphärischen Drucke. Wenn die Gültigkeit dieses Gesetzes auf alle Temperaturen — auch nach rückwärts auf Temperaturen unter 0° (C.) — sich erstreckte, so würde hieraus folgen, dass bei der Temperatur von — 273° (C.) der Druck p gleich Null wird. Aus diesem Grunde hat man die Grösse $273 + t$ die absolute Temperatur, und die Temperatur von — 273° (C.) den absoluten Nullpunkt der Temperatur genannt. Nach dieser Bezeichnungsweise kann dem in Gleichung 989) enthaltenen Gesetze auch die folgende Form gegeben werden: „Bei constanter Dichtigkeit (oder constantem Rauminhalt) wächst der Druck proportional der absoluten Temperatur, und bei constantem Drucke wächst der Rauminhalt proportional der absoluten Temperatur."

§ 183.

Mechanisches Aequivalent der Wärme.

Unter „Wärme-Capacität" oder „specifischer Wärme" eines Stoffes versteht man diejenige „Wärme-Quantität", welche erforderlich ist, um einem Kilogramm dieses Stoffes eine Temperatur-Erhöhung von einem Grad (Celsius) zu ertheilen. Als „Wärme-Einheit" wird diejenige Wärme-Quantität gewählt, durch welche 1 Kil. Wasser um 1° (C.) erwärmt wird.

Wenn einer Luftmasse von 1 Kil. Gewicht durch Zuführung von Wärme eine Temperatur-Erhöhung von 1° ertheilt wird, wäh-

rend unbewegliche Gefässwände den Rauminhalt derselben unverändert erhalten, so ergiebt sich für die dazu erforderliche Wärme-Quantität — oder nach der obigen Erklärung: die „specifische Wärme der Luft bei constantem Rauminhalt“ — die Grösse:

990) $w_i = 0{,}1687,$

und für die zum Hervorbringen einer Temperatur-Erhöhung von τ Graden erforderliche Wärme-Quantität die Grösse:

991) $u = w_i \,.\, \tau = 0{,}1687\,\tau.$

Wenn man derselben Luftmasse ein anderes Mal eine Temperatur-Erhöhung von 1° (C.) ertheilt, während auf die in Fig. 717 angedeutete Art durch ein auf den Kolben gelegtes Gewicht G der Druck p unverändert erhalten wird, so ergiebt sich für die in diesem Falle erforderliche Wärme-Quantität — oder die „specifische Wärme der Luft bei constantem Drucke“ — die Grösse:

Fig. 717.

992) $w_p = 0{,}2377,$

und für die zum Hervorbringen einer Temperatur-Erhöhung von τ Graden erforderliche Wärme-Quantität die Grösse:

993) $z = w_p \,.\, \tau = 0{,}2377\,\tau.$

Es zeigt sich also, dass zum Hervorbringen einer bestimmten Temperatur-Zunahme bei constantem Drucke und gleichzeitig erfolgender Ausdehnung der Luft eine grössere Wärme-Quantität erforderlich ist, als zum Hervorbringen der gleichen Temperatur-Zunahme bei constantem Rauminhalt, und zwar hat der Unterschied zwischen diesen beiden Wärme-Quantitäten die Grösse:

994) $x = (w_p - w_i)\,\tau = 0{,}069\,\tau.$

Da die Zuführung der Wärme-Quantität z nicht nur eine Erhöhung der Temperatur um τ Grade, sondern ausserdem eine Vergrösserung des Rauminhaltes um eine gewisse Grösse i zur Folge hatte, wobei zugleich die mechanische Arbeit:

995) $\mathfrak{A} = p \,.\, i$

verrichtet wurde, so erklärt man sich jenen Unterschied, indem man sich die Wärme-Quantität z in die beiden Theile x und u zerlegt denkt und annimmt, dass es nur der letztere Theil u ist, welcher auf Temperatur-Erhöhung wirklich verwendet wird, während der bei diesem Vorgange als messbare Wärme verschwindende andere Theil x zum Hervorbringen der mechanischen Arbeit $\mathfrak{A}$ verwendet oder gleichsam in dieselbe umgewandelt wird. Wenn

mit A die mechanische Arbeit bezeichnet wird, welche bei der Umwandlung von einer Wärme-Einheit in mechanische Arbeit entsteht, oder das sogenannte „mechanische Aequivalent der Wärme-Einheit", so ist $A \cdot x$ die mechanische Arbeit, welche für x Wärme-Einheiten das mechanische Aequivalent bildet, und welche nach der obigen Annahme gleich der mechanischen Arbeit $\mathfrak{A}$ zu setzen ist. Nach Substitution der für x und $\mathfrak{A}$ gefundenen Werthe enthält man zur Bestimmung der Grösse A die Gleichung:

$$996)\quad A\,(w_p - w_i)\,\tau = p \cdot i.$$

Da das Gewicht der Luftmasse gleich 1 Kil. angenommen wurde, so kann $\gamma \cdot J = 1$, oder: $\gamma = \frac{1}{J}$ substituirt werden in Gleichung 989), und das in derselben enthaltene Gesetz führt, auf den vorliegenden Fall angewendet, zu den Gleichungen:

$$997)\quad \frac{pJ}{273+t} = C = \frac{p\,(J+i)}{273+t+\tau}.$$

Wenn man den aus diesen Gleichungen für $p \cdot i$ sich ergebenden Werth:

$$998)\quad p \cdot i = C \cdot \tau$$

in Gleichung 996) substituirt, so nimmt dieselbe für A aufgelöst die Form an:

$$999)\quad A = \frac{C}{w_p - w_i} = \frac{29{,}27}{0{,}2377 - 0{,}1687} = 424 \text{ Meterkilogramm.}$$

Nach der mechanischen Wärme-Theorie hat nicht nur bei Ausdehnung der Luft, sondern überhaupt in allen Fällen, wo Wärme als solche verschwindet und in mechanische Arbeit umgewandelt wird, das Verhältniss der erzeugten Arbeit zur verschwundenen Wärme-Quantität den constanten Werth: $A = 424$, und umgekehrt: in allen Fällen, wo mechanische Arbeit auf Erzeugung von Wärme verwendet wird, das Verhältniss der erzeugten Wärme-Quantität zur verwendeten Arbeit den constanten Werth: $\frac{1}{A} = \frac{1}{424}$. Da die lebendige Kraft einer in Bewegung begriffenen Masse ebenfalls als Aequivalent einer gewissen mechanischen Arbeit zu betrachten ist, nämlich für diejenige Arbeit, welche zur Erzeugung derselben erforderlich war, oder auch für diejenige Arbeit, welche die bewegte Masse beim Uebergange in den Ruhezustand ihrerseits wieder hervorbringen würde, so ist jenes Gesetz der Aequivalenz auch für die Beziehungen zwischen „Wärme" und „lebendiger Kraft" als gültig zu betrachten. Wo

lebendige Kraft als sichtbare Bewegung scheinbar verschwindet, ohne das Aequivalent an mechanischer Arbeit zu erzeugen, da ist nach der mechanischen Wärme-Theorie statt eines wirklichen Verlustes nur ein Wechsel in der Form der lebendigen Kraft anzunehmen, nämlich eine Uebertragung der Bewegung auf die kleinsten Theilchen der Materie, und die erzeugte lebendige Kraft dieser unsichtbaren Bewegungen (in welchen nach der mechanischen Wärme-Theorie das Wesen der Wärme besteht) ist gleich derjenigen lebendigen Kraft, welche als sichtbare Bewegung gleichzeitig verschwand.

Eine Masse $M = \frac{Q}{g}$, welche mit der Geschwindigkeit $V \left(= \sqrt{2gH}\right.$ entsprechend der Geschwindigkeitshöhe $\left. H = \frac{V^2}{2g}\right)$ rechtwinkelig gegen eine feste Wand stösst (oder auch gegen eine gleich grosse mit gleicher Geschwindigkeit ihr entgegenkommende Masse, würde bei sogenanntem „unelastischen" Stosse (§ 155) ihre ganze lebendige Kraft $\frac{MV^2}{2} = \frac{Q}{g}\frac{V^2}{2} = QH$ verlieren, und da zum Hervorbringen jeder Wärme-Einheit A Meterkilogramm erforderlich sind, so ist die erzeugte Wärme-Quantität:

$$1000) \quad W = \frac{QH}{A}.$$

Wenn mit w die specifische Wärme des stossenden Körpers bezeichnet wird, so ist die Wärmemenge, welche die Temperatur desselben um 1° erhöhen würde, gleich wQ, und die Wärmemenge, welche die Temperatur desselben um t Grade erhöhen würde, gleich wQt. Für den Fall, dass die ganze erzeugte Wärmemenge auf Temperatur-Erhöhung des stossenden Körpers verwendet wird, ist also die Temperatur-Erhöhung t zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1001) \quad wQt = \frac{QH}{A}, \quad \text{oder:} \quad t = \frac{H}{Aw}.$$

Setzt man z. B. $H = 16\,000^m$ (entsprechend der Geschwindigkeit $V = 560^m$) und als mittlere specifische Wärme des Eisens $w = 0{,}115$, so erhält man $t = \frac{16\,000}{424\,.\,0{,}115} = 328^0$ (C.) Da die specifische Wärme des Bleis gleich 0,0314 ist, so würde eine Bleimasse unter gleichen Umständen um 1202° (C.) erwärmt werden, wenn nicht schon vorher das Schmelzen einträte.

Die der mittleren Geschwindigkeit der Erde $V = 4{,}12$ Meilen $= 4{,}12\,.\,7420^m$ entsprechende Geschwindigkeitshöhe hat die Grösse $H = \frac{V^2}{2g} = 47\,620\,000^m$. Wäre die specifische Wärme der Erde durchschnittlich gleich der des Wassers, so würde die bei dem Stosse der Erde gegen ein unbewegliches Hinderniss erzeugte Wärmemenge ausreichen, die Temperatur derselben durchschnittlich um $t = \frac{47\,620\,000}{424} = 112\,000^0$ (C.) zu erhöhen.

§ 184.

Poisson'sches Gesetz.

Für die Wärme-Quantität q_1, welche einem Kilogramm Luft zugeführt werden muss, wenn bei constantem Drucke p der Rauminhalt von J bis $J + i$ vergrössert werden soll, ergiebt sich, wenn mit τ die dabei eintretende Temperatur-Erhöhung bezeichnet wird, nach Gleichung 993) der Werth: $q_1 = w_p \,.\, \tau$, und wenn man hierin für τ den aus Gleichung 998) zu entnehmenden Werth $\tau = \frac{pi}{C}$ substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$1002) \quad q_1 = w_p \,.\, \frac{pi}{C}\,.$$

Denkt man sich ein anderes Mal durch unbewegliche Gefässwände den Rauminhalt constant erhalten und durch Zuführung von Wärme den Druck von p auf $p + \varepsilon$ erhöht, so ergiebt sich (nach Gleichung 991) für die dazu erforderliche Wärmemenge — wenn mit θ die dabei eintretende Temperatur-Erhöhung bezeichnet wird — die Gleichung $q_2 = w_i \,.\, \theta$. Wenn man hierin für die Grösse θ den nach § 182 aus den Gleichungen:

$$1003) \quad \frac{pJ}{273 + t} = C = \frac{(p + \varepsilon)\,J}{273 + t + \theta}$$

sich ergebenden Werth $\theta = \frac{\varepsilon J}{C}$ substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$1004) \quad q_2 = w_i \,.\, \frac{\varepsilon J}{C}\,.$$

Um die Wärme-Quantität q zu bestimmen, welche einem Kilogramm Luft zugeführt werden muss, wenn gleichzeitig Rauminhalt und Druck resp. um die unendlich kleinen Grössen i und ε zunehmen sollen, hat man sich diese Wärme-Quantität in zwei Theile zerlegt zu denken, nämlich: erstens diejenige Wärme-Quantität q_1, welche erforderlich sein würde, um bei constantem Drucke den Rauminhalt J um die Grösse i zu vermehren, und zweitens: diejenige Wärme-Quantität q_2, welche erforderlich sein würde, um bei constantem Rauminhalt den Druck p um die Grösse ε zu vermehren. Man erhält also durch Addition der beiden Gleichungen 1002) und 1004) für q den Werth:

$$1005) \quad q = q_1 + q_2 = w_p \,.\, \frac{pi}{C} + w_i \,\frac{\varepsilon J}{C}\,.$$

Wenn man in dieser Gleichung $q = 0$ setzt und abkürzungsweise das Verhältniss:

$$1006)\quad \frac{w_p}{w_i} = \frac{0{,}2377}{0{,}1687} = 1{,}41 = \mathfrak{v}$$

der „specifischen Wärme der Luft bei constantem Drucke" zu der „specifischen Wärme der Luft bei constantem Rauminhalt" mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet, so erhält man die Gleichung:

$$1007)\quad \frac{\varepsilon}{p} = -\mathfrak{v} \,.\, \frac{i}{J}.$$

Aus dieser Gleichung kann die unendlich kleine (negative) Druck-Vergrösserung ε berechnet werden, welche eintritt, wenn ohne Zuführung von Wärme der Rauminhalt um die unendlich kleine Grösse i zunimmt.

Wenn unter gleichen Umständen der Rauminhalt um eine beliebig gegebene Grösse von J bis J_1 zunimmt, so kann man die damit verbundene (negative) Druck-Vergrösserung von p bis auf p_1 bestimmen, indem man sich die ganze Raum-Vergrösserung $J_1 - J$ in ihre unendlich kleinen Theile zerlegt denkt, für jeden dieser Theile i die zugehörigen Werthe der in Gleichung 1007) einander gleichgesetzten Ausdrücke berechnet und alsdann alle die auf solche Weise erhaltenen Gleichungen zusammenaddirt. Man erhält alsdann die Gleichung:

$$1008)\quad \Sigma\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) = -\mathfrak{v}\,\Sigma\left(\frac{i}{J}\right).\text{*)}$$

Wenn man hierin für die Ausdrücke $\Sigma\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)$ und $\Sigma\left(\frac{i}{J}\right)$ die auf gleiche Weise wie in § 179 (Gleichung 971) und § 178 (Gleichung 963) sich ergebenden Werthe resp. $\lg\frac{p_1}{p}$ und $\lg\frac{J_1}{J}$ substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$1009)\quad \lg\left(\frac{p_1}{p}\right) = -\mathfrak{v}\lg\left(\frac{J_1}{J}\right),\quad \text{oder:}\quad \frac{p_1}{p} = \left(\frac{J}{J_1}\right)^{\mathfrak{v}}.$$

---

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung würde dieser Gleichung die Form zu geben sein:

$$\int\limits_p^{p_1}\frac{dp}{p} = -\mathfrak{v}\int\limits_J^{J_1}\frac{dJ}{J},$$

und nach Ausführung der Integration erhält man die Gleichung:

$$\lg p_1 - \lg p = -\mathfrak{v}(\lg J_1 - \lg J),\quad \text{oder:}\quad \lg\left(\frac{p_1}{p}\right) = +\mathfrak{v}\lg\left(\frac{J}{J_1}\right).$$

Wenn atmosphärische Luft vom Drucke $p = 10\,336$ Kil. ohne Zuführung von Wärme auf das Zehnfache des Rauminhaltes sich ausdehnt, so vermindert sich der Druck bis auf die Grösse $p_1 = p \,.\, 0{,}1^{1{,}41} = \frac{p}{25{,}7} = 402$ Kil. (während nach § 178 der Druck nur auf die Grösse $0{,}1 \,.\, p = 1033{,}6$ Kil. abnehmen würde, wenn durch Zuführung von Wärme die Temperatur constant erhalten würde). Wenn umgekehrt atmosphärische Luft vom Drucke $p = 10\,336$ Kil. ohne Ableitung von Wärme bis auf ein Zehntel des ursprünglichen Rauminhaltes zusammengedrückt wird, so wächst der Druck bis auf die Grösse $p_1 = 25{,}7 \,.\, p = 265\,680$ Kil. (während der Druck nur bis auf die Grösse $10\,p = 103\,360$ Kil. zunehmen würde, wenn gleichzeitig durch Ableitung von Wärme die Temperatur constant erhalten würde).

Das in der obigen Gleichung enthaltene Poisson'sche Gesetz giebt in Verbindung mit dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze:

$$1010)\qquad \frac{pJ}{273+t} = C = \frac{p_1 J_1}{273+t_1}$$

zwei Gleichungen, aus denen immer zwei von den drei veränderlichen Grössen „Druck“, „Rauminhalt“ und „Temperatur“ berechnet werden können, sobald die dritte gegeben ist. Wenn man der letzteren Gleichung die Form giebt:

$$1011)\qquad \frac{273+t_1}{273+t} = \left(\frac{p_1}{p}\right)\left(\frac{J_1}{J}\right)$$

und darin das eine Mal für den Quotienten $\frac{p_1}{p}$, das andere Mal für den Quotienten $\frac{J_1}{J}$ den aus Gleichung 1009) zu entnehmenden Werth substituirt, so erhält man die Gleichungen:

$$1012)\qquad \frac{273+t_1}{273+t} = \left(\frac{J}{J_1}\right)^{\mathfrak{v}-1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{v}}},$$

aus denen die bei einer gegebenen Aenderung des Rauminhaltes oder des Druckes (ohne Zuführung und Ableitung von Wärme) eintretende Temperatur-Aenderung direct sich bestimmen lässt.

Wenn atmosphärische Luft von der Temperatur $t = 0^0$ (C.) und vom Drucke $p = 10\,336$ Kil. auf das Zehnfache des Rauminhaltes sich ausdehnt, so würde dieselbe die Temperatur $t_1 = -166{,}8^0$ (C.) annehmen, wenn gleichzeitig jede Zuführung von Wärme verhindert würde. Wenn umgekehrt: atmosphärische Luft von der Temperatur $t = 0^0$ und vom Drucke $p = 10\,336$ Kil. auf ein Zehntel des Rauminhaltes zusammengedrückt wird, und dieses Zusammendrücken so rasch geschieht, dass während desselben eine merkliche Wärme-Ableitung nicht stattfindet, so steigert sich die Temperatur bis auf die Grösse $t_1 = +428{,}7^0$ (C.).

Wenn ein Kilogramm Luft ohne Zuführung von Wärme sich ausdehnend aus der anfänglichen Temperatur t in die niedrigere

Temperatur t_1 übergegangen ist, und der Luft nachher bei unverändert bleibendem Rauminhalt so viel Wärme zugeführt wird, als erforderlich ist, um die ursprüngliche Temperatur t wieder herzustellen, so ist nach der mechanischen Wärme-Theorie als mechanisches Aequivalent dieser zugeführten Wärme-Quantität die vorher bei jener Ausdehnung von der Luft verrichtete mechanische Arbeit zu betrachten. Aus Gleichung 991) ergiebt sich für die bei constantem Rauminhalt zum Hervorbringen der Temperatur-Erhöhung $t - t_1$ erforderliche Wärme-Quantität der Werth:

$$1013)\quad Q = w_1 (t - t_1).$$

Die von der Luft bei ihrer Ausdehnung verrichtete Arbeit ist daher zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1014)\quad \mathfrak{A} = A w_1 (t - t_1),$$

welche nach Substitution des für t_1 aus Gleichung 1012) zu entnehmenden Werthes die Form annimmt:

$$1015)\quad \mathfrak{A} = A w_1 (273 + t)\left[1 - \left(\frac{J}{J_1}\right)^{\mathfrak{v}-1}\right] = A w_1 (273 + t)\left[1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{v}}}\right].$$

Nach derselben Gleichung kann auch die mechanische Arbeit berechnet werden, welche erforderlich ist, um ein Kilogramm Luft von der ursprünglichen Temperatur t vom Rauminhalt J auf den kleineren Rauminhalt J_1 zusammenzudrücken, wenn bei diesem Zusammendrücken keine Wärme-Ableitung stattfindet.

Wenn man $t = 0$ und $\frac{J}{J_1} = 0$ setzt, so wird $\mathfrak{A} = 424 \,.\, 0{,}1687 \,.\, 273 = 19\,527^{mk}$, d. h. wenn ein Kilogramm Luft von 0° Temperatur ohne Zuführung von Wärme bis ins Unendliche sich ausdehnte, so würde die von dem Drucke desselben verrichtete mechanische Arbeit 19 527 Meterkilogramm betragen. Die ganze ursprünglich in derselben enthaltene Wärme-Quantität $0{,}1687 \,.\, 273 = 46$ Wärme-Einheiten würde dabei in mechanische Arbeit verwandelt, und die Temperatur würde auf — 273° (C.) sinken.

Wenn ein Kilogramm Luft von 0° Temperatur ohne Zuführung von Wärme auf das Zehnfache des Rauminhaltes sich ausdehnt, so verrichtet der Druck derselben die mechanische Arbeit $\mathfrak{A} = 19\,527\,(1 - 0{,}1^{0,41}) = 11\,931$ Meterkilogramm, und wenn ein anderes Mal jene Luftmasse ohne Ableitung von Wärme auf ein Zehntel ihres ursprünglichen Rauminhaltes zusammengedrückt wird, so verrichtet der Druck die mechanische Arbeit $\mathfrak{A} = 19\,527\,(1 - 10^{0,41}) = -30\,665^{mk}$; d. h. zum Zusammendrücken ist die mechanische Arbeit $+30\,665^{mk}$ erforderlich. Im ersteren Falle würde die Temperatur auf — 166,8° C. sinken, im letzteren auf + 428,7° (C.) steigen, und wenn der Druck ursprünglich die Grösse $p = 10\,336$ Kil. hatte, so würde im ersteren Falle der Druck auf 402 Kil. sinken, im letzteren auf 265 680 Kil. steigen.

DREISSIGSTES CAPITEL.

Gleichgewicht zwischen den Drücken tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten.

§ 185.

Wirkungen des atmosphärischen Druckes.

Die atmosphärische Luft übt auf jeden Quadratmeter der Oberfläche des in einem offenen Gefässe enthaltenen Wassers einen Druck aus von der Grösse: $p_0 = 10\,336$ Kil. Aus Gleichung 914) ergiebt sich für diejenige Höhe h_0, welche eine auf dem Wasserspiegel ruhende Wasserschicht haben müsste, um den gleichen Druck auszuüben, der Werth:

$$1016)\quad h_0 = \frac{p_0}{\gamma} = \frac{10\,336}{1000} = 10^m,336.$$

Der Gleichgewichtszustand des in zwei mit einander communicirenden Gefässen befindlichen Wassers (Fig. 718) würde keine Störung erleiden, wenn in jedem der beiden Gefässe die Wirkung des atmosphärischen Druckes ersetzt würde durch den Druck einer Wasserschicht von der Höhe $h_0 = 10^m,336$. Da in diesem Falle die Gleichgewichts-Bedingungen gleiche Höhenlage der beiden Wasserspiegel erfordern würden, so folgt hieraus, dass die beiden um die Höhe h_0 tiefer liegenden Oberflächen der unter Einwirkung des atmosphärischen Druckes im Gleichgewichts-Zustande befindlichen Wassermasse vorher ebenfalls in einer und derselben Horizontal-Ebene lagen. Wenn nur in einem der beiden Gefässe auf solche Art der atmosphärische Druck durch eine Wasserschicht von gleichem Druck ersetzt wird, so liegt die obere Grenzfläche derselben um die Höhe $h_0 = 10^m,336$ höher als der Wasserspiegel in dem anderen Gefässe. Wenn also das eine Gefäss oben geschlossen, und der Raum oberhalb des Wasserspiegels in demselben luftleer gemacht wird, während in dem anderen Gefässe der Wasserspiegel dem atmosphärischen Drucke ausgesetzt bleibt (Fig. 719), so wird in den beiden Gefässen eine Niveau-Differenz von $10^m,336$ sich einstellen.

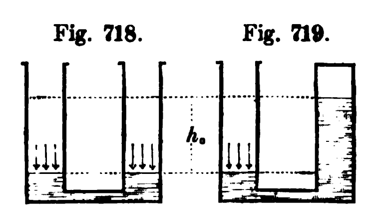


Fig. 718. Fig. 719.

Da das Gewicht eines Cubikmeters Quecksilber gleich 13 600 Kil. ist, so würde für Quecksilber die dem atmosphärischen Drucke entsprechende Druckhöhe h_0 zu berechnen sein aus der Gleichung $h_0 = \frac{10336}{13600} = 0^m,760$.

Jede Aenderung des atmosphärischen Druckes wird durch eine Aenderung jener Niveau-Differenz sich bemerkbar machen. Es kann daher der in Fig. **719** dargestellte Apparat (als Wasser- oder Quecksilber-Barometer) benutzt werden: einerseits zur Messung der im Laufe der Zeit erfolgenden Veränderungen des atmosphärischen Druckes, andererseits zur Messung der gleichzeitig an Orten von verschiedener Höhe über der Meeresfläche stattfindenden Unterschiede des atmosphärischen Druckes — also nach § 179 indirect auch zur Messung der Höhen-Differenz dieser Orte.

Hätte man z. B. an zwei verschiedenen Orten gleichzeitig die (Quecksilber-) Barometerstände $\mathfrak{b} = 0^m,750$ und $\mathfrak{b}_1 = 0^m,600$ beobachtet, so würde hieraus (bei Voraussetzung einer überall gleichmässigen Temperatur von 0^0 (C.) und ohne Berücksichtigung des in der Atmosphäre verbreiteten Wasserdampfes) nach Gleichung 972) für die Höhen-Differenz jener beiden Orte der Werth sich ergeben:

$$z_1 - z = 7992 \lg\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}_1}\right) = 7992 \lg 1,25 = 1783^m,3.$$

Dem mittleren (Quecksilber-) Barometerstande $\mathfrak{b}_0 = 0^m,760$ in der Höhe Null über der Meeresfläche entspricht der Druck $p_0 = 10\,336$ Kil. pro $\square^m$ und der Wasser-Barometerstand $h_0 = 10^m,336$. An einem 2300 Meter hoch über dem Meere liegenden Orte würden statt dessen resp. die Grössen $\mathfrak{b}_1 = 0^m,570$, $p_1 = 7752$ Kil. pro $\square^m$ und $h_1 = 7^m,752$ in Rechnung zu bringen sein. Im Folgenden ist unter dem atmosphärischen Drucke stets der dem mittleren Barometerstande von $0^m,760$ in der Höhe der Meeresfläche entsprechende Druck von 10 336 Kil. pro $\square^m$ zu verstehen.

Die dem atmosphärischen Drucke entsprechende Druckhöhe (für Wasser) $h_0 = 10^m,336$ bildet die Grenze der Steighöhe, bis zu welcher der Wasserspiegel in einem luftleeren Rohre über den äusseren der Einwirkung des atmosphärischen Druckes ausgesetzten Wasserspiegel sich erheben kann. Dem aufsteigenden Kolben einer Saug-Pumpe wird daher das vom atmosphärischen Drucke getriebene Wasser nur so lange folgen, als die Höhe der unteren Fläche des Kolbens über dem äusseren Wasserspiegel die Höhe $h_0 = 10^m,336$ nicht überschreitet. Bei fernerem Steigen des Kolbens würde unterhalb desselben ein leerer Raum sich bilden. Zum Heben des Kolbens ist bei der in Fig. **720** angegebenen Kolben-Stellung die Kraft erforderlich:

$$1017)\quad K = p_0 F - \gamma (h_0 - z) F = \gamma z F = p_0 F \left(\frac{z}{h_0}\right).$$

Diese Kraft wird gleich $p_0 F$, wenn $z = h_0$ wird, und behält diese Grösse auch dann noch, wenn z grösser als h_0 wird, wie bei der in Fig. 721 dargestellten Lage des Kolbens.

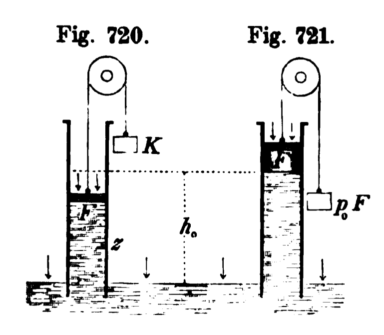


Fig. 720. Fig. 721.

Wenn ein geschlossenes mit Wasser gefülltes Gefäss nach unten hin mit einem Ansatzrohre versehen ist, dessen untere Mündung in eine dem atmosphärischen Drucke ausgesetzte Wassermasse eingetaucht ist, so wird die in dem Gefässe enthaltene Wassermasse so lange nicht ausfliessen, als die Höhe des höchsten Punktes desselben über dem äusseren Wasserspiegel kleiner ist als h_0. Sobald dagegen jene Höhe grösser wird als h_0, fängt das Wasser an, unten auszufliessen, während in dem oberen Theile des Gefässes ein leerer Raum sich bildet. Um einen luftleeren Raum herzustellen, ist es daher nur erforderlich, das mit einem Ansatzrohre von der Länge $l \geqq h_0$ versehene Gefäss auf die in Fig. 722 dargestellte Weise successive in die mit I, II, III bezeichneten Stellungen zu bringen. Die mindestens erforderliche Länge des Ansatzrohres würde für Wasser $10^m,336$ (für Quecksilber dagegen nur $0^m,760$) betragen.

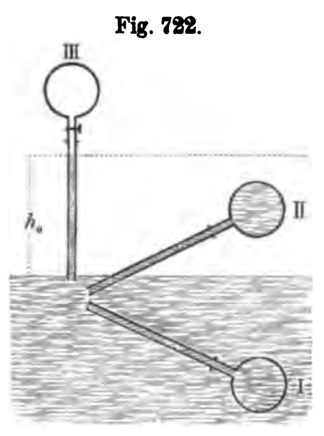


Fig. 722.

Wenn man das auf solche Art luft- und wasserleer gemachte Gefäss verschliesst und später durch ein kürzeres Ansatzrohr mit einer unterhalb befindlichen, dem atmosphärischen Drucke ausgesetzten Wassermasse in Verbindung bringt, so wird das Wasser wieder in dasselbe hinaufsteigen. Es kann daher mit Hülfe einer solchen Vorrichtung der atmosphärische Druck benutzt werden, um Wasser oder andere Flüssigkeiten aus einem tiefer liegenden Behälter in ein höherliegendes Gefäss hineinzutreiben.

In jedem der beiden verticalen Röhrenschenkel des in Fig. 723 dargestellten Hebers steigt das Wasser bis zur Höhe h_0 über dem Wasserspiegel, in welchem das untere Ende desselben eintaucht, wenn der Heber (etwa auf die in Fig. 722 dargestellte Art) vorher luftleer gemacht wurde. Die Höhenlage eines jeden der vier

Wasserspiegel ist unabhängig von der Höhenlage des Hebers und bleibt unverändert, während der ganze Heber um eine gewisse Grösse gesenkt oder gehoben wird. Sobald jedoch der Heber so tief gesenkt wird, dass das horizontale Verbindungsrohr mit dem höchsten der vier Wasserspiegel in gleiche Höhe gelangt, tritt eine Störung des Gleichgewichtes ein, und das Wasser beginnt durch das horizontale Verbindungsrohr nach dem tiefer liegenden Behälter hin abzufliessen, wobei das abfliessende Wasser beständig durch das aus dem höher liegenden Behälter zufliessende Wasser ersetzt wird. Wenn also ein solches continuirliches Ueberfliessen des Wassers aus dem höher liegenden nach dem tiefer liegenden Behälter hinüber stattfinden soll, so darf die Höhe des horizontalen Verbindungsrohres über dem höher liegenden der beiden Wasserspiegel nicht grösser sein als h_0.

Fig. 723.

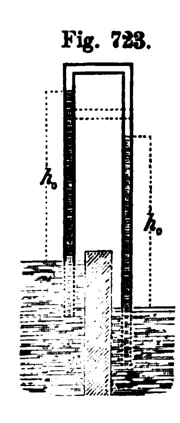
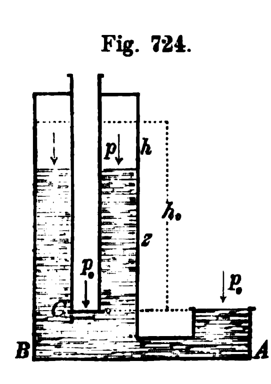


Fig. 724 zeigt: auf welche Weise erreicht werden kann, dass bei dem Ausschöpfen des Wassers aus dem Gefässe A trotz des allmählichen Abnehmens der Wassermenge die Wasserstandshöhe in diesem Gefässe stets unverändert erhalten wird. Der Wasserspiegel im Gefässe A muss stets in gleicher Höhe mit dem Wasserspiegel in dem Rohre C liegen, da an beiden Stellen die Oberfläche des Wassers dem atmosphärischen Drucke p_0 ausgesetzt ist. Wenn durch das Wegnehmen einer gewissen Wassermenge aus dem Gefässe A gleichzeitig an beiden Stellen ein Sinken des Wasserspiegels hervorgebracht wird, so tritt an dem unteren Rande des Rohres C eine Luftblase in das Wasser ein, welche nach oben steigend den Druck p der in dem oberen Theile des Gefässes B befindlichen (verdünnten) Luft so weit steigert, dass die beiden Wasserspiegel wiederum bis zu der früheren gleichen Höhe mit dem unteren Theile des Rohres C steigen. Denn die dem Drucke p entsprechende Druckhöhe h, und die Höhen-Differenz z der Wasserspiegel in den beiden Gefässen A und B bleiben zusammengenommen stets gleich der dem atmosphärischen Drucke p_0 entsprechenden Druckhöhe h_0 Es muss daher die Niveau-Differenz

Fig. 724.



z um ebenso viel abnehmen, als die dem Drucke p entsprechende Druckhöhe h zunimmt.

§ 186.

Manometer.

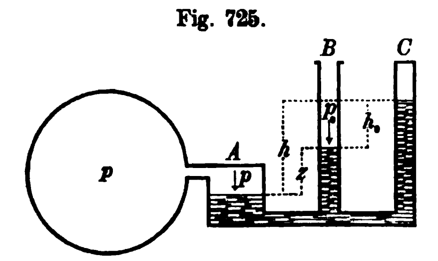
Als Maass des Druckes p, welchen die in einem Gefässe eingeschlossene comprimirte Luft auf jede Flächeneinheit der Wandfläche ausübt, kann die Verhältnisszahl:

$$1018)\quad \frac{p}{p_0} = n$$

betrachtet werden, welche angiebt: wie oft der einfache atmosphärische Druck p_0 in dem Drucke p enthalten ist. Setzt man $p_0 = 1$, so wird $p = n$, d. h. wenn der einfache atmosphärische Druck $p_0 = 10\,336$ Kil. pro $\square^m$ als Einheit des Druckes gewählt wird, so ist der Druck p durch die Zahl n als ein Vielfaches dieses Atmosphären-Druckes unmittelbar gegeben und kann in abgekürzter Redeform als ein „Druck von n Atmosphären" bezeichnet werden.

Wenn über den Wasserspiegeln der drei mit einander verbundenen Gefässe A, B, C (Fig. 725) in dem ersten comprimirte Luft vom Drucke p gleich n Atmosphären, in dem zweiten atmospärische Luft vom Drucke p_0 gleich 1 Atmosphäre, und in dem dritten ein luftleerer Raum (vom Drucke Null) sich befindet, so ist die Höhen-Differenz zwischen den beiden Wasserspiegeln in den Gefässen B und C gleich der atmosphärischen Druckhöhe $h_0 = 10^m,336$, die Höhen-Differenz zwischen den beiden Wasserspiegeln in den Gefässen A und C hat die Grösse $h = n \,.\, h_0$ und die Höhen-Differenz zwischen den beiden Wasserspiegeln in den Gefässen A und B hat die Grösse $z = (n - 1)\, h_0$. Der Druck der comprimirten Luft in dem Gefässe A kann daher aus den beobachteten Höhen-Differenzen h und z bestimmt werden mittelst der Gleichung:

Fig. 725.



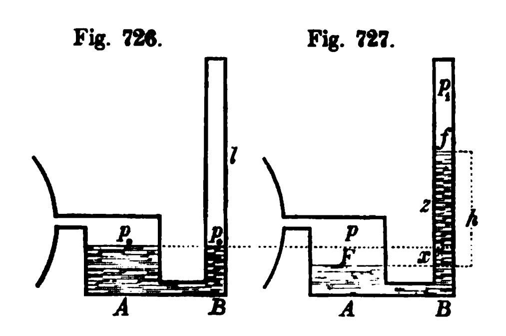
$$1019)\quad n = \frac{h}{h_0} = 1 + \frac{z}{h_0}, \quad \text{oder:} \quad n - 1 = \frac{z}{h_0}.$$

Die Druckhöhe h und die Atmosphären-Zahl n entsprechen dem

absoluten Drucke, die Druckhöhe z und die Atmosphären-Zahl $n - 1$ dem Ueberschusse dieses Druckes über den Druck der äusseren Atmosphäre oder dem sogenannten „Ueberdrucke". Wenn Quecksilber statt des Wassers benutzt wird, so ist in obiger Gleichung $h_0 = 0^m{,}760$ zu setzen.

Wenn z. B. ein offenes Quecksilber-Manometer AB die Niveau-Differenz $z = 1^m{,}14$ zeigt, so hat der Druck der eingeschlossenen Luft die Grösse: $n = 1 + \frac{1{,}14}{0{,}76} = 2{,}5$ Atmosphären oder $p = 2{,}5 \cdot 10\,336 = 25\,840$ Kil. pro □^{m}; der Ueberdruck beträgt 1,5 Atmosphären oder 15 504 Kil. pro □^{m}. Ein geschlossenes luftleeres Quecksilber-Manometer AC würde bei gleichem Drucke die Niveau-Differenz $h = 1^m{,}9$ zeigen.

Wenn bei dem in Fig. 726 dargestellten Manometer der Druck der in dem Gefässe A enthaltenen Luft von p_0 bis p zunimmt, und in Folge dessen das Quecksilber in dem Rohre B um die Höhe z steigt (Fig. 727), so wird dadurch der Druck der in dem oberen Raume des letzteren enthaltenen atmosphärischen Luft von p_0 bis auf eine gewisse Grösse p_1 gesteigert, für welche nach dem Mariotteschen Gesetze die Gleichung sich ergiebt:



$$1020)\quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{l}{l - z}.$$

Die dem Drucke p entsprechende Druckhöhe $\frac{p}{\gamma}$ ist um die Höhe $z + x = h$ grösser, als die dem Drucke p_1 entsprechende Druckhöhe, also ist:

$$1021)\quad p = \gamma h + p_1.$$

Der Inhalt $f \cdot z$ des in das Rohr B eingetretenen Quecksilbers ist gleich dem Inhalte $F \cdot x$ des aus dem Gefässe A ausgetretenen Quecksilbers, folglich ist:

$$1022)\quad h = z + x = z\left(1 + \frac{f}{F}\right).$$

Wenn man den aus dieser Gleichung für z zu entnehmenden Werth in Gleichung 1020) und den aus letzterer für p_1 sich ergebenden Werth in Gleichung 1021) substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$1023)\quad p = \gamma h + \frac{p_0}{1 - \left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{F}{F+f}\right)},$$

welche nach Substitution des Werthes $p_0 = \gamma h_0$ die Form annimmt:

$$1024)\quad p = \gamma \left[h + \frac{h_0}{1 - \left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{F}{F+f}\right)}\right].$$

Die dem Drucke p entsprechende Atmosphären-Zahl hat also die Grösse:

$$1025)\quad n = \frac{h}{h_0} + \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{F}{F+f}\right)}.$$

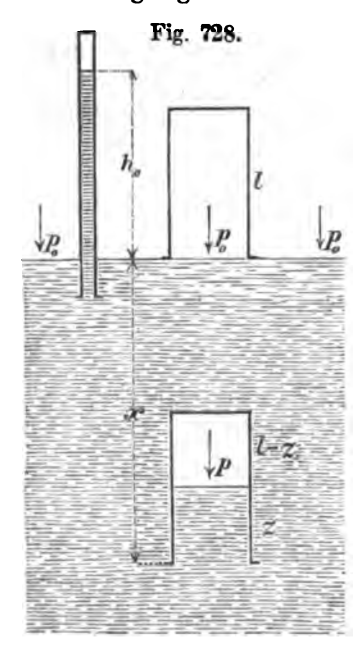
Wenn z. B. $l = h_0 = 0^m,760$ und $F = 4f$ ist, so entspricht der Niveau-Differenz $h = 0^m,570$ ein absoluter Druck von 3,25 Atmosphären oder von 3,25 . 10 336 = 33 592 Kil. pro □^{m}, und ein Ueberdruck von 2,25 Atmosphären oder von 23 256 Kil. pro □^{m}.

§ 187.

Cylindrische Taucherglocke.

Wenn die in Fig. **728** dargestellte Taucherglocke, welche in ihrer Anfangslage mit Luft von atmosphärischem Drucke gefüllt war, bis zu einer gewissen Tiefe unter den Wasserspiegel versenkt wird, und in Folge dessen das Wasser von unten her in den inneren Raum derselben eindringt, so erleidet die eingeschlossene Luft eine Compression, und nach dem Mariotte'schen Gesetze erhält man für den Druck der comprimirten Luft die Gleichung:

Fig. 728.



$$\frac{p}{p_0} = \frac{l}{l-z}, \text{ oder: } p = \frac{p_0 l}{l-z}.$$

Die Wirkung des atmosphärischen Druckes auf den äusseren freien Wasserspiegel kann man sich auf die in der Figur angedeutete Weise durch die Druckhöhe h_0 veranschaulichen, bis zu welcher in einem auf den Wasser-

spiegel gesetzten luftleeren Rohre das Wasser emporsteigen würde. Wenn also mit γ das Gewicht eines Cubikmeters Wasser bezeichnet wird, so ergiebt sich für den Druck der eingeschlossenen Luft, insofern derselbe dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe $h_0 + x - z$ das Gleichgewicht hält, der Werth:

$$p = \gamma\,(h_0 + x - z).$$

Indem man die obigen beiden Werthe von p einander gleichsetzt, erhält man die Gleichung:

$$\frac{p_0 l}{l - z} = \gamma\,(h_0 + x - z),$$

welcher man nach Substitution des Werthes: $p_0 = \gamma h_0$ auch die folgende Form geben kann:

$$x = z + \frac{h_0 z}{l - z}.$$

Wenn z. B. $l = 4^m$ gesetzt wird, so erhält man nach Substitution des dem gewöhnlichen atmosphärischen Drucke entsprechenden Werthes: $h_0 = 10^m,336$, für diejenige Tiefe, bis zu welcher der untere Rand unter den Wasserspiegel gesenkt werden müsste, wenn das Wasser bis zu der Höhe $z = 2^m$ im Inneren emporsteigen soll, den Werth:

$$x = 2 + \frac{10{,}336\,.\,2}{4 - 2} = 12^m{,}336.$$

Die oben gefundene Gleichung nimmt, für z aufgelöst, die folgende Form an:

$$z = \frac{h_0 + l + x}{2} - \sqrt{\left(\frac{h_0 + l + x}{2}\right)^2 - l\,x}$$

und würde in dieser letzteren Form zu benutzen sein, wenn aus dem gegebenen Werthe von x der zugehörige Werth von z berechnet werden soll.

§ 188.

Gleichgewicht schwimmender Luftbehälter.

Wenn ein mit Luft gefülltes, oben geschlossenes, unten offenes verticales cylindrisches Rohr in Wasser eingetaucht wird, und bei der Eintauchungstiefe a der Wasserspiegel im Inneren des Rohres in gleicher Höhe mit dem äusseren Wasserspiegel liegt (Fig. 729), so ist bei dieser Stellung des Rohres der Druck der eingeschlossenen Luft gleich dem Drucke der äusseren atmosphärischen Luft. Bei einer Vergrösserung der Eintauchungstiefe wächst der Druck der eingeschlossenen Luft, während der Druck der äusseren Luft unverändert bleibt, und es entsteht in Folge dessen eine Höhen-

Differenz zwischen den beiden Wasserspiegeln. Für den Druck p, welchen die eingeschlossene Luft bei der in Fig. 730 dargestellten Lage des Gefässes annimmt, erhält man nach dem Mariotte-schen Gesetze die Gleichung:

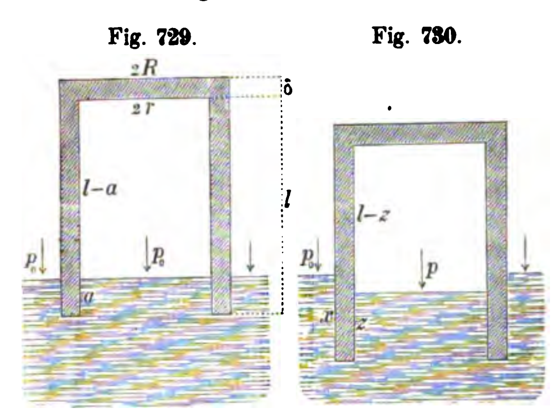


Fig. 729. Fig. 730.

$$1026)\quad \frac{p}{p_0} = \frac{l-a}{l-z}.$$

Die Druck-Differenz (oder der Ueberdruck) $p - p_0$ verhält sich zu dem atmosphärischen Drucke p_0, wie die dem Ueberdrucke entsprechende Druckhöhe $x - z$ zu der atmosphärischen Druckhöhe h_0, also ist:

$$1027)\quad \frac{p-p_0}{p_0} = \frac{x-z}{h_0}, \quad \text{oder:} \quad \frac{p}{p_0} = 1 + \frac{x-z}{h_0}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für das Druckverhältniss $\frac{p}{p_0}$ gefundenen Werthe erhält man die Gleichung:

$$1028)\quad \frac{l-a}{l-z} = 1 + \frac{x-z}{h_0},$$

welche, jenachdem dieselbe für x oder z aufgelöst wird, die Formen annimmt:

$$1029)\quad x = z + \left(\frac{z-a}{l-z}\right) h_0,$$

$$1030)\quad z = \frac{1}{2}(l + h_0 + x) - \sqrt{\frac{1}{4}(l + h_0 + x)^2 - lx - a h_0}.$$

Um die Gleichgewichts-Bedingung für die in Fig. 730 dargestellte Lage des Gefässes zu finden, hat man die in demselben befindliche Wasser- oder Luftmasse als mit dem Gefässe zu einem Ganzen verbunden zu betrachten und die algebraische Summe der auf das Ganze wirkenden Verticalkräfte gleich Null zu setzen. Wenn G das absolute Gewicht des Gefässes für sich allein, $s\left(=\frac{1{,}293}{1000}\right)$ das specifische Gewicht der äusseren atmosphärischen Luft und s_1 das specifische Gewicht der eingeschlossenen Luft bezeichnet — gemessen bei atmosphärischem Drucke oder bei

dem in Fig. 729 dargestellten Zustande derselben — so erhält man die Bedingungs-Gleichung:

$$1031)\quad 0 = \gamma R^2 \pi (x + h_0) - [\gamma R^2 \pi h_0 - s \gamma R^2 \pi (l - x + \delta)] - s_1 \gamma r^2 \pi (l - a) - \gamma r^2 \pi z - G.$$

In dieser Gleichung bezeichnet das erste Glied den von der unteren Seite her auf das Ganze übertragenen Druck, das zweite Glied den von der äusseren atmosphärischen Luft auf das Ganze von oben her ausgeübten Druck (welcher in der Höhe $l - x + \delta$ über dem Wasserspiegel um das Gewicht einer Luftsäule von dieser Höhe kleiner ist, als in der Höhe des Wasserspiegels selbst), das dritte und vierte Glied resp. das Gewicht der eingeschlossenen Luft- und Wasser-Masse. Aus der obigen Gleichung ergiebt sich für das der Eintauchungstiefe x entsprechende Gewicht G der Werth:

$$1032)\quad G = \gamma \pi \{R^2 [x + s (l - x + \delta)] - r^2 [z + s_1 (l - a)]\}.$$

Diese Gleichung kann für den Fall, dass das Gewicht des Gefässes allein nicht ausreicht, auch benutzt werden zur Berechnung des erforderlichen Uebergewichtes, mit welchem das Gefäss noch beschwert werden müsste, um bis zu der vorgeschriebenen Tiefe x einzutauchen.

Setzt man z. B. $l = 5^m$, $a = 0$ und $z = 0^m,1$, so erhält man aus Gleichung 1029) für x den Werth: $x = 0,1 + \frac{0,1}{4,9} \cdot 10,336 = 0^m,311$. Wenn ferner $r = 4^m$, $R = 4^m,005$, $\delta = 0^m,005$ gesetzt wird, und das Gefäss mit reinem Wasserstoffgase gefüllt war vom specifischen Gewichte $s_1 = \frac{0,0894}{1000}$, so ergiebt sich aus Gleichung 1032) für das zum Hervorbringen der Eintauchungtiefe $x = 0^m,311$ erforderliche Gewicht des Gefässes der Werth: $G = 10\,928,5$ Kil. Wenn das specifische Gewicht des Materials der Gefässwände gleich 8 ist, so würde bei den angenommenen Dimensionen das Gewicht desselben nur 7042,2 Kil. ($= 8000\,[R^2 \pi (l + \delta) - r^2 \pi l]$) betragen, und es würde daher zum Hervorbringen jener Eintauchungstiefe erforderlich sein, das Gefäss noch mit einem Uebergewichte von 3886,3 Kil. zu beschweren.

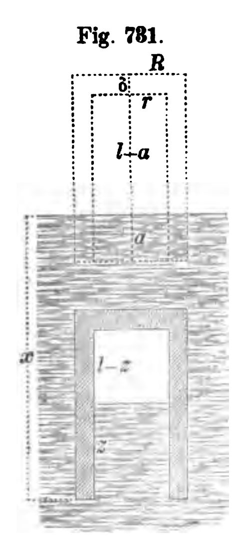
Setzt man ein anderes Mal $a = \frac{1}{2} l = 2^m,5$ und $x = 0$, so erhält man nach Gleichunng 1030) $z = 1^m,927$ und nach Gleichung 1032) $G = -96\,592,9$ Kil. Es würde also in diesem Falle die vertical aufwärts wirkende Kraft $96\,592,9 + 7042,2 = 103\,635,1$ Kil. erforderlich sein, um das Gefäss so weit emporzuheben, dass der untere Rand in gleicher Höhe mit dem Wasserspiegel sich befindet.

Die beiden Gleichungen 1029) und 1030) bleiben auch dann noch gültig, wenn die Eintauchungstiefe x grösser ist als die ganze Höhe des Gefässes, d. h. wenn das letztere ganz unterhalb

des Wasserspiegels sich befindet (Fig. 781). Als Gleichgewichts-Bedingung des eingetauchten Gefässes ergiebt sich für diesen Fall (statt 1032) die Gleichung:

$$1033)\quad G = \gamma R^2 \pi (l + \delta) - \gamma r^2 \pi z + s_1 \gamma r^2 \pi (l - a),$$

Fig. 781.



in welcher das erste Glied auf der rechten Seite den ganzen Auftrieb des mit Luft und Wasser gefüllten Gefässes, das zweite und dritte Glied resp. das Gewicht der in dem Gefässe enthaltenen Wasser- und Luftmasse, und G das absolute Gewicht des Gefässes für sich allein bezeichnet.

Setzt man z. B. $a = 0$, $l = 1^m$, $r = 0^m,2$, $R = 0^m,21$, $\delta = 0^m,01$ und $z = 0^m,2$, so erhält man nach Gleichung 1029) $x = 2^m,784$, und wenn das Gefäss mit gewöhnlicher atmosphärischer Luft gefüllt, also $s_1 = \frac{1,293}{1000}$ ist, so würde das Gewicht desselben nach Gleichung 1033) die Grösse $G = 114,63$ Kil. haben müssen, um bei dieser Eintauchungstiefe im Gleichgewicht sich zu befinden. Wenn das specifische Gewicht des Materials der Gefässwände gleich 8 ist, so würde bei den angenommenen Dimensionen das wirkliche Gewicht derselben nur 114,13 Kil. betragen. Es würde also, um bei dieser Eintauchungstiefe das Gefäss im Gleichgewicht zu halten, erforderlich sein, dasselbe mit einem Uebergewichte zu beschweren, dessen relatives Gewicht im Wasser 0,5 Kil. beträgt.

Die obige Gleichung kann auch in umgekehrter Weise benutzt werden, um aus einem gegebenen Werthe von G den zugehörigen Werth von z zu berechnen. Wenn allgemein mit s_0 das specifische Gewicht des Materials der Gefässwände bezeichnet wird, so ist:

$$1034)\quad G = s_0 \gamma [R^2 \pi (l + \delta) - r^2 \pi l]$$

in Gleichung 1033) zu substituiren, welche alsdann für z aufgelöst die Form annimmt:

$$1035)\quad z = (s_0 - s_1) l + s_1 a - (s_0 - 1) \left(\frac{R}{r}\right)^2 (l + \delta).$$

Bei den oben angenommenen Zahlenwerthen z. B. würde hieraus der Werth $z = 0^m,204$ sich ergeben, welchem nach Gleichung 1029) die Eintauchungstiefe $x = 2^m,856$ entspricht. Der Gleichgewichtszustand eines unterhalb des Wasserspiegels schwimmenden Luftbehälters ist in allen Fällen ein labiler Gleichgewichtszustand. Die geringste Vergrösserung der Eintauchungstiefe würde eine Verkleinerung des Inhaltes der eingeschlossenen Luft und in Folge dessen eine Tendenz zum Sinken herbeiführen, welche während des

Sinkens noch zunimmt. Die geringste Verminderung der Eintauchungstiefe dagegen würde eine Ausdehnung der eingeschlossenen Luft und in Folge dessen eine Tendenz zum Steigen herbeiführen, welche während des Steigens noch zunehmen würde, so lange bis das Gefäss die Oberfläche erreicht. Auf ähnliche Weise würde bei Aenderungen des auf den Wasserspiegel wirkenden atmosphärischen Druckes (oder des demselben entsprechenden Barometerstandes) das Gleichgewicht in der einen oder anderen Richtung gestört werden. Ein Steigen des Barometerstandes würde das sofortige Sinken des Apparates bis auf den Boden, ein Fallen des Barometerstandes dagegen würde das sofortige Steigen desselben bis an die Oberfläche zur Folge haben.

§ 189.

Differenzial-Barometer.

Das Gleichgewicht der in einem luftleeren verticalen Rohre vom atmosphärischen Drucke getragenen Wassersäule würde nicht gestört werden, wenn ein Theil derselben durch einen anderen Körper von gleichem specifischen Gewichte ersetzt würde. Wäre das Gewicht P dieses Körpers kleiner als das Gewicht γJ einer Wassermasse von gleichem Inhalt, so würde zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustandes erforderlich sein, an diesem Körper noch eine vertical abwärts wirkende Kraft K hinzuzufügen, welche gleich der Differenz jener beiden Gewichte ist. Wenn man in diesem Falle den Körper durch einen Faden mit einem unterhalb gelegenen festen Punkte verbindet (Fig. 732), so wird der Widerstand dieses festen Punktes jene zum Gleichgewichte erforderliche Kraft darstellen, und die Spannung des Fadens ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1036)\quad K = \gamma J - P.$$

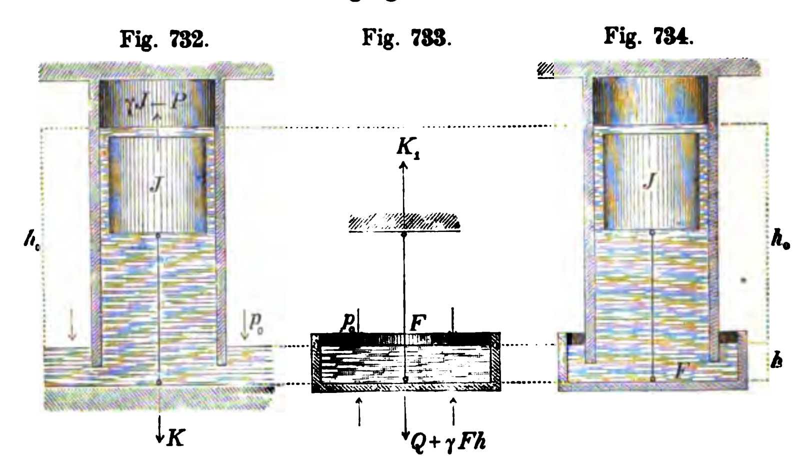
Der Aufhängepunkt eines bis zur Höhe h mit Wasser gefüllten cylindrischen Gefässes von der Grundfläche F hat das Gewicht Q des Gefässes und das Gewicht $\gamma F h$ der in demselben enthaltenen Wassermasse zusammengenommen zu tragen (Fig. 733), leistet also den Widerstand:

$$1037)\quad K_1 = Q + \gamma F h.$$

Dieselbe Grösse wird dieser Widerstand auch dann noch beibehalten, wenn ein beliebiger Körper in das Wasser eingetaucht wird, sobald gleichzeitig auf irgend eine Art bewirkt wird, dass die Wasserstandshöhe h dabei ungeändert bleibt. Wenn das Ganze von atmosphärischer Luft umgeben ist, so wird zwar ein Theil des ganzen Gewichtes von dem atmosphärischen Auftriebe getragen,

und in Folge dessen wird die Kraft K_1 eine etwas geringere Grösse annehmen; da indessen der atmosphärische Auftrieb eine verhältnissmässig sehr geringe Grösse hat, so kann derselbe in diesem Falle unberücksichtigt gelassen werden.

Fig. 732. Fig. 733. Fig. 734.



Denkt man sich in Fig. 732 den unteren Wasserbehälter, in welchen das luftleere (unbewegliche befestigte) Rohr eintaucht, ersetzt durch das in Fig. 733 dargestellte Wassergefäss und zugleich die Grössen J und P so gewählt, dass $K = K_1$ wird, so erhält man als Bedingungs-Gleichung für die in Fig. 734 dargestellte Gleichgewichtslage, bei welcher das untere Wassergefäss, an dem eingetauchten Körper aufgehängt, durch den Ueberschuss des Auftriebes über das Gewicht desselben im Gleichgewichte schwebend erhalten wird, die Gleichung:

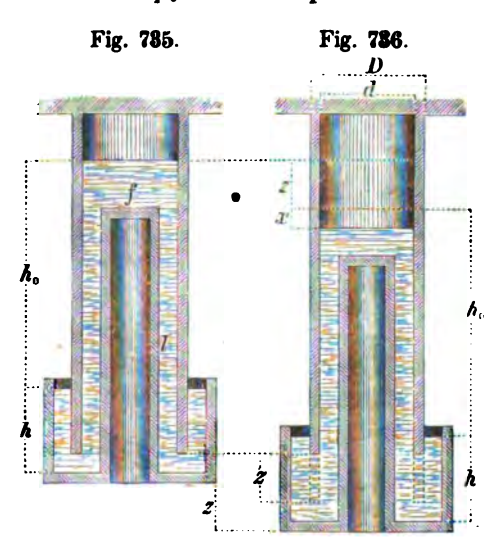
$$1038) \quad \gamma J = (P + Q) + \gamma F h.$$

Dieselbe Gleichung bleibt auch dann noch gültig, wenn der eingetauchte Körper in Form eines Cylinders von der Querschnittsfläche f und der Länge l mit dem Boden des hängenden Gefässes zu einem Stücke vereinigt wird, wobei alsdann durch eine im Inneren dieses Cylinders angebrachte Aushöhlung bewirkt werden kann, dass der Ueberschuss des Auftriebes über das Gewicht desselben die erforderliche Grösse erhält (Fig. 735). Wenn für diesen Fall die Grösse $P + Q$ als Totalgewicht der Wände des schwebenden Gefässes mit G bezeichnet wird, so ergiebt sich für die äusseren Dimensionen des Hohlcylinders die Bedingungs Gleichung:

$$1039) \quad \gamma f l = G + \gamma F h.$$

Keine von den Grössen γ, f, l, G, F ändert sich, wenn in der Grösse p_0 des atmosphärischen Druckes eine Aenderung eintritt, und die demselben entsprechende Druckhöhe z. B. abnimmt von der Grösse h_0 bis zu der Grösse $h_0 - x$. Es muss daher auch die Wasserstandshöhe h in dem hängenden Gefässe unverändert bleiben, während dasselbe in diejenige Gleichgewichtslage übergeht, welche diesem verminderten Drucke entspricht (Fig. 736). Die Bestimmung dieser neuen Gleichgewichtslage ist daher eine rein geometrische Aufgabe, insofern es sich darum handelt, diejenige Lage des Gefässes aufzufinden, bei welcher das Wasser auf solche Art in den beiden Gefässen sich vertheilt, dass für den Höhenunterschied der beiden Wasserspiegel die Grösse $h_0 - x$ sich ergiebt. Man findet die Grösse z, um welche das hängende Gefäss bei solcher Druckverminderung sich senkt, indem man den bei dieser Senkung in demselben frei werdenden mit Wasser sich füllenden Raum $\frac{1}{4}(D^2 - d^2)\pi z$ der Grösse $\frac{1}{4} d^2 \pi x$ gleichsetzt, um welche der Rauminhalt der über dem unteren Wasserspiegel stehenden Wassersäule in dem luftleeren Rohre gleichzeitig sich vermindert, also aus der Gleichung:

Fig. 785. Fig. 786.



$$1040) \quad \frac{1}{4}(D^2 - d^2)\pi z = \frac{1}{4} d^2 \pi x, \quad \text{oder:} \quad z = \frac{d^2 x}{D^2 - d^2},$$

welche nach Substitution des Werthes $\frac{D}{d} = n$ die Form annimmt:

$$1041) \quad z = \frac{x}{n^2 - 1}.$$

Zugleich ergiebt sich für die totale Senkung des oberen Wasserspiegels der Werth:

$$1042) \quad z + x = \frac{n^2 x}{n^2 - 1}.$$

Diese beiden Gleichungen gelten für negative sowohl als für positive Werthe von x, ebenso auch für den Fall, in welchem statt des Wassers eine beliebige andere tropfbare Flüssigkeit, z. B. Quecksilber, benutzt wird. In Gleichung 1038) würde für diesen letzteren Fall $\gamma = 13600$ (statt $\gamma = 1000$) zu substituiren sein.

Wenn z. B. $n = 1{,}02$ ist, so wird $z + x = 25{,}75\,x$ und $z = 24{,}75\,x$; es würde also eine Luftdruck-Veränderung, welche bei einem gewöhnlichen Quecksilber-Barometer einer Höhen-Aenderung der Quecksilber-Säule von 20 Millimetern entspricht, in diesem Falle bei dem hier beschriebenen Differenzial-Barometer bewirken, dass in dem luftleeren Rohre die Höhenlage der Quecksilber-Oberfläche um 515 Millimeter sich ändert. Gleichzeitig würde das ganze unten hängende Gefäss dabei in verticaler Richtung eine Wegeslänge von 495 Millimetern zurücklegen — und zwar bei steigendem Luftdrucke aufwärts, bei abnehmendem Drucke abwärts.

EINUNDDREISSIGSTES CAPITEL.

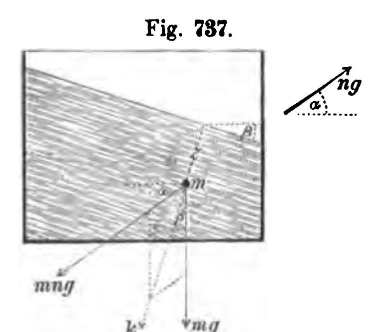
Relatives Gleichgewicht der Flüssigkeiten.

§ 190.

Relatives Gleichgewicht im beschleunigt fortschreitenden Raume.

Um die Bedingungen des relativen Gleichgewichtes zu finden für eine Wassermasse, welche unter Einwirkung der Schwerkraft in einem mit der Beschleunigung $n \,.\, g$ fortschreitenden Gefässe sich befindet, hat man sich an jedem Massentheilchen m zu den wirklich vorhandenen Kräften noch die jener Beschleunigung entsprechende in entgegengesetzter Richtung genommene Kraft $m \,.\, ng$ hinzugefügt zu denken, und auf die nunmehr als ruhend zu betrachtende Wassermasse die Bedingungen des absoluten Gleichgewichtes anzuwenden (Fig. 737). Für die horizontale und verticale Seitenkraft der Mittelkraft k aus den beiden Kräften mg und $m \,.\, ng$ erhält man (auf ähnliche Weise wie die Gleichungen 565) und 566) mit Bezug auf Fig. 474 gefunden wurden) die Gleichungen:

Fig. 737.



$$1043)\quad k \sin\beta = mng \cos\alpha,$$

$$1044)\quad k \cos\beta = mng \sin\alpha + mg.$$

aus denen für die Grössen β und k resp. die Werthe sich ergeben:

$$1045)\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{n\cos\alpha}{1 + n\sin\alpha}, \qquad 1046)\quad k = mg\sqrt{1 + n^2 + 2n\sin\alpha}.$$

Da die Grössen α und n unabhängig sind von der Lage des betreffenden Wassertheilchens, so hat die Mittelkraft k an allen Stellen dieselbe Richtung, und da nach § 171 die Oberfläche einer im Gleichgewichtszustande befindlichen Wassermasse überall rechtwinkelig zur Kraftrichtung steht, so bildet die Oberfläche in diesem Falle eine Ebene, welche den Winkel β mit der Horizontalen einschliesst.

Für das Verhältniss der Mittelkraft k zu dem Gewichte mg des Wassertheilchens ergiebt sich aus Gleichung 1046) der Werth:

$$1047)\quad \mathfrak{v} = \sqrt{1 + n^2 + 2n\sin\alpha}.$$

Der Druck gegen ein im Abstande z vom Wasserspiegel befindliches Flächentheilchen ist $\mathfrak{v}$-mal so gross als derselbe sein würde, wenn statt der Kräfte k nur die Gewichte mg auf die einzelnen Wassertheilchen wirkten, hat also pro Flächeneinheit (nach Gleichung 910) die Grösse:

$$1048)\quad p = \mathfrak{v} \cdot \gamma z = \gamma z\sqrt{1 + n^2 + 2n\sin\alpha}.$$

Für $\alpha = 90^\circ$ wird $\beta = 0$ und $p = (1 + n)\gamma z$, also für $n = 1$ wird $p = 2\gamma z$, d. h. in einem mit der Beschleunigung g vertical aufwärts bewegten Gefässe bildet der Wasserspiegel bei relativem Gleichgewichtszustande eine horizontale Ebene, und der Druck im Innern der Wassermasse ist überall doppelt so gross, als derselbe beim Ruhezustande des Gefässes sein würde. Für $\alpha = -90^\circ$ und $n = 2$ wird $\beta = 180^\circ$ und $p = \gamma z$, d. h. die freie Oberfläche ist in diesem Falle eine horizontale Ebene, welche die untere Grenzfläche der Wassermasse bildet, und der Druck in der Höhe z oberhalb dieses Wasserspiegels ist ebenso gross, als derselbe beim Ruhezustande des Gefässes in der Tiefe z unterhalb des Wasserspiegels sein würde. Für $\alpha = -90^\circ$ und $n = 1$ wird überall der Druck p gleich Null. Wenn $\sin\alpha = -\frac{1}{n}$ ist, so wird $\beta = 90^\circ$; die freie Oberfläche bildet also in diesem Falle eine verticale Ebene.

Die Druckvertheilung im Inneren eines geschlossenen lufterfüllten Rohres, welches mit der Beschleunigung $n \cdot g$ in seiner Achsenrichtung fortschreitet, ist auf gleiche Weise wie bei der in Fig. 709 dargestellten verticalen atmosphärischen Luftsäule geschehen, zu ermitteln, sobald man überall statt der Gewichte die n-fachen Gewichte in Rechnung bringt, also statt der Grössen γ

und γ_0 resp. die Grössen $n\gamma$ und $n\gamma_0$, statt des Quotienten $\frac{p_0}{\gamma_0} = 7992$ den Werth $\frac{p_0}{n\gamma_0} = \frac{7992}{n}$ substituirt. Statt Gleichung 972) erhält man also nach der in Fig. 738 gewählten Bezeichnungsweise für diesen Fall die Gleichungen:

Fig. 738.

$$1049)\quad l - z = \frac{7992}{n} \lg\left(\frac{p}{p_1}\right),$$

$$1050)\quad z = \frac{7992}{n} \lg\left(\frac{p_0}{p}\right), \text{ oder:}$$

$$1051)\quad p = p_1 \cdot e^{\frac{n(l-z)}{7992}} = p_0 \cdot e^{\frac{-nz}{7992}}.$$

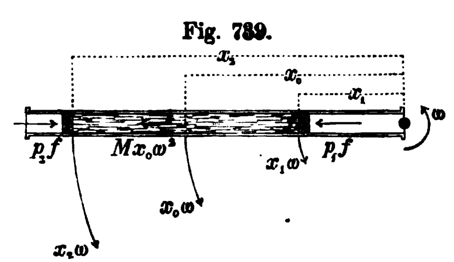
Wenn z. B. in einem mit der Beschleunigung $n \cdot g = 10 \cdot g = 98^m,1$ in seiner Längenrichtung fortschreitenden Rohre von 100^m Länge am Vorderende der Druck 1 Atmosphäre betrüge, so würde am entgegengesetzten Ende der Druck $e^{\frac{10 \cdot 100}{7992}} = 1{,}133$ Atmosphären betragen, und wenn umgekehrt an diesem letzteren Ende der Druck 1 Atmosphäre betrüge, so würde am Vorderende der Druck von $\frac{1}{1{,}133} = 0{,}8824$ Atmosphären stattfinden.

§ 191.

Relatives Gleichgewicht im gleichförmig rotirenden Raume.

Denkt man sich statt der in Fig. 651 dargestellten rotirenden Stange ein Rohr in horizontaler Drehungsebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω um einen seiner Endpunkte rotirend, und in diesem Rohre eine horizontale Wassersäule befindlich, welche mittelst zweier gegen die Enden derselben gedrückten Kolben im relativen Ruhezustande erhalten wird, so findet man nach der in Fig. 739 gewählten Bezeichnungsweise als Bedingung des relativen Gleichgewichtes dieser Wassersäule die Gleichung:

Fig. 739.



$$1052)\quad p_2 f - p_1 f = M x_0 \omega^2,$$

welche ausdrückt: dass der Ueberschuss des gegen die äussere Endfläche der Wassersäule wirkenden Druckes über den gegen die innere Endfläche wirkenden Druck gleich der Centrifugalkraft

der Wassersäule sein muss. In dieser Gleichung ist (als Abstand des Schwerpunktes der Wassersäule vom Drehpunkte) $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ zu setzen, und wenn mit γ das Gewicht — also mit $\frac{\gamma}{g}$ die Masse — eines Cubikmeters Wasser bezeichnet wird, so ist als Masse der ganzen Wassersäule $M = \frac{\gamma}{g} f(x_2 - x_1)$ zu setzen. Man erhält also die Gleichung:

$$p_2 f - p_1 f = \frac{\gamma}{g} f(x_2 - x_1)\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\omega^2, \quad \text{oder:}$$

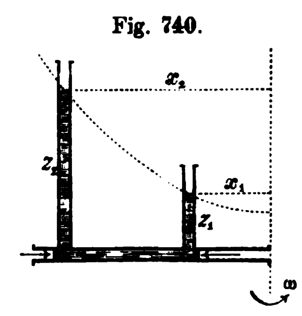
$$1053) \quad \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = \frac{(x_2\,\omega)^2}{2g} - \frac{(x_1\,\omega)^2}{2g}.$$

Wenn hierin die Grössen $\frac{p_2}{\gamma}$ und $\frac{p_1}{\gamma}$ als die den Drücken p_2 und p_1 entsprechenden Druckhöhen resp. mit z_2 und z_1, ferner die Grössen $x_2\omega$ und $x_1\omega$ als Peripherie-Geschwindigkeiten der Endpunkte der Wassersäule resp. mit v_2 und v_1 bezeichnet werden, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$1054) \quad z_2 - z_1 = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g},$$

und zeigt in dieser Form, dass die Differenz der beiden Druckhöhen gleich der Differenz der den beiden Peripherie-Geschwindigkeiten entsprechenden Geschwindigkeitshöhen sein muss. Wenn also auf dem horizontalen Rohre an den Endpunkten jener Wassersäule verticale mit Wasser gefüllte Anzatzröhren sich befänden, so würde bei relativem Gleichgewichtszustande der ganzen Wassermasse die Höhen-Differenz der beiden Wasserspiegel in diesen verticalen Röhren ebenfalls gleich der Differenz der ihren Peripherie-Geschwindigkeiten entsprechenden Geschwindigkeitshöhen sein (Fig. 740).

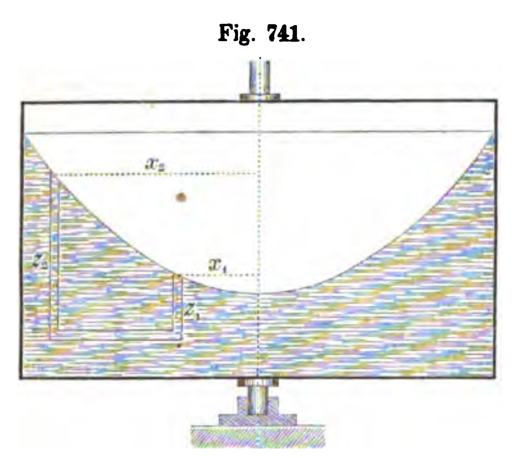
Fig. 740.



Betrachtet man diese Wassermasse als einen Theil der in Fig. 741 dargestellten um eine verticale Drehachse rotirenden Wassermasse, so findet man, dass der obige Satz zur Bestimmung der Höhen-Differenz zweier in den Abständen x_2 und x_1 von der Drehachse befindlicher Punkte des Wasserspiegels benutzt werden

kann, und dass diese Höhen-Differenz auch hier gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen jener beiden Punkte sein muss.

Fig. 741.



Setzt man $x_1 = 0$, $x_2 = x$ und $x\omega = v$; ferner $z_1 = 0$ und $z_2 = z$, so nimmt die obige Gleichung die Form an:

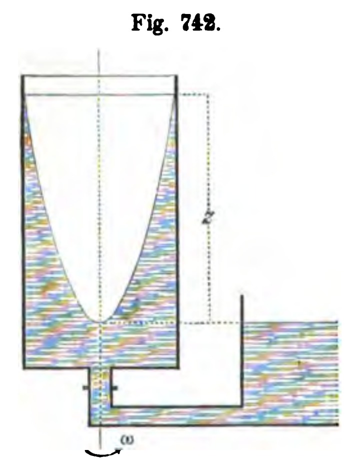
1055) $$z = \frac{v^2}{2g} = \frac{x^2\omega^2}{2g},$$

oder: $$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} z,$$

und zeigt, dass der Wasserspiegel eine krumme Fläche bildet, welche als Oberfläche eines Rotations-Paraboloides, oder als die von einer Parabel bei der Umdrehung um ihre Achse beschriebene Rotationsfläche betrachtet werden kann (vergl. Gleichung 107) und Fig. 424).

Wenn ein um seine verticale Achse rotirendes cylindrisches Gefäss durch ein in der Mitte des Gefässbodens einmündendes Ansatzrohr in Verbindung gesetzt wird mit einem ausserhalb liegenden ruhenden Wasserbehälter (Fig. 742), so wird der tiefste Punkt, d. h. der in die Drehachse fallende Scheitelpunkt des paraboloidischen Wasserspiegels in gleiche Höhe mit dem äusseren ruhenden Wasserspiegel sich einstellen, während die an der Peripherie des rotirenden Gefässes liegenden Punkte des Wasserspiegels um die der Peripherie-Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe z über den äusseren Wasserspiegel sich erheben.

Fig. 742.

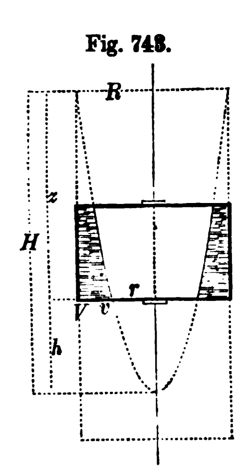


Es würde z. B. bei einer Peripherie-Geschwindigkeit des rotirenden Gefässes von 28 Metern pro Secunde das Wasser am Rande desselben um die Höhe $z = \frac{28^2}{2 \cdot 9,8} = 40^m$ über den äusseren Wasserspiegel sich erheben. Wären in der Wand des rotirenden Gefässes Oeffnungen angebracht in einer Höhe von weniger als 40 Metern über dem äusseren Wasserspiegel, so würde das Wasser durch diese Oeffnungen ausfliessen. Es kann daher ein solches rotirendes Gefäss (als Centrifugalpumpe) benutzt werden, um Wasser

aus einem tiefer liegenden in einen höher liegenden Behälter hinüber zu befördern. Den gleichen Zweck würde man auch dadurch erreichen können, dass man, anstatt das ganze Gefäss rotiren zu lassen, nur die in demselben befindliche Wassermasse in Drehbewegung versetzt — etwa mittelst einer innerhalb des ruhenden Gefässes rotirenden Welle, welche, mit Armen oder Flügeln versehen, die Wassermasse zwingt, an der Drehbewegung mit theilzunehmen.

Denkt man sich zwei feste Horizontal-Ebenen durch die rotirende Flüssigkeit hindurch gelegt, so findet man, dass der Gleichgewichtszustand des zwischen den beiden Ebenen befindlichen Theiles der Flüssigkeit keine Störung erleiden würde, wenn die oberhalb der oberen und unterhalb der unteren Ebene liegenden Theile der Flüssigkeit ganz hinweggenommen würden. Es können daher zur Bestimmung des an irgend einer Stelle im Innern der rotirenden Wassermasse stattfindenden Druckes die Gleichungen 1053) und 1054) auch dann noch benutzt werden, wenn die obere Randlinie und der Scheitelpunkt der paraboloidischen Oberfläche resp. oberhalb und unterhalb — also beide ganz ausserhalb — des rotirenden Gefässes liegen, wie bei dem in Fig. 743 dargestellten Falle. Der Druck-Differenz zwischen den beiden in der Figur durch ihre Peripherie-Geschwindigkeiten V und v bezeichneten Stellen entspricht eine Druckhöhe z, welche gleich der Differenz der beiden Geschwindigkeitshöhen ist, und da an der mit v bezeichneten Stelle als einem in der Oberfläche liegenden Punkte der Druck gleich Null ist, so hat an der mit V bezeichneten Stelle der Druck die Grösse:

Fig. 743.



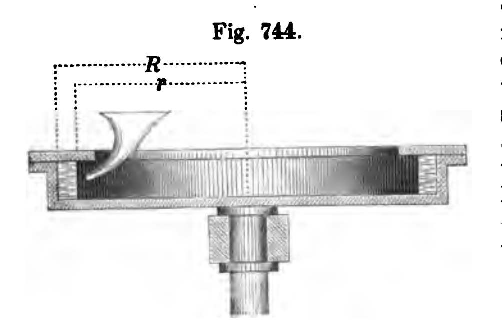
$$1056)\quad p = \gamma z = \gamma (H - h) = \gamma \left(\frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) = \gamma \frac{V^2}{2g} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Wenn z. B. ein cylindrisches Gefäss vom Halbmesser $R = 0^m{,}6$ mit einer Geschwindigkeit von 1200 Umdrehungen pro Minute oder mit der Peripherie-Geschwindigkeit $V = 75^m{,}4$ pro Secunde um seine Achse sich dreht, so hat die der Peripherie-Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe die Grösse $H = \frac{V^2}{2g} = 290^m$, und wenn das Gefäss so weit gefüllt ist, dass am Boden desselben die Dicke der Wasserschicht die Grösse $R - r = \frac{1}{2} R = 0^m{,}3$ hat, so entspricht der Druck an der Peripherie des Gefässbodens einer Wassersäule von der Höhe $z = 290\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 217^m{,}5$. Wenn dagegen die Dicke

dieser Wasserschicht nur ein Zehntel des Halbmessers betrüge, so würde der Druck einer Wassersäule von der Höhe $z = 290\left(1 - \frac{81}{100}\right) = 55^m,1$ entsprechen.

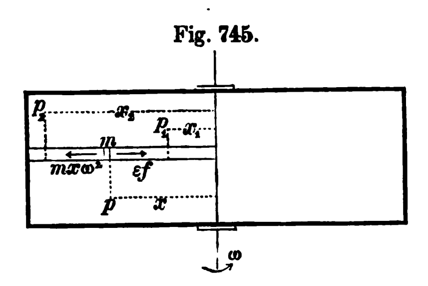
Da die Druckhöhe z nur von den Peripherie-Geschwindigkeiten der äusseren und inneren Peripherie des flüssigen Ringes abhängt, so kann die obige Gleichung zur Bestimmung dieser Druckhöhe auch dann noch benutzt werden, wenn das rotirende Gefäss statt des Wassers irgend eine andere tropfbare Flüssigkeit wie z. B. flüssiges Metall enthält. Wenn bei dem Giessen eines metallenen Radreifen vom äusseren Halbmesser $R = 0^m,6$ in einer rotirenden Gussform, welche pro Minute 1200 Umdrehungen macht, der flüssige Ring die Dicke $R - r = 0^m,06$ erreicht hat (Fig. 744), so ist der Druck an der äusseren Peripherie desselben ebenso gross als derselbe sein würde, wenn über der ruhenden Gussform eine flüssige Metallsäule von der Höhe $z = 55^m,1$ stände.

Fig. 744.



Denkt man sich das in Fig. 739 dargestellte Rohr mit Luft statt mit Wasser gefüllt, so findet man, dass die Gleichungen 1053) und 1054) auch für diesen Fall noch gültig bleiben würden, sobald der dem Druckunterschiede $p_2 - p_1$ entsprechende Unterschied der Dichtigkeit klein genug ist, um vernachlässigt werden zu können, d. h. sobald die Drehgeschwindigkeit und die Länge der Luftsäule verhältnissmässig klein sind. Für den Fall, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist, hat man sich die ganze Länge der Luftsäule in ihre unendlich kleinen Theile Δ zerlegt zu denken, und zunächst für die in einem solchen Theile enthaltene Masse $m = \frac{\gamma}{g} f \Delta$ die Gleichgewichts-Bedingung aufzustellen, indem man die Druck-Differenz εf gleich der Centrifugalkraft $m x \omega^2$ setzt (Fig. 745). Man erhält dann die Gleichung:

Fig. 745.



$$1057)\quad \varepsilon f = \frac{\gamma}{g} f \Delta x \omega^2, \quad \text{oder:} \quad \frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{\omega^2}{g} x \Delta,$$

welche nach Substitution des aus dem Mariotte'schen Gesetze sich ergebenden Werthes $\gamma = \frac{p}{p_0} \gamma_0$ die Form annimmt:

$$1058)\quad \frac{p_0}{\gamma_0}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) = \frac{\omega^2}{g}(x\,\Delta).$$

Durch Summation der auf gleiche Weise für alle einzelnen Abschnitte Δ aufzustellenden Gleichungen erhält man alsdann die Gleichung:

$$1059)\quad \frac{p_0}{\gamma_0}\,\Sigma\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) = \frac{\omega^2}{g}\,\Sigma(x\,\Delta)^{*}),$$

in welcher der auf der linken Seite stehende Ausdruck auf gleiche Weise wie in § 179 zu bestimmen ist, und die auf der rechten Seite stehende Grösse dieselbe Bedeutung hat, wie die in Gleichung 1053) auf der rechten Seite stehende Grösse. Es gilt also für diesen Fall die Gleichung:

$$1060)\quad \frac{p_0}{\gamma_0}\lg\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{(x_2\,\omega)^2}{2g} - \frac{(x_1\,\omega)^2}{2g}, \quad \text{oder:}$$

$$7992\lg\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Setzt man $v_1 = 0$ und — wie bei den vorigen Zahlenbeispielen — die der Peripherie-Geschwindigkeit des Gefässes entsprechende Geschwindigkeitshöhe $\frac{v_2^2}{2g} = 290^{m}$, so erhält man für das Verhältniss des Druckes an der Peripherie zu dem Drucke in der Mitte den Werth: $\frac{p_2}{p_1} = e^{\frac{290}{7992}} = 1{,}0369$, während aus Gleichung 1053) — welche für diesen Fall die Form annimmt $\frac{p_2 - p_1}{\gamma_1} = 290$, oder: $\frac{p_1}{\gamma_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = 290$ — der nur wenig von dem obigen abweichende Werth $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{290}{7992} = 1{,}0363$ sich ergeben würde:

---

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung:

$$\frac{p_0}{\gamma_0}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = \frac{\omega^2}{g}\int_{x_1}^{x_2} x\,dx, \quad \text{oder:} \quad \frac{p_0}{\gamma_0}\lg\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{\omega^2}{g}\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right).$$

ACHTER ABSCHNITT.

Dynamik flüssiger Körper.

ZWEIUNDDREISSIGSTES CAPITEL.

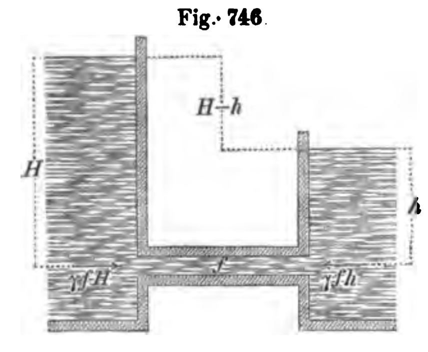
Ausfluss des Wassers.

§ 192.

Ausflussgeschwindigkeit.

Der Gleichgewichtszustand einer unter Einwirkung der Schwerkraft befindlichen Wassermasse erfordert, dass sämmtliche Punkte ihrer freien Oberfläche in einer und derselben Horizontal-Ebene liegen. Wenn zwei Wasserbehälter, deren Wasserspiegel in verschiedenen Höhen liegen, durch ein horizontales Zwischenrohr mit einander in Verbindung gesetzt werden (Fig. 746), so wirken auf die beiden Endflächen der in letzterem enthaltenen horizontalen Wassersäule ungleiche Drücke $\gamma . f H$ und $\gamma f h$. Durch die Differenz dieser beiden Drücke wird die anfangs ruhende Wassersäule in Bewegung gesetzt, also eine beschleunigte Bewegung hervorgebracht, und die Beschleunigung dieser Bewegung ist im Anfange gleich dem Druck-Ueberschuss $\gamma . f H - \gamma f h$ dividirt durch die Masse jener Wassersäule.

Fig. 746



Bei dem Vorrücken der Wassersäule längs des horizontalen Verbindungsrohres treten am Vorderende derselben fortwährend Wassertheilchen aus dem Rohre heraus, während am anderen

Ende stets ebenso grosse Quantitäten in das Rohr hineintretend an die in Bewegung begriffene Wassersäule sich anschliessen. In Folge dessen sinkt der höher liegende, und steigt der tiefer liegende von den beiden Wasserspiegeln. Wenn jedoch — wie hier vorausgesetzt werden soll — die Querschnittsfläche f sehr klein ist im Verhältniss zu den beiden Wasserspiegel-Flächen, so dürfen die beiden Druckhöhen H und h während der Ausflussbewegung als unveränderliche Grössen betrachtet werden, und man darf in diesem Falle annehmen, dass trotz der partiellen Bewegung des Wassers innerhalb des Rohres und in der Nähe der beiden Enden desselben doch im Innern jedes der beiden Wasserbehälter der Druck dieselbe Grösse behält, wie wenn die Wassermasse daselbst im Ruhezustande sich befände; dass also die treibende Kraft $\gamma f(H - h)$ während der Ausflussbewegung unverändert bleibt.

Wenn die Geschwindigkeit der in dem Rohre sich bewegenden Wassersäule (oder die Ausflussgeschwindigkeit) zu einer gewissen Zeit die Grösse v erreicht hat, so ist die in dem nächstfolgenden Zeittheilchen τ von derselben zurückgelegte Wegeslänge gleich $v \,.\, \tau$, und die von jener treibenden Kraft während dieses Zeittheilchens verrichtete mechanische Arbeit hat die Grösse:

$$1061) \quad \mathfrak{A} = \gamma f(H - h)\, v\tau.$$

Da nach § 166 das Wasser als eine Flüssigkeit von unveränderlichem Rauminhalt betrachtet werden darf, und demgemäss die Summe der von den inneren Kräften (nämlich von den Druckkräften zwischen den benachbarten Wassertheilchen) verrichteten mechanischen Arbeiten stets gleich Null zu setzen ist (vergl. § 105), so darf man annehmen, dass jene mechanische Arbeit lediglich auf Erzeugung einer gleich grossen Quantität von lebendiger Kraft verwendet wird.

An der Stelle, wo das Wasser in das horizontale Rohr eintritt, gehen beständig Wassertheilchen aus dem Ruhezustande in Bewegung über, wird also fortwährend neue lebendige Kraft erzeugt. Die während jenes Zeittheilchens τ in das Rohr eintretende Wassermenge hat den Inhalt $i = f v \tau$ und das Gewicht $mg = \gamma f v \tau$, also die Masse $m = \frac{\gamma}{g} f v \tau$. Es wird daher an dieser Stelle während der Zeit τ die lebendige Kraft erzeugt:

$$1062) \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{\gamma}{g} f v \tau \frac{v^2}{2}.$$

Die ganze während der Zeit τ verrichtete mechanische Arbeit $\mathfrak{A}$ kann man sich in zwei Theile zerlegt denken, von denen der eine darauf verwendet wird, die lebendige Kraft der bereits in Bewegung begriffenen Wassermasse zu vermehren, und der andere Theil darauf verwendet wird, den in das Rohr eintretenden vorher ruhenden Wassertheilchen die Geschwindigkeit v zu ertheilen. Dieser letztere Theil wird einen um so grösseren Bruchtheil des Ganzen bilden, je grösser die Ausflussgeschwindigkeit v bereits geworden ist, kann aber niemals grösser als das Ganze werden. Die Ausflussgeschwindigkeit v kann daher diejenige Grösse niemals überschreiten, bei welcher die an der Eintrittsstelle zu erzeugende lebendige Kraft für sich allein schon die ganze gleichzeitig verrichtete mechanische Arbeit in Anspruch nimmt. Durch Gleichsetzung der beiden für $\frac{mv^2}{2}$ und für $\mathfrak{A}$ gefundenen Ausdrücke erhält man demnach für diese Grenze der Ausflussgeschwindigkeit die Gleichung:

$$1063)\quad \frac{\gamma}{g} f v \tau \cdot \frac{v^2}{2} = \gamma f (H - h) v \tau, \quad \text{oder:} \quad v = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Die anfangs beschleunigte Bewegung der Wassertheilchen längs des Ausflussrohres geht allmählich in eine gleichförmige Bewegung über; es tritt ein Beharrungszustand ein, bei welchem ein ferneres Wachsen der Ausflussgeschwindigkeit nicht mehr stattfindet, und die diesem Beharrungszustande entsprechende Ausflussgeschwindigkeit ist gleich derjenigen Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper erlangen würde beim Herabfallen von einer Höhe, welche gleich der Differenz der beiden Druckhöhen ist.

Wenn man in der oben gefundenen Gleichung statt der Druckhöhen H und h resp. die denselben entsprechenden Drücke $P = \gamma H$ und $p = \gamma h$ einführt, so nimmt dieselbe die Form an:

$$1064)\quad v = \sqrt{2g\left(\frac{P}{\gamma} - \frac{p}{\gamma}\right)}$$

und kann in dieser Form zur Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit auch dann noch benutzt werden, wenn zugleich in jedem der beiden Wasserbehälter auf die Oberfläche des Wassers noch ein gewisser Druck wirkt: sobald mit P und p resp. die wirklichen — d. h. die mit Berücksichtigung jener auf die Oberflächen wirkenden Drücke zu bestimmenden — Drücke pro Flächeneinheit gegen die verschlossen gedachte Ausflussmündung bezeichnet werden. Die Gleichung 1063) kann ebenfalls für diesen letzteren

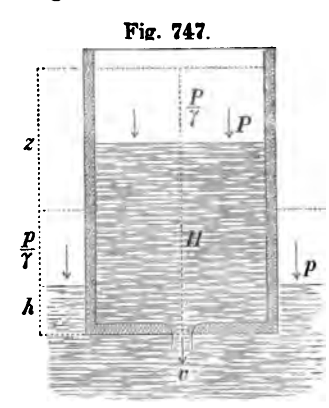
Fall als gültig bleibend betrachtet werden: sobald darin einer jeden von den beiden Grössen H und h resp. die Bedeutung „der dem Totaldrucke entsprechenden Druckhöhe“ beigelegt wird, d. h. der wirklichen Höhe des betreffenden Wasserspiegels über der Ausflussmündung vermehrt um diejenige Höhe, welche eine auf dem Wasserspiegel ruhende Wasserschicht haben müsste, um den auf die Oberfläche wirkenden Druck hervorzubringen.

Wenn man statt dessen mit H und h — wie früher — die wirklichen Höhen der beiden Wasserspiegel über der Ausflussmündung bezeichnet, und mit P und p resp. die auf die Oberflächen wirkenden Drücke, so erhält man für die Ausflussgeschwindigkeit die allgemeine Gleichung:

$$1065) \quad v = \sqrt{2g\left[\left(H + \frac{P}{\gamma}\right) - \left(h + \frac{p}{\gamma}\right)\right]}.$$

Dasselbe Beweisverfahren, welches zum Auffinden dieser allgemeinen Gleichung führte, lässt sich auch auf den in Fig. 747 dargestellten Fall anwenden, bei welchem die Ausfluss-Oeffnung in der horizontalen Bodenwand — statt in der verticalen Seitenwand — des Ausfluss-Gefässes sich befindet. Die obige Gleichung kann daher auch für diesen Fall als gültig betrachtet werden und nimmt, wenn die Differenz der beiden totalen Druckhöhen mit z bezeichnet wird, die einfachere Form an:

Fig. 747.



$$1066) \quad v = \sqrt{2gz}.$$

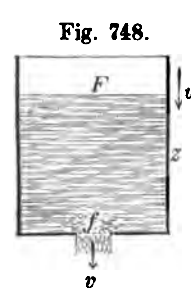
Die in dem Zeittheilchen τ ausfliessende Wassermenge bildet eine Wassersäule von der Länge $v\tau$ und vom Querschnitte f, hat also den Rauminhalt $fv\tau$. Um dieselbe Grösse nimmt die in dem Gefässe enthaltene Wassermenge während dieses Zeittheilchens ab. Für die Geschwindigkeit w, mit welcher der Wasserspiegel in dem Ausflussgefässe sich senkt, erhält man also, wenn mit F der Flächeninhalt dieses Wasserspiegels bezeichnet wird, die Gleichung:

$$1067) \quad Fw\tau = fv\tau, \text{ oder: } w = \frac{f}{F}v.$$

Unter Voraussetzung einer prismatischen oder cylindrischen Form des Gefässes (Fig. 748) darf man annehmen, dass die im

Innern desselben unterhalb des Wasserspiegels befindlichen Wassertheilchen ebenfalls mit der Geschwindigkeit w sinken. Die obige Gleichung zeigt daher: dass die Geschwindigkeit, mit welcher die Wassertheilchen sich bewegen, bevor dieselben zum Ausflusse gelangen, nur dann als verschwindend klein betrachtet werden darf, wenn den früher gemachten Voraussetzungen entsprechend das Verhältniss $\frac{f}{F}$ einen sehr kleinen Werth hat. Für den Fall, dass diese Bedingung nur ungenügend erfüllt ist, würde für die während der Zeit τ an der Ausflussstelle erzeugte lebendige Kraft statt des in Gleichung 1062) angegebenen Werthes $\frac{mv^2}{2} - 0$ der Werth:

Fig. 748.



$$1068)\quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mw^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{f^2}{F^2}\right)$$

zu substituiren sein, und nach Gleichung 1061) würde — wenn darin die Grösse $\gamma f v \tau$ als das Gewicht der während des Zeittheilchens τ ausfliessenden Wassermenge gleich mg gesetzt, und die Druckhöhen-Differenz $H - h$ mit z bezeichnet wird, — die während dieses Zeittheilchens verrichtete mechanische Arbeit $\mathfrak{A} = mgz$ zu setzen sein. Durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe erhält man die Gleichung:

$$1069)\quad mgz = \frac{mv^2}{2} - \frac{mw^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{f^2}{F^2}\right), \text{ oder:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gz}{1 - \frac{f^2}{F^2}}}.$$

Die Bedingung des Unveränderlichbleibens der Druckhöhe z würde man sich in diesem Falle dadurch erfüllt denken können: dass in dem Gefässe oben ein Zufluss stattfindet, durch welchen die in dem Gefässe enthaltene Wassermenge unveränderlich erhalten wird.

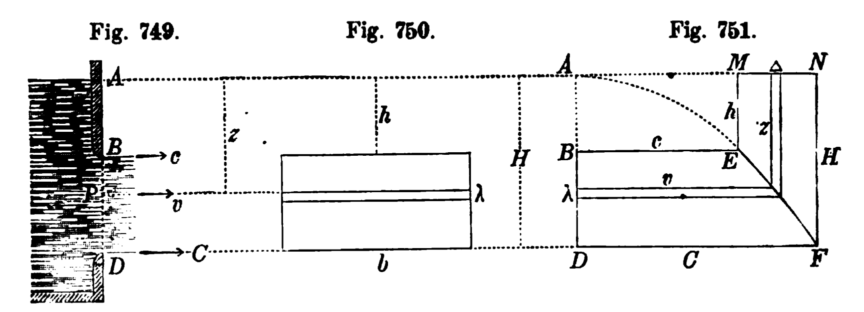
§ 193.

Ausflussmenge.

Wenn die Druckhöhen — und in Folge dessen auch die Ausflussgeschwindigkeiten — an allen Stellen der Ausflussöffnung gleiche Grössen haben, so findet man die in jeder Zeiteinheit ausfliessende Wassermenge, indem man den Inhalt einer prisma-

tischen Wassersäule berechnet, deren Länge gleich der Ausflussgeschwindigkeit, und deren Querschnitt gleich der Mündungsfläche ist. Wenn dagegen die Druckhöhen an verschiedenen Stellen der Ausflussöffnung verschiedene Grössen haben — wie z. B. bei dem Ausfluss in den leeren Raum aus einer Oeffnung der verticalen Seitenwand des Ausflussgefässes (Fig. 749 und Fig. 750) — so hat man sich die Querschnittsfläche des ausfliessenden Wasserstrahles in ihre unendlich kleinen Theile zerlegt zu denken, und für jeden Theil einzeln genommen die Ausflussmenge nach der obigen Regel zu bestimmen; durch Summation der auf solche Weise gefundenen Grössen erhält man alsdann die totale Ausflussmenge.

Fig. 749. Fig. 750. Fig. 751.



An der Stelle P (Fig. 749) hat die Ausflussgeschwindigkeit nach Gleichung 1066) die Grösse $v = \sqrt{2gz}$, und ein in dieser Höhe befindlicher horizontaler Flächenstreifen von der Breite b und der unendlich kleinen Höhe λ (Fig. 750) liefert zu der ganzen Ausflussmenge den Beitrag $b\lambda . v$. Bei der angenommenen Rechteckform der Ausflussöffnung bildet die Grösse b einen gemeinschaftlichen Factor der von sämmtlichen Flächenstreifen gelieferten Beiträge; die ganze pro Zeiteinheit ausfliessende Wassermenge hat also den Inhalt:

$$1070) \quad J = \Sigma(b\lambda v) = b\Sigma(v\lambda).^{*})$$

Wenn man zur Bestimmung des Ausdruckes $\Sigma(v\lambda)$ das Gesetz, nach welchem v mit z sich ändert, auf die in Fig. 751 angedeutete Weise graphisch

*) Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung würde diese Gleichung die Form annehmen:

$$J = b\int_{z=h}^{z=H} v\,dz = b\int_{h}^{H}\sqrt{2gz}\,dz = b\sqrt{2g}\int_{h}^{H} z^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{2}{3}\,b\sqrt{2g}\,(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}).$$

darstellt, so findet man, dass die Curve AEF, welche das Wachsen der Geschwindigkeit mit zunehmender Tiefe veranschaulicht, eine Parabel bildet, deren Scheitelpunkt A in der Ebene des Wasserspiegels liegt, und dass in dieser Figur die Grösse $\Sigma(v\lambda)$ als Summe der zwischen den Horizontalen BE und DF liegenden horizontalen Flächenstreifen durch die Fläche $BEFD$ dargestellt erscheint, so wie der Ausdruck $\Sigma(z\Delta)$ als Summe der zugehörigen, zwischen den Verticalen ME und NF liegenden verticalen Flächenstreifen in gleicher Weise durch die Fläche $MEFN$ repräsentirt wird. Nach der in Fig. 751 angegebenen Bezeichnung ist also:

$$1071)\quad \Sigma(v\lambda) = CH - ch - \Sigma(z\Delta).$$

Zur Bestimmung des Ausdruckes $\Sigma(z\Delta)$ hat man $z = \frac{v^2}{2g}$ zu substituiren und erhält (mit Benutzung der in § 109 gefundenen Summationsformel 461) die Gleichung:

$$\Sigma(z\Delta) = \frac{1}{2g}\Sigma(v^2\Delta) = \frac{1}{2g}\left(\frac{C^3}{3} - \frac{c^3}{3}\right),$$

welche nach Substitution der Werthe $C^2 = 2gH$ und $c^2 = 2gh$ die Form annimmt:

$$\Sigma(z\Delta) = \frac{1}{3}(CH - ch).$$

Aus Gleichung 1071) ergiebt sich hiernach für die gesuchte Grösse der Werth:

$$1072)\quad \Sigma(v\lambda) = \frac{2}{3}(CH - ch).$$

Wenn man den hier gefundenen Werth in Gleichung 1070) substituirt, so erhält man für die in jeder Zeiteinheit ausfliessende Wassermenge die Gleichung:

$$1073)\quad J = \frac{2}{3}b(CH - ch) = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\,(H\sqrt{H} - h\sqrt{h}),$$

welche für den Fall, in welchem $h = 0$ ist, die Form annimmt:

$$1074)\quad J = \frac{2}{3}bH\sqrt{2gH}$$

und in dieser letzteren Form zeigt, dass die bei einem Ueberfalle ausfliessende Wassermenge so gross ist wie diejenige Wassermenge, welche sich ergeben würde, wenn sämmtliche Wassertheilchen mit der gleichen Geschwindigkeit $\frac{2}{3}\sqrt{2gH}$ zum Ausfluss gelangten.

§ 194.

Ausflusszeit.

Wenn aus der horizontalen Boden-Oeffnung f eines cylindrischen oder prismatischen Gefässes (Fig. 752) das Wasser mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ ausfliesst, während oben kein Zufluss

stattfindet, so vermindert sich die in dem Gefässe enthaltene Wassermenge pro Zeiteinheit um die Grösse fv; in Folge dessen sinkt der Wasserspiegel, und zwar nach Gleichung 1067) mit der Geschwindigkeit:

Fig. 752.

$$1075)\quad w = \frac{f}{F} v = \sqrt{2\left(g \frac{f^2}{F^2}\right) z}.$$

Wenn ein materieller Punkt eine gleichförmig verzögerte Bewegung ausführt, und seine Geschwindigkeit in jeder Secunde um p abnimmt, so wird in dem Augenblicke, wo derselbe noch um die Strecke z von dem Endpunkte seiner Bewegung entfernt ist, seine Geschwindigkeit gleich $\sqrt{2pz}$ geworden sein, und die Zeit, welche der Punkt zum Zurücklegen der noch übrigen Strecke z braucht, hat die Grösse $t = \sqrt{\frac{2z}{p}}$. Setzt man hierin $p = g\frac{f^2}{F^2}$, so erhält man für die Zeit, nach welcher der Wasserspiegel den Boden des Gefässes erreicht, die Gleichung:

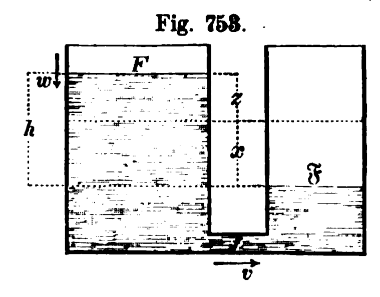
$$1076)\quad t = \sqrt{\frac{2zF^2}{gf^2}},$$

und für die Zeit, in welcher die Wasserstandshöhe von H bis h abnimmt, die Gleichung:

$$1077)\quad t = \frac{F}{f}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Auf ähnliche Weise lässt sich die Zeit berechnen, in welcher bei den in Fig. 753 dargestellten beiden Gefässen die Wasserstandshöhe des einen so weit sinkt, und die des andern so weit steigt, bis die beiden Wasserspiegel in einer und derselben Höhe liegen. Die Ausflussgeschwindigkeit hat die Grösse:

Fig. 753.



$$v = \sqrt{2g(x+z)}$$

und für die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels erhält man die Gleichung:

$$1878)\quad w = \frac{f}{F} v = \sqrt{2g\frac{f^2}{F^2}(x+z)}.$$

Die Wassermenge, welche aus dem einen Gefässe ausfliesst, ist dieselbe, welche in das andere hineinfliesst, also ist:

$$1079)\quad \mathfrak{F}x = Fz, \text{ oder: } x = \frac{F}{\mathfrak{F}} z.$$

Nach Substitution dieses Werthes für x nimmt die vorige Gleichung die Form an:

$$1080)\quad w = \sqrt{2\left[g\frac{f^2}{F^2}\left(1+\frac{F}{\mathfrak{F}}\right)\right]z}$$

und zeigt, dass die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels in jeder Secunde um die Grösse:

$$p = g\frac{f^2}{F^2}\left(1+\frac{F}{\mathfrak{F}}\right)$$

abnimmt. Für die Zeit, in welcher derselbe die Strecke z zurücklegt, erhält man also die Gleichung:

$$t = \sqrt{\frac{2z}{p}} = \sqrt{\frac{2z}{g} \cdot \frac{F^2\mathfrak{F}}{f^2(F+\mathfrak{F})}},$$

welche nach Substitution des Werthes $z + x = z\left(1+\frac{F}{\mathfrak{F}}\right) = h$ die Form annimmt:

$$1081)\quad t = \frac{F\mathfrak{F}}{f(F+\mathfrak{F})}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Wenn F so gross ist, dass das Verhältniss $\frac{\mathfrak{F}}{F}$ gleich Null gesetzt werden kann, so ergiebt sich hieraus für die Füllungszeit des kleineren Gefässes die Gleichung:

$$1082)\quad t = \frac{\mathfrak{F}}{f}\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

welche auch für kleinere Werthe von F noch gültig bleibt, sobald die Wasserstandshöhe in dem Ausflussgefässe durch Zufluss unveränderlich erhalten wird.

Für den Fall, dass die horizontale Querschnittsfläche des Ausflussgefässes nach oben hin proportional der Höhe über der Ausflussöffnung zunimmt — wie z. B. bei einer Schale von der Form eines Rotations-Paraboloides (Fig. 754) oder bei einem liegenden dreiseitigen Prisma (Fig. 755) — würde man nach der in den Figuren angegebenen Bezeichnungsweise zu setzen haben:

$$1083)\quad \frac{\mathfrak{F}}{F} = \frac{z}{h}, \text{ oder: } \mathfrak{F} = \frac{F}{h} \cdot z,$$

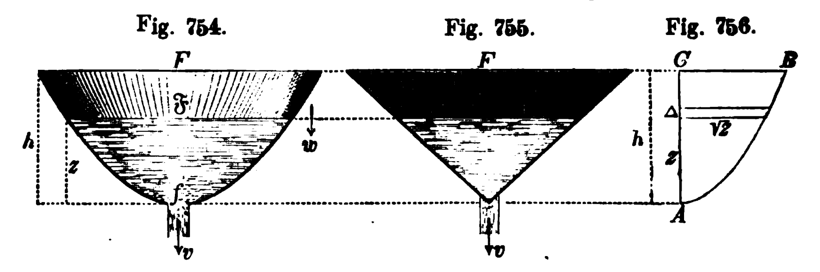
und für die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels in dem Augenblicke, wo derselbe in der Höhe z über der Ausflussöffnung sich befindet, die Gleichung erhalten:

$$1084)\quad w = \frac{f}{\mathfrak{F}}\sqrt{2gz} = \frac{fh}{F}\sqrt{\frac{2g}{z}}.$$

Die Zeit τ, in welcher der sinkende Wasserspiegel bei dieser Geschwindigkeit die unendlich kleine Strecke Δ zurücklegt, ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1085)\quad w\tau = \Delta,\ \text{oder:}\ \tau = \frac{\Delta}{w} = \frac{F}{fh\sqrt{2g}}(\Delta\sqrt{z})$$

Fig. 754. Fig. 755. Fig. 756.



und für die ganze Ausflusszeit erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$1086)\quad t = \Sigma(\tau) = \frac{F}{fh\sqrt{2g}}\Sigma(\Delta\sqrt{z}).$$

Die Bedeutung des Ausdruckes $\Sigma(\Delta\sqrt{z})$ kann man sich auf die in Fig. 756 dargestellte Weise durch die Fläche ABC veranschaulichen, deren Begrenzungslinie AB die Form einer Parabel hat, und für deren Flächeninhalt man (auf gleiche Weise, wie mit Bezug auf Fig. 751 erklärt wurde) die Grösse $\frac{2}{3}h\sqrt{h}$ findet. Nach Substitution dieses Werthes erhält man für die Ausflusszeit die Gleichung:

$$1087)\quad t = \frac{F}{fh\sqrt{2g}}\cdot\frac{2}{3}h\sqrt{h} = \frac{1}{3}\frac{F}{f}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Diese Gleichung nimmt, wenn mit $c = \sqrt{2gh}$ die anfängliche Ausflussgeschwindigkeit und mit $J = \frac{1}{2}Fh$ der ganze Inhalt des Gefässes bezeichnet wird, die Form an:

$$1088)\quad t = \frac{4}{3}\frac{J}{fc},$$

und zeigt, dass die Ausflusszeit $\frac{4}{3}$ mal so gross ist als diejenige Zeit, in welcher die gleiche Quantität bei constanter Ausflussgeschwindigkeit c ausfliessen würde.

Soll die Geschwindigkeit $w = \frac{f}{\mathfrak{F}}\sqrt{2gz}$ des sinkenden Wasser-

spiegels während des Sinkens unverändert bleiben, so muss der Horizontal-Querschnitt $\mathfrak{F}$ der Grösse $\sqrt{z}$ proportional sich ändern, was z. B. dann der Fall sein würde, wenn von den zwei rechtwinkelig zu einander durch die Achse gelegten Vertical-Durchschnitten des Gefässes der eine die Form eines Rechtecks und der andere die in Fig. 754 dargestellte parabolische Form hätte.

§ 195.

Hydraulischer Druck.

Der Druck, welchen im Inneren des Ausflussgefässes die in Bewegung begriffenen Wassertheilchen auf die Gefässwände und auf einander gegenseitig übertragen, ist im Allgemeinen verschieden von demjenigen Drucke, welchen unter sonst gleichen Umständen bei verschlossener Ausflussöffnung das im Ruhezustande befindliche Wasser in gleicher Tiefe unterhalb des Wasserspiegels ausüben würde — d. h. verschieden von dem hydrostatischen Drucke — und wird zum Unterschiede von dem letzteren der „hydraulische Druck“ genannt. Um die Messbarkeit und die Grösse des hydraulischen Druckes sich zu veranschaulichen, hat man sich an der betreffenden Stelle des Ausflussgefässes ein verticales, oben geschlossenes luftleeres Rohr angesetzt zu denken: die Höhe der Wassersäule, welche in diesem Rohre stehend dem hydraulischen Drucke das Gleichgewicht halten würde, ist als die dem hydraulischen Drucke entsprechende Druckhöhe zu betrachten.

Wenn man auf die bereits in Fig. 673 und Fig. 747 angedeutete Weise den im Inneren des Ausflussgefässes auf die Wasseroberfläche wirkenden Druck P, ebenso auch den ausserhalb des Gefässes auf den Wasserspiegel über der Ausflussmündung wirkenden Gegendruck p, beide auf Druckhöhen reducirt — d. h. wenn man sich statt dieser Drücke auf jedem der beiden Wasserspiegel eine Wasserschicht ruhend denkt von derjenigen Höhe, welche dieselbe haben müsste, um durch ihr Gewicht den betreffenden Druck hervorzubringen — und wenn die auf solche Weise zu ermittelnde Differenz der beiden Totaldruck-Höhen über der Ausflussmündung mit h bezeichnet wird, so ergiebt sich nach dem Principe der lebendigen Kraft (Gleichung 1069) für die Ausflussgeschwindigkeit v bei der in Fig. 757 gewählten Bezeichnungsweise die Gleichung:

$$1089)\quad \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mc^2 = mgh, \quad \text{oder:}\quad v^2 = c^2 + 2gh.$$

Betrachtet man ein anderes Mal die in der Figur mit $\mathfrak{F}$ bezeichnete horizontale Querschnittsfläche der Wassermasse als freie Oberfläche derselben, und denkt man sich den in dieser Fläche wirkenden (hydraulischen) Druck $\mathfrak{p}$ dargestellt durch eine auf derselben liegende Wasserschicht, deren Höhe x gleich der gesuchten hydraulischen Druckhöhe für diese Stelle ist, so wird für diesen Fall die Grösse $x + (h - z)$ als Differenz der beiden Totaldruck-Höhen über der Ausflussmündung in Rechnung zu bringen sein, und man erhält für die Ausflussgeschwindigkeit die zweite Gleichung:

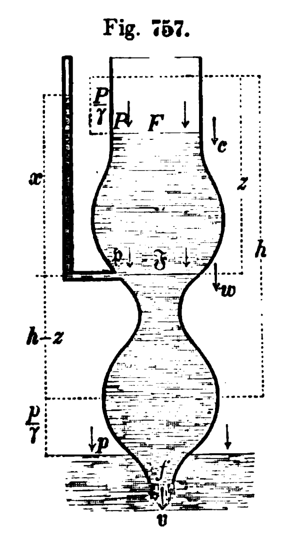


Fig. 757.

$$1090)\quad v^2 = w^2 + 2g(x + h - z).$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden für v^2 gefundenen Werthe erhält man eine Gleichung, aus welcher für die hydraulische Druckhöhe x der Werth sich ergiebt:

$$1091)\quad x = z - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right).$$

Die hydraulische Druckhöhe an einer bestimmten Stelle im Inneren des Ausflussgefässes ist gleich der hydrostatischen Druckhöhe an derselben Stelle: vermindert um den Ueberschuss der Geschwindigkeitshöhe, welche der Geschwindigkeit des Wassers an dieser Stelle entspricht, über die Geschwindigkeitshöhe, welche der Geschwindigkeit des Wassers an der freien Oberfläche entspricht.

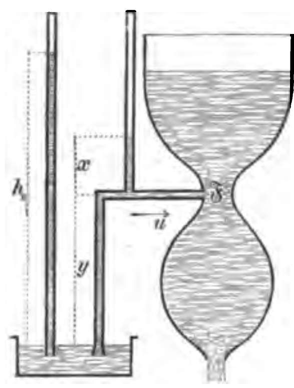
Da $Fc = \mathfrak{F}w = fv$ ist, so kann der obigen Gleichung die Form gegeben werden:

$$1092)\quad x = z - \frac{w^2}{2g}\left(1 - \frac{\mathfrak{F}^2}{F^2}\right) = z - \frac{v^2}{2g}\left(\frac{f^2}{\mathfrak{F}^2} - \frac{f^2}{F^2}\right)$$
$$= z - \frac{c^2}{2g}\left(\frac{F^2}{\mathfrak{F}^2} - 1\right).$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, dass die hydraulische Druckhöhe x grösser ist als die hydraulische Druckhöhe z an solchen Stellen des Gefässes, wo $\mathfrak{F} > F$ ist; kleiner dagegen an solchen Stellen, wo $\mathfrak{F} < F$ ist.

Bei einem von atmosphärischer Luft umgebenen Gefässe, dessen horizontaler Querschnitt $\mathfrak{F}$ an irgend einer Stelle so sich verengt, dass für die hydraulische Druckhöhe x aus der obigen Gleichung ein Werth sich ergiebt, welcher kleiner ist als die atmosphärische Druckhöhe $h_0 = 10^m,336$, würde also durch eine an dieser Verengungs-Stelle in der Gefässwand angebrachte Oeffnung das Wasser nicht ausfliessen, sondern vielmehr von aussen her atmosphärische Luft einströmen wie in einen luftverdünnten Raum; oder wenn statt dessen mittelst eines nach unten hin umgebogenen Ansatzrohres jene Stelle in Verbindung gesetzt wird mit einem Wasserbehälter, dessen (gleichfalls dem atmosphärischen Drucke ausgesetzter) Wasserspiegel um die Höhe y tiefer liegt, so wird aus diesem Wasserbehälter das Wasser, von dem atmosphärischen Drucke getrieben, durch das Rohr hinauf in das Ausflussgefäss hineinströmen mit der Geschwindigkeit $u = \sqrt{2g[h_0 - (x + y)]}$, für welche ein positiver Werth sich ergiebt, so lange $x + y < h_0$ ist (Fig. 758).

Fig. 758.



Die oben gefundenen Gleichungen bleiben indessen nur so lange gültig, als dieselben für die Grösse x an keiner Stelle des Gefässes einen Werth ergeben, welcher kleiner ist als Null; denn der hydraulische Druck kann — ebenso wie der hydrostatische Druck — niemals negativ werden. Der Grenzfall, bis zu welchem die Gleichung 1089) noch den richtigen Werth für die Ausflussgeschwindigkeit angiebt, ist derjenige Fall, bei welchem der kleinste von den nach Gleichung 1092) für die verschiedenen Stellen des Gefässes zu berechnenden Werthen der hydraulischen Druckhöhe x die Grösse Null annimmt. Für die Geschwindigkeit w, mit welcher in diesem Grenzfalle das Wasser durch den betreffenden verengten Querschnitt $\mathfrak{F}$ hindurchfliessen würde, erhält man aus Gleichung 1091) oder 1092), indem man darin $x = 0$ setzt, den Werth:

$$1093)\quad w = \sqrt{c^2 + 2gz} = \sqrt{\frac{2gz}{1 - \frac{\mathfrak{F}^2}{F^2}}}.$$

Um ferner dasjenige Querschnittsverhältniss zu finden, bei welchem dieser Fall überhaupt eintritt, hat man zunächst der Gleichung 1089), welche für diesen Grenzfall noch gültig bleibt, durch Substitution des Werthes $c = \frac{f}{F} v$ die Form zu geben:

$$1094)\quad v^2 = \frac{f^2}{F^2}v^2 + 2gh,\quad \text{oder:}\quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{f^2}{F^2}}}$$

und alsdann die beiden Wassermengen fv und $\mathfrak{F}w$ einander gleichzusetzen, woraus sich die Bedingungs-Gleichung ergiebt:

$$1095)\quad f\sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{f^2}{F^2}}} = \mathfrak{F}\sqrt{\frac{2gz}{1-\frac{\mathfrak{F}^2}{F^2}}},\quad \text{oder:}\ \mathfrak{F} = \frac{Ff\sqrt{h}}{\sqrt{z(F^2-f^2)+hf^2}}.$$

In diesem Falle würde — wie Gleichung 1093) zeigt — das Wasser durch den verengten Querschnitt $\mathfrak{F}$ mit derselben Geschwindigkeit hindurchfliessen, wie wenn unterhalb desselben ein absolut leerer Raum sich befände. Grösser als die dem Ausflusse in den absolut leeren Raum entsprechende Ausflussgeschwindigkeit kann aber die Geschwindigkeit des durchströmenden Wassers an der Verengungs-Stelle niemals werden. Folglich wird die Geschwindigkeit w den in Gleichung 1093) angegebenen Werth auch dann noch beibehalten, wenn der verengte Querschnitt $\mathfrak{F}$ noch kleiner als derjenige ist, welcher der Bedingungs-Gleichung 1095) entspricht. Da ferner durch die Ausflussmündung f immer nur so viel Wasser ausfliessen kann, als durch den verengten Querschnitt $\mathfrak{F}$ hinzufliesst, so wird die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wasserstrahles — vorausgesetzt, dass derselbe die Ausflussmündung f vollständig ausfüllt — in diesem Falle nicht mehr nach Gleichung 1094) bestimmt werden dürfen, sondern vielmehr nach der Gleichung:

$$1096)\quad v = \frac{\mathfrak{F}}{f}w = \frac{\mathfrak{F}}{f}\sqrt{\frac{2gz}{1-\frac{\mathfrak{F}^2}{F^2}}}.$$

Wenn z. B. bei dem in Fig. 759 dargestellten Falle des Ausflusses aus einem von atmosphärischer Luft umgebenen Gefässe — bei welchem man sich zur Bestimmung der totalen Druckhöhen sowohl innerhalb als ausserhalb des Gefässes die atmosphärische Druckhöhe $h_0 = 10^m{,}336$ zu der wirklichen Höhe des betreffenden Wasserspiegels über der Ausflussmündung hinzugefügt zu denken hat — der verengte Querschnitt $\mathfrak{F}$ kleiner ist als der nach Gleichung 1095) zu berechnende Werth, d. h. wenn $\mathfrak{F} < \frac{Ff\sqrt{h}}{\sqrt{z^2(F^2-f^2)+hf^2}}$ ist, so wird das Wasser durch diesen Querschnitt mit der Geschwindigkeit $w = \sqrt{\frac{2gz}{1-\frac{\mathfrak{F}^2}{F^2}}}$ hindurchfliessen. Zugleich wird an dieser Stelle eine Unterbrechung der Continuität stattfinden, insofern unterhalb der Verengung ein absolut leerer Raum, und in dem tiefer liegenden Theile des Gefässes ein

neuer Wasserspiegel sich bildet. Dieser mittlere Wasserspiegel wird eine solche Höhenlage annehmen, bei welcher aus dem unteren Theile des Gefässes ebenso viel Wasser ausfliesst, als durch den verengten Querschnitt von oben zufliesst. Man findet diese Höhenlage, indem man die der Druckhöhen-Differenz entsprechende Anfangsgeschwindigkeit

Fig. 759.

$$v = \sqrt{c_1^2 + 2gy} = \sqrt{\frac{2gy}{1 - \frac{f^2}{F_1^2}}}$$ der in Gleichung 1096) gefundenen Ausflussgeschwindigkeit gleichsetzt, also aus der Gleichung:

$$\sqrt{\frac{2gy}{1 - \frac{f^2}{F_1^2}}} = \frac{\mathfrak{F}}{f}\sqrt{\frac{2gz}{1 - \frac{\mathfrak{F}^2}{F^2}}}, \text{ oder:}$$

$$y = z \cdot \frac{F^2\mathfrak{F}^2}{F_1^2 f^2}\left(\frac{F_1^2 - f^2}{F^2 - \mathfrak{F}^2}\right).$$

Auch bei den in Fig. 760 und Fig. 761 dargestellten Fällen wird die wirkliche Ausflussmenge niemals grösser sein können als diejenige, welche sich ergeben würde aus der Annahme: dass an der engsten Stelle des conischen Ausflussrohres ein Ausfluss in den absolut leeren Raum stattfindet. Die Ausflussmenge wird diesen Werth wirklich erreichen, sobald der kleinste Querschnitt des Rohres kleiner ist oder wenigstens nicht grösser als der in Gleichung 1095) für $\mathfrak{F}$ gefundene Werth. An der engsten Stelle des Ausflussrohres findet, wenn $x < h_0$ ist, stets eine saugende Wirkung statt, welche benutzt werden kann, um mittelst eines daselbst angesetzten Saugrohres aus einem tiefer liegenden Wasserbehälter das Wasser hinaufzusaugen — und zwar bei dem vorausgesetzten Falle bis zu der Höhe $h_0 = 10^m,336$ als Grenze der Saughöhe —. Zugleich erklärt es sich hieraus, dass bei vorgeschriebener Weite der in einer Gefässwand anzubringenden Ausflussöffnung eine Vergrösserung der Ausflussmenge erzielt werden kann durch das Ansetzen eines nach aussen hin sich erweiternden conischen Ansatzrohres, insofern dadurch eine Mitwirkung des atmosphärischen Druckes bei dem Hervorbringen der Ausflussgeschwindigkeit veranlasst wird. Eine solche Mitwirkung des atmosphärischen Druckes wird indessen in der angegebenen Weise nur so lange stattfinden, als der oben gemachten Voraussetzung entsprechend die Ausfluss-

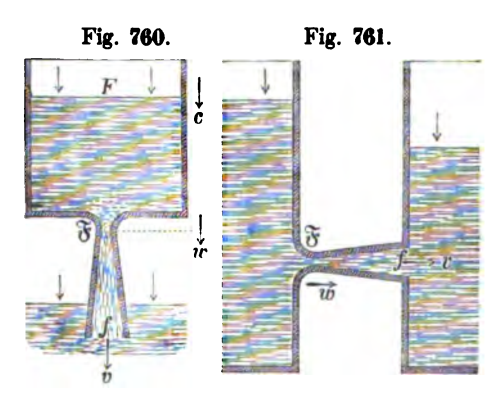


Fig. 760. Fig. 761.

mündung f durch den ausfliessenden Wasserstrahl noch vollständig ausgefüllt wird. Bei stärker divergirenden Ausflussröhren wird diese Voraussetzung nicht mehr zutreffen, und sobald die Divergenz einen gewissen Grad überschreitet, wird der Ausfluss so erfolgen, wie wenn der verengte Querschnitt $\mathfrak{F}$ selbst die Ausflussmündung bildet.

§ 196.

Druckhöhen-Verluste bei plötzlichen Querschnitts-Vergrösserungen des ausfliessenden Wasserstrahles.

Die in § 192 gefundenen allgemeinen Gleichungen für die Ausflussgeschwindigkeit wurden aus dem Principe der lebendigen Kraft abgeleitet; ihre Gültigkeit beruht also auf der Voraussetzung: dass die ganze vom Wasserdrucke verrichtete mechanische Arbeit lediglich auf Erzeugung von lebendiger Kraft verwendet wird, und zwar derjenigen speciellen Art von lebendiger Kraft, welche den fortschreitenden Bewegungen der Wassertheilchen längs des Ausflussrohres entspricht. Diese Voraussetzung darf im Allgemeinen als zutreffend betrachtet werden, so lange die Querschnitts-Veränderungen der in dem Ausflussgefässe sich bewegenden Wassermasse und die demselben entsprechenden Geschwindigkeits-Aenderungen überall stetig und allmählich erfolgen; sie hört dagegen auf erfüllt zu sein, sobald an irgend einer Stelle des Gefässes oder des Ausflussrohres die ausfliessende Wassermasse sprungweise aus einem kleineren in einen grösseren Querschnitt übergeht. Denn in diesem Falle stossen die in dem engeren Rohre rascher fliessenden Wassertheilchen gegen die in dem weiteren Rohre langsamer sich bewegende Wassermasse, vereinigen sich mit derselben, und nach dem Anschlusse setzt das Ganze mit der kleineren Geschwindigkeit seine Bewegung gemeinschaftlich weiter fort. Hierbei findet insofern ein Verlust an lebendiger Kraft statt, als ein Theil der vorher in dem rascher fliessenden Wasser vorhanden gewesenen lebendigen Kraft bei jenem Stosse andere Formen annimmt — solche Formen nämlich, in welchen derselbe als lebendige Kraft der Wirbel-Bewegungen, Schall- und Wärme-Schwingungen sich darstellend in Bezug auf die fortschreitende Bewegung des Wassers längs des Ausflussrohres als verloren zu betrachten ist. Es erfolgt also bei dem plötzlichen Uebergange aus dem kleineren in den grösseren Querschnitt ein ganz ähnlicher Vorgang, wie wenn ein sogenannter „unelastischer Stoss“ stattfände, und erklärt es sich hieraus: dass zur Bestimmung jenes

Verlustes an lebendiger Kraft — obwohl das Wasser im gewöhnlichen Sinne des Wortes als ein höchst elastischer Körper betrachtet werden muss — doch die für den „vollkommen unelastischen Stoss" gefundenen Gleichungen angewendet werden dürfen.

Nach Gleichung 812) findet bei dem unelastischen Stosse einer mit der Geschwindigkeit V sich bewegenden Masse M gegen eine mit der Geschwindigkeit v sich bewegende Masse m ein Verlust an lebendiger Kraft statt von der Grösse:

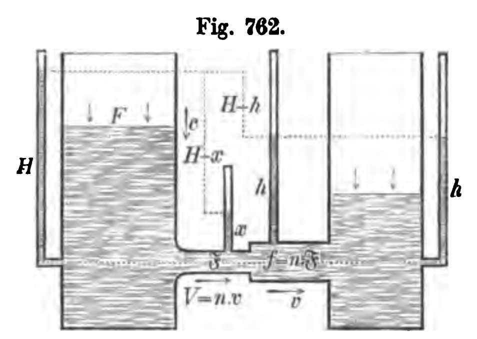
$$\mathfrak{B} = \frac{Mm}{M+m} \frac{(V-v)^2}{2} = \left\{\frac{M}{1+\frac{M}{m}}\right\} \frac{(V-v)^2}{2}.$$

Die in dem engeren Rohre rascher fliessenden Wassertheilchen schliessen in stetiger Aufeinanderfolge an die in dem weiteren Rohre bereits langsamer fliessende Masse sich an; für jeden einzelnen dieser unendlich vielen aufeinanderfolgenden Stösse darf daher das Verhältniss der stossenden zur gestossenen Masse als verschwindend klein gleich Null gesetzt werden. Wenn also mit M die in dem unendlich kleinen Zeittheilchen τ zum Stosse gelangende Masse bezeichnet wird, so ergiebt sich für den während dieses Zeittheilchens entstehenden Verlust an lebendiger Kraft der Werth:

$$1097) \quad \mathfrak{B} = \frac{M(V-v)^2}{2}.$$

Die während des Zeittheilchens τ zum Ausflusse gelangende Wassermasse hat ebenfalls die Grösse M, folglich ist nach der in Fig. 762 gewählten Bezeichnungsweise die von der Schwerkraft während des gleichen Zeitraumes verrichtete mechanische Arbeit gleich $Mg\,(H-h)$. Durch diese mechanische Arbeit wird nicht allein die wirklich erfolgende Zunahme an lebendiger Kraft $\frac{Mv^2}{2} - \frac{Mc^2}{2}$ hervorgebracht, welche der Differenz zwischen Zufluss- und Ausfluss-Geschwindigkeit entspricht, sondern auch diejenige lebendige Kraft $\mathfrak{B}$, welche bei dem Stosse für die Ausflussbewegung verloren geht. Statt

Fig. 762.



Gleichung 1069) ergiebt sich also nach dem Principe der lebendigen Kraft für den vorliegenden Fall die Gleichung:

$$Mg\,(H-h) = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mc^2}{2} + \frac{M\,(V-v)^2}{2},$$

welche zur Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit v benutzt werden kann, und welche in der Form:

$$1098)\quad H-h = \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right) - \frac{(V-v)^2}{2g}$$

zeigt: dass die ganze wirksame Druckhöhe $H-h$ gleichsam in zwei Theile sich zerlegt, von denen der eine Theil $\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right)$ darauf verwendet wird, die Geschwindigkeit der Wassertheilchen von c bis auf v zu vergrössern, und der andere Theil $\frac{(V-v)^2}{2g}$ den beim plötzlichen Uebergange aus dem engeren in den weiteren Querschnitt entstehenden Druckhöhen-Verlust bildet.

Wenn man ein anderes Mal den engeren Querschnitt $\mathfrak{F}$ selbst als Ausflussmündung betrachtet, so hat man die Druckhöhen-Differenz $H-x$ als wirksame Druckhöhe in Rechnung zu bringen, und erhält nach dem Principe der lebendigen Kraft eine zweite Gleichung:

$$1099)\quad H-x = \frac{V^2}{2g} - \frac{c^2}{2g},$$

welche in Verbindung mit der vorigen zur Berechnung der hydraulischen Druckhöhe x in dem engeren Theile des Ausflussrohres benutzt werden kann. Die gefundenen beiden Gleichungen nehmen nach Substitution der Werthe $V = nv$ und $c = \frac{f}{F}v$ die Form an:

$$1100)\quad H-h = \frac{v^2}{2g}\left[1 - \frac{f^2}{F^2} + (n-1)^2\right].$$

$$1101)\quad H-x = \frac{v^2}{2g}\left(n^2 - \frac{f^2}{F^2}\right).$$

Durch Auflösung derselben für die beiden unbekannten Grössen v und x erhält man die Werthe:

$$1102)\quad v = \sqrt{\frac{2g\,(H-h)}{1 - \frac{f^2}{F^2} + (n-1)^2}}.$$

$$1103)\quad x = h - \frac{2\,(n-1)\,(H-h)}{1 - \frac{f^2}{F^2} + (n-1)^2}.$$

Die Grenze, bis zu welcher diese beiden Gleichungen noch gültig bleiben, wird — wie im vorigen Paragraphen schon erklärt wurde — durch denjenigen Fall gebildet, in welchem für die in dem engeren Theile des Rohres vorhandene hydraulische Druckhöhe x aus der letzteren Gleichung der Werth Null sich ergiebt.

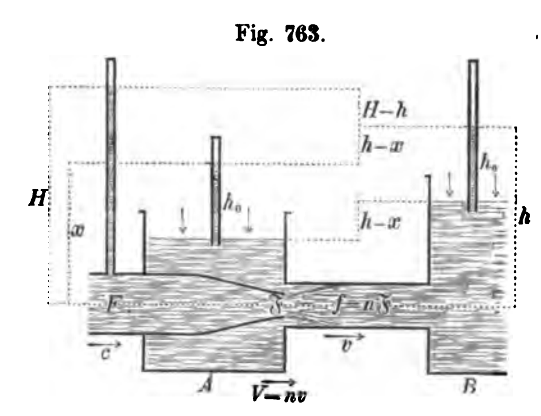
Wenn z. B. $n = 2$ ist, und die Fläche F so gross ist, dass das Verhältniss $\frac{f}{F}$ gleich Null gesetzt werden darf, so ergiebt sich aus Gleichung 1103) der Werth $x = 2h - H$. In diesem Falle würden also die obigen beiden Gleichungen ihre Gültigkeit verlieren, sobald H grösser als $2h$ ist.

Für die Differenz der beiden resp. in dem weiteren und in dem engeren Theile des Ausflussrohres vorhandenen Druckhöhen ergiebt sich aus Gleichung 1103) der Werth:

$$1104)\quad h - x = \frac{2(n-1)(H-h)}{1 - \frac{f^2}{F^2} + (n-1)^2}.$$

Da $h - x$ gleich $(h - h_0) - (x - h_0)$ ist, so würde nach dieser Gleichung die Höhen-Differenz zwischen den Oberflächen der beiden verticalen Wassersäulen, welche jene beiden Druckhöhen veranschaulichen, auch dann zu bestimmen sein, wenn jede von diesen beiden Oberflächen unter Einwirkung des atmosphärischen Druckes sich befindet. Denkt man sich in diesem Falle das verticale Rohr, dessen Wasserstandshöhe den hydraulischen Druck in dem engeren Theile des Ausflussrohres veranschaulicht, ersetzt durch ein beliebig weites Gefäss, dessen Wände die Uebergangsstelle vollständig umgeben, so findet man, dass die obige Gleichung auch für den in Fig. 763 dargestellten Fall noch gültig bleibt und unmittelbar zur Bestimmung der entstehenden Höhen-Differenz zwischen den beiden unter Einwirkung des atmosphärischen Druckes befindlichen Wasserspiegeln in den Gefässen A und B benutzt werden kann.

Fig. 763.



Setzt man wiederum $n = 2$ und $\frac{f}{F} = 0$, so ergiebt sich für die dem Beharrungszustande entsprechende Höhen-Differenz der beiden Wasserspiegel die Grösse $h - x = H - h$. Hätte der Wasserspiegel in dem Gefässe A anfangs eine etwas höhere Lage gehabt, als diejenige, welche dem Beharrungszustande entspricht, so würde das Wasser aus dem Gefässe A nach dem Gefässe B so lange hinüberströmen, bis jene Höhen-Differenz $h - x$ sich eingestellt hat — oder falls letzteres dadurch verhindert würde, dass in dem Gefässe A ein Zufluss stattfindet, welcher jene anfangs vorhanden gewesene höhere Lage des Wasserspiegels constant erhält, so würde dieses Hinüberströmen des Wassers aus dem Gefässe A nach dem Gefässe B continuirlich sich fortsetzen, und der Apparat als „Wasserstrahlpumpe" wirken. Die obige Gleichung giebt daher für die Niveau-Differenz bei einer solchen Wasserstrahlpumpe die obere Grenze an, bei welcher dieselbe aufhört Wasser zu fördern.

§ 197.

Reaction und Stosswirkung des ausfliessenden Wasserstrahles.

Nach § 174 ist die Mittelkraft sämmtlicher von den Wänden eines Gefässes auf das in demselben enthaltene Wasser übertragenen Gegendrücke stets vertical aufwärts gerichtet und von gleicher Grösse mit dem Gewichte der ganzen Wassermasse. Diese Mittelkraft ist zugleich die Mittelkraft von den verticalen Seitenkräften jener Gegendrücke, insofern die horizontalen Seitenkräfte für sich allein einander im Gleichgewichte halten. Wenn jedoch durch das Anbringen einer Oeffnung in der verticalen Seitenwand des Gefässes bewirkt wird, dass der von dem weggenommenen Theile der Gefässwand an dieser Stelle vorher geleistete horizontale Gegendruck wegfällt, so wird der in entgegengesetzter Richtung wirkende horizontale Gegendruck des correspondirenden Theiles der gegenüberliegenden Gefässwand nun nicht mehr aufgehoben. Die Mittelkraft sämmtlicher horizontalen Gegendrücke wird daher nicht mehr gleich Null sein, sondern — im ersten Augenblicke wenigstens — in jenem nicht mehr aufgehobenen Horizontal-Drucke bestehen, und würde diese Grösse auch fernerhin beibehalten, wenn nicht in Folge der eingetretenen Störung des Gleichgewichtes inzwischen eine Bewegung der ganzen Wassermasse entstanden wäre, wodurch diese horizontale Mittelkraft H noch eine fernere Steigerung erhält.

Sobald der ausfliessende Wasserstrahl die dem Beharrungszustande entsprechende Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ erlangt hat (Fig. 764), fliesst durch die (im Verhältniss zur Wasserspiegelfläche

klein vorausgesetzte) Auflussöffnung f in jeder Secunde eine gleich grosse Wassermenge vom Inhalte fv, vom Gewichte $\gamma f v$ und von der Masse:

$$1105)\quad m = \frac{\gamma}{g} f v = \frac{\gamma}{g} f \sqrt{2gh}.$$

Wenn in irgend einem Augenblicke die ganze in dem Gefässe noch enthaltene Wassermasse die Grösse M hat, so fällt der Schwerpunkt der Masse M in diesem Zeitpunkte zusammen mit dem Schwerpunkte des von derselben ausgefüllten Raumes oder des noch mit Wasser gefüllten Theiles des Gefässinhaltes, und dieser Schwerpunkt hat in jenem Zeitpunkte die Horizontal-Geschwindigkeit Null. Nach Verlauf der nächsten Secunde wird der Theil m dieser Masse die Horizontal-Geschwindigkeit v angenommen haben, und nach § 120 (Gleichung 541) ist die Horizontal-Geschwindigkeit V, welche gleichzeitig der Schwerpunkt der ganzen Masse M annimmt, zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 764.

$$1106)\quad MV = mv, \quad \text{oder:} \quad V = \frac{m}{M} v.$$

Diese in einer Secunde hervorgebrachte Geschwindigkeit V bildet zugleich die horizontale Beschleunigung des Schwerpunktes der ganzen Masse M, und muss nach dem Gesetze des Schwerpunktes (Gleichung 543) dem Quotienten gleich sein, welchen man erhält, indem man die horizontale Mittelkraft H dividirt durch die ganze Masse M, also ist:

$$1107)\quad \frac{m}{M} v = \frac{H}{M}, \quad \text{oder:} \quad H = mv = \frac{\gamma}{g} f v^2 = 2\gamma f h.$$

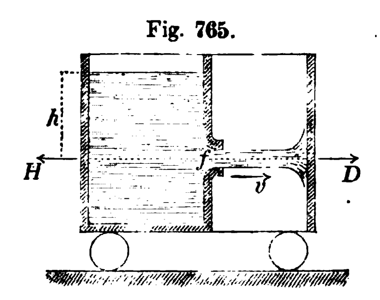
Die Kraft H, in entgegengesetzter Richtung genommen, bildet den vom ausfliessenden Wasserstrahle auf das Gefäss übertragenen „Reactions-Druck". Die obige Gleichung zeigt also, dass dieser Reactions-Druck doppelt so gross ist, als vorher der vom Wasser auf den die Ausflussöffnung verschliessenden Theil der Gefässwand ausgeübte Druck war.

Wenn die Richtung des ausfliessenden Wasserstrahles von der Horizontalen abweicht, so findet man auf ähnliche Weise, indem man wiederum das Gesetz des Schwerpunktes anwendet auf die der Richtung des Wasserstrahles parallele Seitengeschwindigkeit des Schwerpunktes der ganzen Wassermasse, dass der Reactions-Druck in diesem Falle ebenso gross ist, wie bei horizontaler

Richtung der Ausflussgeschwindigkeit, und dass die Richtung des Reactions-Druckes stets der Richtung des ausfliessenden Wasserstrahles entgegengesetzt ist. Da ferner die relativen Bewegungen der einzelnen Wassertheilchen in Bezug auf einen gleichförmig fortschreitenden Raum genau in derselben Weise erfolgen, wie wenn dieser Raum im Ruhezustande sich befände, so bleibt der oben gefundene Satz auch dann noch gültig, wenn das Ausflussgefäss in beliebiger Richtung eine gleichförmig fortschreitende Bewegung ausführt.

Denkt man sich den in horizontaler Richtung ausfliessenden Wasserstrahl aufgefangen durch eine rechtwinkelig zur Achse desselben stehende ebene verticale Wand, welche mit den Wänden des Ausflussgefässes zusammenhängend einen Theil des letzteren bildet (Fig. 765), so ergiebt sich — wiederum aus dem Gesetze des Schwerpunktes — dass der vom Wasserstrahle auf diese Wand übertragene Stossdruck D dem Reactions-Drucke H gleich und entgegengesetzt sein muss, also zu bestimmen ist aus der Gleichung:

Fig. 765.



$$1108)\quad D = 2\gamma f h = \frac{\gamma}{g} f v^2.$$

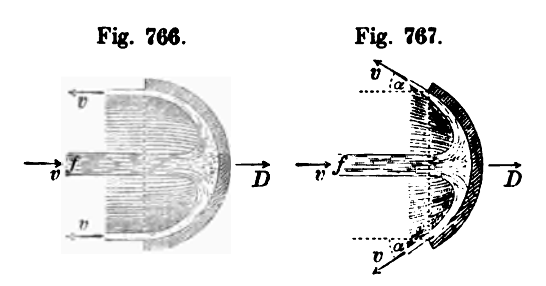
Denn wenn eine von diesen beiden Kräften grösser wäre als die andere, so würde der Schwerpunkt des (in horizontaler Richtung frei beweglich vorausgesetzten) Gefässes in der Richtung der grösseren eine beschleunigte Bewegung ausführen müssen. Eine solche Beschleunigung kann aber deshalb nicht stattfinden, weil erstens: der Schwerpunkt des ganzen Systems — bestehend aus Gefäss und Wasser zusammengenommen — die Horizontal-Beschleunigung Null hat, insofern in Bezug auf dieses System keine äusseren Horizontal-Kräfte vorhanden sind, und weil zweitens: die Horizontal-Beschleunigung des Schwerpunktes der Wassermasse ebenfalls gleich Null ist, insofern bei dem vorausgesetzten Beharrungszustande stets gleiche Wassermassen die Horizontal-Geschwindigkeit v in der Richtung der Strahl-Achse annehmen und verlieren.

Die oben gefundene Gleichung gilt nicht nur für den Normal-Stoss gegen eine ebene Fläche, sondern überhaupt für alle solche Formen und Lagen der Stossflächen, bei denen der Winkel, um welchen die einzelnen Wassertheilchen durch den Stoss von ihren ursprünglichen Bewegungsrichtungen abgelenkt werden, ein rechter Winkel ist. Der Stossdruck nimmt dagegen einen grösseren

oder kleineren Werth an, sobald dieser Ablenkungswinkel grösser oder kleiner ist als ein rechter Winkel.

Wenn z. B. der Ablenkungswinkel 180° beträgt, wie bei dem in Fig. 766 dargestellten Falle, so kann man sich den ganzen Druck D als aus zwei Theilen zusammengesetzt vorstellen: der eine Theil ist wie beim Normal-Stosse gegen eine ebene Wand zu bestimmen und hat die Grösse $2\gamma fh$; den anderen Theil kann man als Reactions-Druck betrachten, und zwar als denjenigen Reactions-Druck, welcher dem von der Stossfläche zurückfliessenden Strahle entspricht. Dieser letztere Theil hat nach Gleichung 1107) ebenfalls die Grösse $2\gamma fh$, da sowohl die Geschwindigkeit als der Querschnitt bei dem zurückfliessenden Strahle dieselbe Grösse hat wie beim zufliessenden Strahle. Der ganze Stossdruck hat also in diesem Falle die Grösse:

Fig. 766. Fig. 767.



$$1109)\quad D = 4\gamma fh = 2\frac{\gamma}{g}fv^2.$$

Wenn statt dessen der Ablenkungswinkel die Grösse $180° - \alpha$ hat — wie bei dem in Fig. 767 dargestellten Falle — so wird jener zweite Theil gebildet durch die Summe aller dem stossenden Strahle parallelen Seitenkräfte der Reactions-Drücke, welche von den einzelnen abfliessenden Wasserstrahlen auf den gestossenen Körper übertragen werden, oder durch die Summe der Producte aus diesen Reactions-Drücken in den gemeinschaftlichen Factor $\cos\alpha$. Der zweite Theil erhält also in diesem Falle die Grösse $\frac{\gamma}{g}fv^2 . \cos\alpha$, und für den ganzen Druck in der Richtung des stossenden Wasserstrahles ergiebt sich die Gleichung:

$$1110)\quad D = 2\gamma fh\,(1 + \cos\alpha) = \frac{\gamma}{g}fv^2\,(1 + \cos\alpha),$$

in welcher die beiden vorigen als specielle Fälle enthalten sind.

DREIUNDDREISSIGSTES CAPITEL.

Erfahrungs-Resultate über Bewegungen der Flüssigkeiten.

§ 198.

Geschwindigkeits-Coefficienten, Contractions-Coefficienten, Ausfluss-Coefficienten.

Da die Voraussetzungen, aus welchen im vorigen Capitel die allgemeinen Gleichungen der Ausflussbewegung auf theoretischem Wege abgeleitet wurden, der Wirklichkeit nur annäherungsweise entsprechen, so bedürfen alle jene Gleichungen noch der Correction mittelst gewisser Erfahrungs-Coefficienten, um Werthe zu liefern, welche mit den Erfahrungs-Resultaten übereinstimmen.

Nach § 192 ist die der Druckhöhen-Differenz h entsprechende theoretische Ausflussgeschwindigkeit gleich $\sqrt{2gh}$ zu setzen, wenn die Ausflussmündung f klein ist im Verhältniss zur Querschnittsfläche F des Ausflussgefässes. Die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit ist unter allen Umständen kleiner als die theoretische Ausflussgeschwindigkeit. Um die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit zu erhalten, hat man daher jene theoretische Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ noch zu multipliciren mit einem gewissen Coefficienten φ, welcher immer kleiner ist als Eins. Dieser Erfahrungs-Coefficient φ wird der „Geschwindigkeits-Coefficient" genannt. Die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit ist demnach:

$$1111) \quad v = \varphi \sqrt{2gh}.$$

Bei der theoretischen Bestimmung der Ausflussmenge wurde im vorigen Capitel als Querschnittsfläche des ausfliessenden Wasserstrahles durchgehends die Mündungsfläche f selbst betrachtet. Auch diese Annahme bedarf in der Regel noch der Correction mittelst eines gewissen Erfahrungs-Coefficienten, insofern der ausfliessende Strahl meistens in einer gewissen Entfernung ausserhalb der Mündung auf einen kleineren Querschnitt sich verengt. Wegen dieser sogenannten „Contraction" des ausfliessenden Strahles ist als Querschnittsfläche desselben eine Grösse in Rechnung zu bringen, welche man erhält, indem man die Mündungsfläche f multiplicirt mit einem gewissen Coefficienten α, welcher kleiner ist als Eins. Dieser Erfahrungs-Coefficient α wird der „Contractions-Coefficient" genannt. Wenn die wirksame Druckhöhe an

allen Stellen der Ausmündung dieselbe Grösse hat — wie z. B. beim Ausflusse aus einer Oeffnung in der horizontalen Bodenwand — so erhält man demnach die wirkliche Ausflussmenge, indem man die Grösse $\alpha . f$, als Querschnittsfläche des ausfliessenden Strahles, multiplicirt mit der Grösse $\varphi . \sqrt{2gh}$, als der wirklichen Ausflussgeschwindigkeit, d. h. aus der Gleichung:

$$1112) \quad M = (\alpha . f)(\varphi . \sqrt{2gh}) = (\alpha . \varphi)(f . \sqrt{2gh}).$$

In dieser Gleichung bedeutet $f\sqrt{2gh}$ die theoretische Ausflussmenge, und das Product:

$$1113) \quad \alpha . \varphi = \mu$$

als diejenige Zahl, mit welcher man die theoretische Ausflussmenge zu multipliciren hat; um die wirkliche Ausflussmenge zu erhalten, wird der „Ausfluss-Coefficient" genannt. Wenn dieser Ausfluss-Coefficient μ aus directen Versuchen bekannt ist, so kann daher die wirkliche Ausflussmenge auch berechnet werden aus der Gleichung:

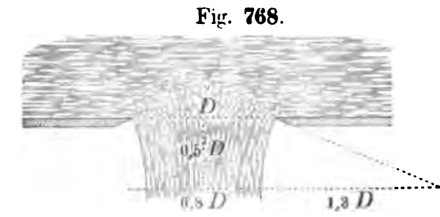
$$1114) \quad M = \mu . f\sqrt{2gh}.$$

Eine sogenannte „vollkommene Contraction" findet statt beim Ausflusse aus einer Oeffnung in ebener „dünner Wand" (oder einer Oeffnung in ebener dicker Wand mit von aussen her zugeschärften Rändern), wenn zugleich die Weite der Oeffnung gering ist im Verhältniss zum Abstande derselben von der nächstliegenden Gefässkante und zur Druckhöhe. Bei vollkommener Contraction des Wasserstrahles ist im Mittel der Contractions-Coefficient $\alpha = 0,64$ zu setzen und der Geschwindigkeits-Coefficient $\varphi = 0,97$, folglich der Ausfluss-Coefficient:

$$1115) \quad \mu = 0,64 . 0,97 = 0,62.$$

Bei kreisförmiger Oeffnung vom Durchmesser D hat der kleinste Querschnitt des contrahirten Strahles ungefähr den Abstand $0,5 D$ von der Mündung und den Durchmesser $0,8 D$ (Fig. 768). Wenn die Ausflussöffnung in diesem Falle noch mit einem kurzen Ansatzrohre von der Länge $0,5 D$ versehen wird, dessen Längenprofil ungefähr die Form des contrahirten Wasserstrahles hat, so wird dadurch die Ausflussbewegung nicht wesentlich verändert. Für gut abge-

Fig. 768.



rundete Ausflussmündungen von der in Fig. 769 dargestellten Form kann daher $\alpha = 1$ und $\varphi = 0{,}97$ gesetzt werden.

Die aus rechteckiger Ausflussöffnung in verticaler dünner Wand (Fig. 749 und Fig. 750) pro Secunde ausfliessende Wassermenge kann man bestimmen, indem man die der Druckhöhe $h_0 = \frac{H + h}{2}$ des Schwerpunktes derselben entsprechende theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit $\sqrt{2 g h_0}$ — als eine von der mittleren Geschwindigkeit der ausfliessenden Wassertheilchen nur wenig abweichende Grösse — mit der Mündungsfläche multiplicirt, und den auf solche Weise gefundenen Werth mittelst eines Erfahrungs-Coefficienten μ_0 corrigirt, welcher aus direct zu diesem Zwecke anzustellenden Versuchen zu ermitteln ist. Man erhält also für diesen Fall die Gleichung:

Fig. 769.

$$1116) \quad M = \mu_0 \,.\, b\,(H - h) \,.\, \sqrt{2 g h_0},$$

in welcher (als Mittelwerth) der Erfahrungs-Coefficient $\mu_0 = 0{,}62$ gesetzt werden kann. (Die Grenzwerthe, zwischen welchen derselbe variirt, sind 0,572 und 0,705.)

Bei einem in verticaler dünner Wand angebrachten rechteckigen Einschnitte, welcher bis zum Wasserspiegel hinaufreicht, würde nach § 193 die Ausflussmenge zu bestimmen sein aus der Gleichung:

$$1117) \quad M = \frac{2}{3}\,\mu \,.\, (b H) \,.\, \sqrt{2 g H}$$

oder, wenn darin der numerische Coefficient $\frac{2}{3}\,\mu = \mu_1$ gesetzt wird, aus der Gleichung:

$$1118) \quad M = \mu_1 \,.\, (b H) \,.\, \sqrt{2 g H},$$

in welcher (als Mittelwerth) der Erfahrungs-Coefficient $\mu_1 = 0{,}4$ gesetzt werden kann. (Die Grenzwerthe, zwischen welchen derselbe variirt, sind 0,385 und 0,433.)

Setzt man z. B. $b = 4^m$ und $H = 0^m{,}144$, so erhält man die Ausflussmenge:

$$M = 0{,}4 \,.\, (4 \,.\, 0{,}144) \sqrt{2 \,.\, 9{,}8 \,.\, 0{,}144} = 0{,}387 \text{ Cubikmeter pro Secunde.}$$

Wenn in einem Canale oder Flusse das Wasser mittelst einer durch das Querprofil desselben hindurchgelegten, oben mit einem rechteckigen Einschnitte von der Breite $b = 4^m$ versehene Querwand aufgestauet wird, so dauert das

Steigen des Wasserspiegels oberhalb dieser Staustelle so lange fort, bis durch jenen Wandeinschnitt ebenso viel Wasser abfliesst, als vorher in dem ungestaueten Flusse in jeder Secunde an dieser Stelle vorbeifloss. Wenn also die vorher von dem Flusse pro Secunde fortgeführte Wassermenge 0,387 Cubikmeter betragen hätte, so würde der Wasserspiegel bis zur Höhe $H = 0^m,144$ über der Ueberfallskante steigen, und umgekehrt: wenn diese Höhe $H = 0^m,144$ aus directer Beobachtung sich ergeben hätte, so würde hieraus folgen, dass die von dem Flusse in jeder Secunde fortgeführte Wassermenge 0,387 Cubikmeter betrug.

Die Contraction des ausfliessenden Wasserstrahles ist eine unvollkommene oder partielle, wenn die Ausflussöffnung längs eines Theiles ihres Umfanges von Wänden umgeben oder eingefasst ist, durch welche längs dieses Theiles des Umfanges die Contraction verhindert wird. Wenn mit U der ganze Umfang und mit $n \,.\, U$ der eingefasste Theil desselben bezeichnet wird, so ist der Ausfluss-Coefficient für diesen Fall zu bestimmen aus der Erfahrungsformel:

$$1119) \quad \mu_n = (1 + 0{,}15 \,.\, n)\,\mu,$$

in welcher μ den Ausflusscoefficienten für vollkommene Contraction bezeichnet.

Wenn z. B. in der horizontalen Bodenwand eines parallelepipedischen Gefässes eine rechteckige Ausflussöffnung in einer der vier Ecken des Gefässes sich befindet, so ist die Hälfte ihres Umfanges von den zwei verticalen Seitenwänden als eingefasst zu betrachten, also $n = \frac{1}{2}$ und $\mu_n = (1 + 0{,}075)\,\mu$ zu setzen, und wenn hierin für μ der in Gleichung 1115) angegebene Mittelwerth substituirt wird, so ergiebt sich für den Ausfluss-Coefficienten der Werth $\mu_n = 0{,}6665$.

Eine unvollkommene Contraction findet auch dann statt, wenn die Querschnittsfläche des Ausflussgefässes in unmittelbarer Nähe der Mündung die Fläche der letzteren verhältnissmässig nur wenig an Grösse übertrifft. Wenn mit F die in unmittelbarer Nähe der Mündung gemessene Querschnittsfläche des Ausflussgefässes und mit $n \,.\, F$ die Ausflussöffnung bezeichnet wird, so ist (nach Weisbach) für rechteckige Mündungen der Ausfluss-Coefficient zu bestimmen nach der Erfahrungsformel:

$$1120) \quad \mu_n = [1 + 0{,}076\,(9^n - 1)]\,\mu,$$

und für kreisförmige Ausflussöffnungen nach der Formel:

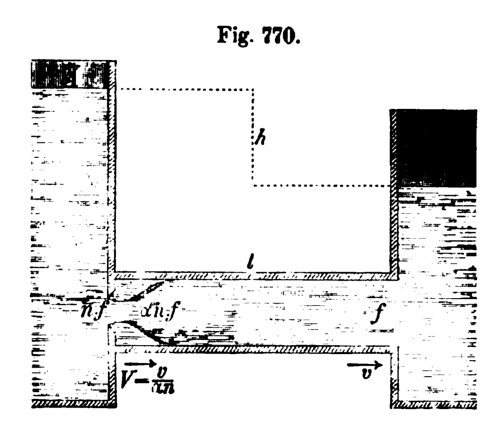
$$1121) \quad \mu_n = [1 + 0{,}04564\,(14{,}821^n - 1)]\,\mu.$$

§ 199.

Ausfluss des Wassers durch Röhrenleitungen.

Nach § 196 hat der Druckhöhen-Verlust, welcher beim plötzlichen Uebergange aus der dem engeren Querschnitte $n \,.\, f$ entsprechenden grösseren Geschwindigkeit V in die dem weiteren Querschnitte f entsprechende kleinere Geschwindigkeit v entsteht, die Grösse $\frac{(V - v)^2}{2g}$, und das Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten V und v ist gleich dem umgekehrten Verhältniss der betreffenden Querschnitte zu setzen. Wenn der verengte Querschnitt an der Eintrittsstelle sich befindet und durch eine Oeffnung in „dünner Wand" gebildet wird, so ist wegen der dabei stattfindenden Contraction des durchfliessenden Wasserstrahles statt der wirklichen Durchflussöffnung $n \,.\, f$ die Querschnittsfläche $\alpha \,.\, n \,.\, f$ des contrahirten Wasserstrahles in Rechnung zu bringen (Fig. 770). Für den Druckhöhen-Verlust ergiebt sich also in diesem Falle der Werth:

Fig. 770.



$$1122) \quad \mathfrak{z}_0 = \frac{(V - v)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha n} - 1\right)^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Druckhöhen-Verlust $\mathfrak{z}_0$ proportional ist der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$, welche der Ausflussgeschwindigkeit v entspricht, und dass man, um denselben zu bestimmen, jene Geschwindigkeitshöhe zu multipliciren hat mit einem Coefficienten:

$$1123) \quad \left(\frac{1}{\alpha n} - 1\right)^2 = \zeta_0,$$

welcher der „Widerstands-Coefficient" genannt wird, und entweder aus der obigen Gleichung nach Substitution der Werthe von α und n berechnet, oder auch durch directe Versuche bestimmt werden kann. Für $n = 1$ kann als Mittelwerth $\zeta_0 = 0{,}5$ gesetzt werden.

Bei grösserer Länge des Ausflussrohres ist ausserdem noch ein anderer Druckhöhen-Verlust in Abrechnung zu bringen, nämlich derjenige, welcher durch die Reibung des Wassers an den Wänden der Röhre verursacht wird. Dieser von der Reibung herrührende Druckhöhen-Verlust $\mathfrak{z}$ ist annäherungsweise ebenfalls proportional jener Geschwindigkeitshöhe zu setzen, hängt aber ausserdem ab von der Länge l, sowie von dem Durchmesser d des (cylindrisch vorausgesetzten) Ausflussrohres und ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1124) \quad \mathfrak{z} = \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

in welcher als Mittelwerth für den Reibungs-Widerstands-Coefficienten ζ der Werth 0,02 gesetzt werden kann. Der genauere Werth desselben ist (nach Weisbach) zu berechnen aus der Erfahrungsformel:

$$1125) \quad \zeta = 0{,}014\,39 + \frac{0{,}009\,471\,1}{\sqrt{v}},$$

welcher zeigt, dass jener Mittelwerth $\zeta = 0{,}02$ einer Geschwindigkeit von etwa 3 Metern pro Secunde entspricht.

Um die wirkliche Geschwindigkeit v zu berechnen, mit welcher das Wasser aus dem Gefässe A nach dem Gefässe B durch die Röhrenleitung abfliesst, hat man sich die ganze wirksame Druckhöhe h in drei Theile zerlegt zu denken, von denen der erste Theil $\frac{v^2}{2g}$ auf Erzeugung der Geschwindigkeit v, der zweite Theil $\mathfrak{z}_0$ auf Ueberwindung des Widerstandes an der Eintrittsstelle, und der dritte Theil $\mathfrak{z}$ auf Ueberwindung der Reibungswiderstände verwendet wird. Man erhält also die Gleichung:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta_0 \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right), \quad \text{oder:}$$

$$1126) \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}}}.$$

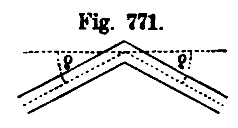
Wenn z. B. $h = 1^m$, $l = 100^m$, $d = 0^m{,}2$ und der Widerstands-Coefficient für den Eintritt des Wassers in die Röhrenleitung $\zeta_0 = 0{,}5$ gesetzt wird (entsprechend dem Falle, in welchem an der Eintrittsstelle eine Querschnittsverengung nicht vorhanden ist), so erhält man nach Substitution des Mittelwerthes $\zeta = 0{,}02$ aus obiger Gleichung zunächst den Annäherungswerth $v = 1^m{,}3$. Diesem Werthe von v würde nach Gleichung 1125) der Widerstands-Coefficient $\zeta = 0{,}0227$ entsprechen, und nach Substitution desselben in Gleichung 1126) erhält man nunmehr durch eine zweite Rechnung den genaueren Werth:

$v = 1^m,236$. Eine nochmalige Wiederholung dieser Correction führt endlich zu dem noch genaueren Werthe $v = 1^m,231$. Für die pro Secunde abfliessende Wassermenge ergiebt sich hiernach der Werth:

$$M = \frac{1}{4} d^2 \pi v = \frac{1}{4} \cdot 0,2^2 \,.\, 3,14 \,.\, 1,231 = 0,038\,67 \text{ Cubikmeter.}$$

Wenn an irgend einer Stelle die Röhrenleitung einen Winkel bildet, so ist ausser den vorigen Widerständen noch derjenige Druckhöhen-Verlust in Rechnung zu bringen, welcher entsteht an der Stelle, wo die Wassertheilchen aus einer Richtung plötzlich in eine andere Richtung überzugehen gezwungen sind. Der für diesen Verlust in Rechnung zu bringende Widerstands-Coefficient ζ_1 hängt ab von der Grösse des Ablenkungswinkels 2δ (Fig. 771) und ist (nach **Weisbach**) zu berechnen aus der Erfahrungsformel:

Fig. 771.



$$1127)\quad \zeta_1 = 0,9457 \sin \delta^2 + 2,047 \sin \delta^4.$$

Für die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung ergiebt sich demnach in diesem Falle die Gleichung:

$$1128)\quad h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right), \quad \text{oder:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}}}.$$

Wenn z. B. der ganze Ablenkungswinkel $2\delta = 90^0$ ist, so ergiebt sich für den betreffenden Widerstands-Coefficienten der Werth: $\zeta_1 = 0,9846$, und für die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung erhält man alsdann bei den im vorigen Falle angenommenen Zahlenwerthen — mit Berücksichtigung des in Bezug auf den Coefficienten ζ erforderlichen Correctionsverfahrens — den Werth $v = 1^m,183$. Die pro Secunde abfliessende Wassermenge hat also in diesem Falle die Grösse:

$$M = \frac{1}{4} \cdot 0,2^2 \,.\, 3,14 \,.\, 1,183 = 0,037\,165 \text{ Cubikmeter.}$$

Die obigen Gleichungen setzen voraus, dass die Ausflussöffnung, durch welche das Wasser am Ende der Röhrenleitung aus derselben hinausfliesst, mit dem Querschnitte der Röhrenleitung selbst gleichen Flächeninhalt hat. Wäre dagegen der Röhrenquerschnitt n-mal so gross als die Ausflussöffnung, so würde — falls die letztere so geformt ist, dass der Ausfluss ohne Contraction erfolgt — für die Geschwindigkeit des Wassers längs der Röhrenleitung der Werth $\frac{v}{n}$ zu substituiren sein, und für die Ausflussgeschwindigkeit v ergiebt sich in diesem Falle die Gleichung:

$$1129)\quad h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \frac{\zeta_0}{n^2} + \frac{\zeta_1}{n^2} + \frac{\zeta}{n^2}\frac{l}{d}\right), \text{ oder:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\zeta_0}{n^2} + \frac{\zeta_1}{n^2} + \frac{\zeta}{n^2}\frac{l}{d}}}.$$

Wenn z. B. die Fläche der Ausflussöffnung halb so gross wäre als die Querschnittsfläche der sonst überall gleich weiten Röhrenleitung, so würde in dieser Gleichung $n = 2$ zu setzen sein. Mit Beibehaltung der in dem vorigen Beispiele gewählten Zahlenwerthe erhielte man in diesem Falle für die Ausflussgeschwindigkeit den Werth $v = 2^m,13$, und für die pro Secunde ausfliessende Wassermenge den Werth: $M = \frac{1}{8} d^2 \pi v = 0,033\,458$ Cubikmeter.

§ 200.

Ausfluss der Luft.

Die in § 192 für die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers gefundene allgemeine Gleichung 1064)

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{P}{\gamma} - \frac{p}{\gamma}\right)} = \sqrt{2g\frac{P}{\gamma}\left(1 - \frac{p}{P}\right)}$$

kann auch zur Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit der Luft benutzt werden, sobald die Differenz zwischen dem Drucke P im Inneren des Ausflussgefässes und dem Drucke p ausserhalb desselben so klein ist, dass die beim Ausflusse erfolgende Aenderung der Dichtigkeit (und der Temperatur) unberücksichtigt bleiben darf. Der Quotient $\frac{P}{\gamma}$ hängt ab von der im Inneren des Gefässes vorhandenen Temperatur t und hat nach Gleichung 989) die Grösse:

$$\frac{P}{\gamma} = C(273 + t) = 29,27\,(273 + t).$$

Nach Substitution dieses Werthes erhält man für die Ausflussgeschwindigkeit die Gleichung:

$$1130)\quad v = \sqrt{2g\,.\,29,27\,(273 + t)\left(1 - \frac{p}{P}\right)}.$$

Setzt man hierin z. B. $t = +20^\circ$ (Celsius) und $\frac{p}{P} = \frac{0,760}{0,800}$ — entsprechend dem Ausflusse ins Freie beim Barometerstande $0^m,760$ aus einem Gefässe, in welchem der Quecksilber-Manometerstand $0^m,800$ beträgt — so erhält man für die Ausflussgeschwindigkeit den Werth $v = 91^m,7$. Nach § 182 hat die im Gefässe enthaltene Luft pro Cubikmeter das Gewicht: $1,293 \cdot \frac{0,800}{0,760} \cdot \frac{273}{293} = 1,268$ Kil. Wenn die Ausflussöffnung eine Kreisfläche

ist vom Durchmesser $d = 0^m{,}01$, und der Ausfluss ohne Contraction erfolgt, so hat die pro Secunde ausfliessende Luftmasse das Gewicht $Q = \gamma \frac{d^2 \pi}{4} v$ $= 0{,}009\,13$ Kil. Für den Fall, dass der Ausfluss durch eine Oeffnung in dünner Wand erfolgt, würde wegen der dabei stattfindenden Contraction der obige Werth noch mit der Grösse $\mu = 0{,}6$ (als mittlerem Ausfluss-Coefficienten für Oeffnungen in dünner Wand) zu multipliciren, also $Q = 0{,}6 \,.\, 0{,}009\,13$ $= 0{,}005\,48$ Kil. zu setzen sein.

Bei geringer Grösse der Druckdifferenz $P - p$ können für den Ausfluss der Luft durch längere Röhrenleitungen ebenfalls dieselben Gleichungen benutzt werden, welche im vorigen Paragraphen für den Ausfluss des Wassers gefunden wurden, sobald in jenen Gleichungen statt der Druckhöhen-Differenz h überall die Grösse $\frac{P}{\gamma} - \frac{p}{\gamma}$ substituirt wird, als die jener Druckdifferenz entsprechende Druckhöhe — gemessen durch eine Luftsäule von überall gleicher Dichtigkeit. Für den Ausfluss durch eine cylindrische geradlinige Röhrenleitung, deren Querschnittsfläche n-mal so gross ist als die Fläche der am Ende der Röhrenleitung befindlichen (gehörig abgerundet vorausgesetzten) Ausflussmündung, erhält man daher nach Gleichung 1129), indem man darin $\zeta_1 = 0$ und $h = \frac{P}{\gamma} - \frac{p}{\gamma}$ setzt, die Gleichung:

$$\frac{P}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \frac{\zeta_0}{n^2} + \frac{\zeta}{n^2}\frac{l}{d}\right),$$

welche nach Substitution des Werthes $\frac{P}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} = \frac{P}{\gamma}\left(1 - \frac{p}{P}\right)$ $= 29{,}27\,(273 + t)\left(1 - \frac{p}{P}\right)$, für v aufgelöst, die Form annimmt:

$$1131)\quad v = \sqrt{\frac{2g \,.\, 29{,}27\,(273 + t)\left(1 - \frac{p}{P}\right)}{1 + \frac{\zeta_0}{n^2} + \frac{\zeta}{n^2}\frac{l}{d}}}.$$

In dieser Gleichung ist als Mittelwerth des Widerstands-Coefficienten der Reibung der Coefficient $\zeta = 0{,}024$ zu setzen. Der Einfluss des Widerstands-Coefficienten ζ_0 für den Eintritt in die Röhrenleitung ist bei längeren Röhrenleitungen so gering, dass für denselben ohne Bedenken der im vorigen Paragraphen für die Bewegung des Wassers benutzte Werth $\zeta_0 = 0{,}5$ gesetzt werden darf.

Wenn z. B. $t = +20^0$ (Celsius), $\frac{p}{P} = \frac{0{,}760}{0{,}800}$, $l = 100^m$, $d = 0^m{,}1$ und

$n = 2^2 = 4$ ist (entsprechend dem Falle, in welchem der Mündungs-Durchmesser halb so gross ist als der Durchmesser der Röhrenleitung), so ergiebt sich für die Ausflussgeschwindigkeit der Werth $v = 57^m{,}65$ und für die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft längs der Röhrenleitung sich bewegt, der Werth $\frac{v}{n} = 14{,}41$. Das Gewicht der pro Secunde ausfliessenden Luftmasse hat also die Grösse: $Q = \gamma \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{v}{n} = 0{,}113$ Kil.

§ 201.

Gleichförmige Bewegung des Wassers in Gerinnen und Canälen.

Ein Gerinne oder Canal von überall gleichem Wasser-Querschnitt kann betrachtet werden als eine prismatische Röhrenleitung, an welcher die obere Röhrenwand überall fehlt und durch die freie atmosphärische Luft ersetzt ist. Für die gleichförmige Bewegung des Wassers in einem solchen Canale gelten daher — abgesehen von den numerischen Werthen der betreffenden Erfahrungs-Coefficienten — dieselben Gesetze, welche in § 199 für die Bewegung des Wassers in einer überall gleich weiten Röhrenleitung gefunden wurden.

Der Druckhöhen-Verlust h, welcher durch die Reibung des Wassers an den Wänden einer cylindrischen Röhrenleitung verursacht wird, hat nach Gleichung 1124) die Grösse:

$$h = \zeta l \left(\frac{1}{d}\right) \frac{v^2}{2g},$$

ist also unter sonst gleichen Umständen proportional dem Verhältniss:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{4}\left(\frac{d\pi}{\frac{1}{4} d^2\pi}\right) = \frac{1}{4} \frac{\text{Umfang}}{\text{Querschnittsfläche}} = \frac{1}{4} \frac{U}{F}.$$

Es kann daher nach entsprechender Abänderung des numerischen Werthes des Erfahrungs-Coefficienten ζ der obigen Gleichung auch die Form gegeben werden:

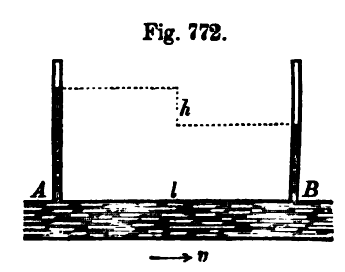
$$1132) \quad h = \zeta l \frac{U}{F} \frac{v^2}{2g}.$$

Diesen durch Reibung verursachten Druckhöhen-Verlust kann man sich veranschaulichen, indem man sich auf die Röhrenleitung am Anfangspunkte A und am Endpunkte B der Strecke $AB = l$ verticale Röhren (Piezometer) aufgesetzt denkt, deren Wasserstandshöhen die an diesen beiden Stellen gegen die obere Röhrenwand wirkenden hydraulischen Drücke anzeigen (Fig. 772). Das Verhältniss:

$$\frac{h}{l} = \zeta \frac{U}{F} \frac{v^2}{2g} = \sin \alpha$$

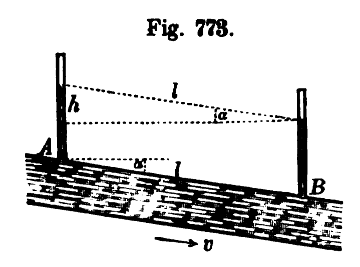
ist dasjenige Gefälle, welches der Röhrenleitung pro Längeneinheit ihrer Länge gegeben werden müsste, wenn der hydraulische Druck gegen die obere Röhrenwand überall gleich gross, und die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung — bei gegebener Druckhöhe über der Eintrittsstelle und gleichfalls gegebener Druckhöhe über der Ausflussmündung — unabhängig von der Länge derselben sein soll (Fig. 773).

Fig. 772.



Für den Fall, dass der von jenen Piezometern angezeigte hydraulische Druck gleich dem atmosphärischen Drucke ist, würde die obere Röhrenwand überall hinweggenommen werden können, ohne dass dadurch jener Druck verändert würde. Da die Reibung des Wassers an der oberen Röhrenwand alsdann wegfällt, so ist für diesen Fall statt des ganzen Querschnitt-Umfanges U nur derjenige Theil P desselben in Rechnung zu bringen, welcher den noch übrig bleibenden Wandflächen entspricht — so weit dieselben vom Wasser benetzt sind — und welcher das „Wasser-Profil" oder der „Wasser-Perimeter" genannt wird. Die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung des Wassers in einem solchen offenen Gerinne oder Canale ist daher zu berechnen aus der Gleichung:

Fig. 773.



$$1133) \quad h = \zeta l \frac{P}{F} \frac{v^2}{2g}, \quad \text{oder:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2ghF}{\zeta l P}},$$

Fig. 774.

in welcher h das ganze Gefälle der Strecke $AB = l$, oder die Höhendifferenz zwischen den beiden Punkten A und B des Wasserspiegels bezeichnet (Fig. 774).

Der Widerstands-Coefficient ζ ist — wie bei der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen — nicht ganz constant, sondern bei kleineren Geschwindigkeiten etwas grösser als bei grösseren

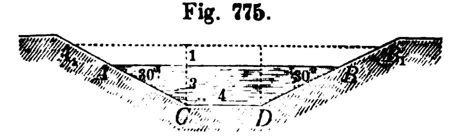
Geschwindigkeiten und variirt zwischen den Grenzen 0,01 und 0,0075. Der genauere Werth desselben ist zu berechnen mittelst der Erfahrungsformel:

$$1134)\quad \zeta = 0{,}007\,409\left(1 + \frac{0{,}058\,53}{v}\right).$$

So lange die Geschwindigkeit v nicht bekannt ist, kann als vorläufiger Annäherungswerth $\zeta = 0{,}008$ gesetzt werden (entsprechend einer mittleren Geschwindigkeit von 0,734 Metern pro Secunde).

Bei den in Fig. 775 angegebenen Dimensionen des Querprofiles ergiebt sich für den Wasser-Perimeter der Werth: $P = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} = 12^m$, und für den Querschnitt des fliessenden Wassers die Grösse: $F = 14{,}928$ Quadratmeter. Wenn das Gefälle auf einen Meter Länge 0,0005 Meter beträgt, so ist $\frac{h}{l} = \frac{1}{2000}$ zu setzen, und

Fig. 775.



für die mittlere Geschwindigkeit erhält man aus Gleichung 1133) nach Substitution des Mittelwerthes $\zeta = 0{,}008$ zunächst den Annäherungswerth: $v = 1^m{,}235$. Dieser Geschwindigkeit entspricht nach Gleichung 1134) der Widerstands-Coefficient $\zeta = 0{,}007\,76$, und nach Substitution desselben erhält man für die Geschwindigkeit den genaueren Werth: $v = 1^m{,}254$. Die von dem Canale pro Secunde fortgeführte Wassermenge hat also die Grösse: $M = F \,.\, v = 14{,}928 \,.\, 1{,}254 = 18{,}72$ Cubikmeter.

Wenn bei unverändert bleibendem Gefälle die Wassertiefe in der Mitte überall von 2^m bis auf 3^m steigt, so nimmt der Wasserperimeter die Grösse: $P_1 = \overline{A_1C} + \overline{CD} + \overline{DB_1} = 16^m$ an, und der Wasserquerschnitt die Grösse $F_1 = 27{,}588$ Quadratmeter. Nach Substitution dieser Werthe erhält man für die neue Geschwindigkeit v_1 auf gleiche Weise wie im vorigen Falle den Werth: $v_1 = 1^m{,}482$, und für die pro Secunde vorbeifliessende Wassermenge den Werth $M_1 = 40{,}885$ Cubikmeter.

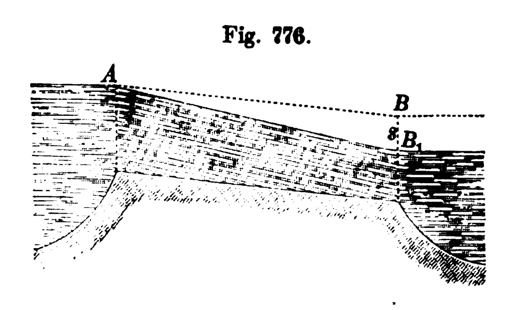
§ 202.

Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen.

Die Bewegung des Wassers in einem geradlinigen prismatischen Canale ist eine gleichförmige, wenn der Wasserquerschnitt überall dieselbe Grösse hat. Betrachtet man den Canal als einen Abflusscanal, durch welchen das Wasser aus einem höher liegenden Wasser-Bassin A nach einem tiefer liegenden Wasser-Bassin B abfliesst, so findet man, dass die Bewegung des abfliessenden Wassers so lange eine gleichförmige sein wird, als die Höhe des

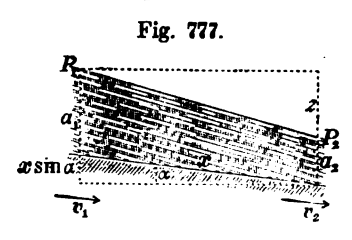
Wasserspiegels A über dem Boden des Canales an der Eintrittsstelle dieselbe Grösse hat wie die Höhe des Wasserspiegels B über dem Boden des Canales an der Ausflussmündung (Fig. 776).

Fig. 776.



Die Bewegung wird auch dann noch eine gleichförmige bleiben, wenn beide Wasserspiegel um eine und dieselbe Grösse steigen oder fallen. Die Bewegung wird dagegen eine ungleichförmige sein, wenn nur einer von den beiden Wasserspiegeln eine andere Höhenlage annimmt, also z. B. in dem Falle, wenn der Wasserspiegel B um eine gewisse Grösse sinkt, während in dem oberen Bassin A der Wasserspiegel die frühere Höhenlage beibehält. Da nach eingetretenem Beharrungszustande durch jeden Querschnitt die gleiche Wassermenge M pro Secunde hindurchfliesst, so muss die Geschwindigkeit des Wassers an dem grösseren Querschnitte an der Eintrittsstelle in den Canal kleiner sein als in dem kleineren Querschnitte an der Ausflussmündung desselben; folglich ist die Bewegung des Wassers in diesem Falle eine beschleunigte. Das ganze Gefälle — d. h. die Höhendifferenz der beiden Wasserspiegel A und B_1 — ist in diesem Falle grösser als dasjenige Gefälle, welches zur Ueberwindung der Reibungswiderstände oder zur Erhaltung einer gleichförmigen Bewegung ausreichen würde, und dieser Ueberschuss ist es, welcher die Beschleunigung hervorbringt.

Fig. 777.



Um die Bewegung längs des Theiles x der ganzen Canalstrecke zu bestimmen (Fig. 777), hat man sich das ganze Gefälle dieser Strecke — d. h. die Höhendifferenz z zwischen den beiden Punkten P_1 und P_2 des Wasserspiegels — in zwei Theile zerlegt zu denken, von denen der eine (nach Gleichung 1133) zu berechnende Theil) auf Ueberwindung der längs dieser Strecke wirkenden Reibungswiderstände verwendet wird, und der andere Theil $\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$

die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers von der Grösse v_1 bis auf die Grösse v_2 erhöht. Man erhält also die Gleichung:

$$1135)\quad z = \zeta x \frac{P}{F}\frac{v^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

In dieser Gleichung ist für eine jede der drei Grössen F, P und v der mittlere Werth resp. des Wasserquerschnittes, des Wasserperimeters und der Geschwindigkeit längs der Strecke x zu substituiren — d. h. für eine jede das arithmetische Mittel von den zwei Werthen, welche den beiden Endpunkten dieser Strecke entsprechen. Wenn also mit F_1 und F_2 resp. die Querschnittsflächen an den beiden Endpunkten bezeichnet werden, so ist $F = \frac{F_1 + F_2}{2}$ zu setzen. In gleicher Weise ist der mittlere Wasserperimeter $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$ zu setzen. Die pro Secunde vorbeifliessende Wassermenge hat die Grösse $M = F_1 v_1 = F_2 v_2$; also ist $v_1 = \frac{M}{F_1}$ und $v_2 = \frac{M}{F_2}$, folglich die mittlere Geschwindigkeit $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}\right)$ zu setzen. Nach Substitution dieser Werthe nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$1136)\quad z = \zeta x \frac{M^2}{8g}\,\frac{(P_1 + P_2)(F_1 + F_2)}{F_1^2 F_2^2} + \frac{M^2}{2g}\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}\right).$$

Sind die Wasserquerschnitte an den beiden Endpunkten der Strecke x nebst der von dem Canale pro Secunde fortzuführenden Wassermenge M gegeben, so kann aus dieser Gleichung das erforderliche Gefälle des Wasserspiegels berechnet werden; ist statt dessen ausser jenen beiden Querschnitten das Gefälle z gegeben, so kann die obige Gleichung auch umgekehrt zur Berechnung der Wassermenge M benutzt werden.

Wenn bei der im vorigen Paragraphen als Beispiel gewählten Profil-Form (Fig. 775) die Wassertiefe am oberen Ende einer bestimmten Strecke 3 Meter, am unteren Ende 2,95 Meter beträgt, so ist $F_1 = 27{,}588$, $P_1 = 16$ und $F_2 = 26{,}868$, $P_2 = 15{,}8$ zu setzen. Wenn ferner die Länge dieser Strecke die Grösse $x = 100$ Meter und das Gefälle des Wasserspiegels längs derselben die Grösse $z = 0{,}1$ Meter hat, so ergiebt sich aus obiger Gleichung für die pro Secunde vorbeifliessende Wassermenge der Werth $M = 54$ Cubikmeter.

Ein genaues Resultat ist indessen bei dieser Berechnungsweise nur dann zu erwarten, wenn der Unterschied zwischen den Querschnitten an den beiden Endpunkten der Strecke x eine sehr

geringe Grösse hat. Die oben gefundene Gleichung nimmt, wenn darin für das Gefälle z der aus Fig. 777 zu entnehmende Werth $z = a_1 + x \sin \alpha - a_2$ substituirt, und die Gleichung alsdann für x aufgelöst wird, die Form an:

$$1137) \quad x = \frac{a_1 - a_2 - \frac{M^2}{2g}\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}\right)}{\zeta \frac{M^2}{8g} \frac{(P_1 + P_2)(F_1 + F_2)}{F_1^2 F_2^2} - \sin \alpha}.$$

Diese Gleichung — ebenso wie die vorhergehende — wird das Gesetz, nach welchem die Bewegung des Wassers längs der Strecke x erfolgt, um so genauer darstellen, je kürzer diese Strecke gewählt wird, und je kleiner in Folge dessen die Wassertiefen-Differenz $a_1 - a_2$ ausfällt. Wenn man sich die ganze Differenz zwischen den beiden Wassertiefen an den beiden Endpunkten des ganzen Canales zerlegt denkt in die einzelnen Wassertiefen-Differenzen $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4 \ldots$, so kann man mit Hülfe der obigen allgemeinen Gleichung die jenen einzelnen Tiefen-Aenderungen entsprechenden Strecken x_1, x_2, $x_3 \ldots$ eine nach der anderen berechnen, sobald für die fortzuführende Wassermenge M ein bestimmter Werth entweder gegeben ist oder vorläufig angenommen wurde. Man erhält auf diese Weise das zu jenen willkürlich gewählten Wassertiefen als Ordinaten gehörige System von Abscissen für diejenige Curve, welche das Längen-Profil des Wasserspiegels bildet. Indem man diese Rechnung probeweise mit verschiedenen Werthen von M wiederholt, findet man für das Längen-Profil des Wasserspiegels schliesslich diejenige Curve, welche hinsichtlich der Lage ihrer beiden Endpunkte den in der Aufgabe gestellten Bedingungen genügt, so wie diejenige Wassermenge, welche bei dieser Form des Längenprofiles pro Secunde fortgeführt wird. Auf solche Weise würde z. B. die Wassermenge M zu ermitteln sein, welche bei dem in Fig. 776 angegebenen Falle von A nach B_1 abfliesst.

§ 203.

Stauhöhe und Stauweite.

Die im vorigen Paragraphen für die ungleichförmige Bewegung des Wassers gefundenen Gleichungen gelten nicht nur für die beschleunigte, sondern auch für die verzögerte Bewegung. Das Vorhandensein einer verzögerten Bewegung längs einer be-

stimmten Canal- oder Fluss-Strecke setzt als Bedingung voraus: dass der Wasserquerschnitt am unteren Endpunkte dieser Strecke grösser ist als am oberen Endpunkte derselben. Eine solche verzögerte Bewegung des Wassers tritt ein, sobald unterhalb jener Strecke an irgend einer Stelle mittelst einer localen Querschnittsverengung — entweder der Breite nach (z. B. durch einen seitlichen Einbau, durch Brückenpfeiler) oder der Höhe nach (z. B. durch ein Ueberfallswehr oder eine sonstige locale Erhöhung des Grundbettes) — eine Aufstauung des Wassers in der stromaufwärts gelegenen Strecke hervorgebracht wird. Unmittelbar oberhalb der Staustelle wird in diesem Falle der Wasserspiegel so lange steigen, bis derselbe diejenige Höhe erreicht hat, bei welcher die in jeder Secunde durch den verengten Querschnitt hindurchfliessende Wassermenge ebenso gross geworden ist wie die Wassermenge, welche vorher bei überall gleichem Querprofile in jeder Secunde an dieser Stelle vorbeifloss (vergl. § 198).

Die Wassermenge M, welche bei einem sogenannten „unvollkommenen Ueberfalle“ oder „Grundwehre“ (dessen Schwelle tiefer liegt als der Unterwasserspiegel) in jeder Secunde abfliesst, setzt sich zusammen aus zwei Theilen, nämlich dem Theile M_1, welcher durch den unteren Theil des verengten Querschnittes (zwischen der Schwelle und dem Unterwasserspiegel) hindurchfliesst, und dem Theile M_2, welcher durch den oberen Theil des Querschnittes oberhalb des Unterwasserspiegels abfliesst (Fig. 778 und Fig. 779). Sämmtliche Theilchen der Wassermenge M_1 fliessen mit gleichen Geschwindigkeiten durch den verengten Querschnitt hindurch, da die Druckhöhendifferenz für alle diese Theilchen eine und dieselbe Grösse hat, nämlich die Grösse h. Die gemeinschaftliche Ausflussgeschwindigkeit u für diesen Theil der ganzen Ausflussmege ist daher zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 778.

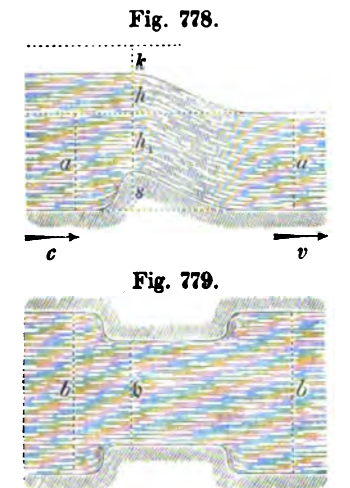


Fig. 779.

$$1138)\quad h = \frac{u^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}, \quad \text{oder:}$$

$$u = \sqrt{2gh + c^2} = \sqrt{2g\left(h + \frac{c^2}{2g}\right)},$$

in welcher c die Geschwindigkeit des Wassers unmittelbar oberhalb der Staustelle bedeutet oder die Geschwindigkeit, mit welcher die Wassertheilchen sich bewegten, bevor an der Ueberfalls-Stelle die Geschwindigkeitszunahme eintrat. Diese Anfangsgeschwindigkeit hat — wie obige Gleichung zeigt — denselben Einfluss, welchen eine Vergrösserung der Druckhöhe um die Grösse $k = \frac{c^2}{2g}$ haben würde. Das Verhältniss der Geschwindigkeit c zu der Geschwindigkeit v, mit welcher das ungestauete Wasser unterhalb der Staustelle durch die überall gleichen rechteckig vorausgesetzten Querschnitte von der Grösse $a \cdot b$ hindurch weiter fliesst, ist gleich dem umgekehrten Verhältniss der betreffenden Querschnitte zu setzen, also ist:

$$1139) \quad (a + h)\, b \cdot c = a b v, \quad \text{oder:} \quad c = \frac{av}{a + h}.$$

Bei gegebener Stauhöhe h kann hiernach die Geschwindigkeit c so wie die derselben entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$1140) \quad \frac{c^2}{2g} = \frac{a^2 v^2}{2g\,(a + h)^2} = k$$

als eine bekannte Grösse betrachtet werden; ebenso auch die Geschwindigkeit:

$$1141) \quad u = \sqrt{2g\,(h + k)}.$$

Wenn mit μ der Ausfluss-Coefficient bezeichnet wird, so ergiebt sich hieraus für den ersteren Theil der Ausflussmenge der Werth:

$$1142) \quad M_1 = \mu\, \mathfrak{b}\, h_1 \sqrt{2g\,(h + k)}.$$

Die durch den oberen Theil des verengten Querschnittes fliessende Wassermenge M_2 ist nach den in § 193 für den Ausfluss aus rechteckiger Oeffnung in verticaler Wand gefundenen Gleichungen zu berechnen, wobei als Druckhöhe für den unteren Rand der Ausflussöffnung die Grösse $h + k$ und für den oberen Rand die Grösse k in Rechnung zu bringen ist. Nach Gleichung 1073) ist also:

$$1143) \quad M_2 = \frac{2}{3}\, \mu\, \mathfrak{b} \sqrt{2g}\, \left(\sqrt{(h + k)^3} - \sqrt{k^3}\right).$$

Die Summe dieser beiden Wassermengen ist der ganzen Wassermenge M gleich zu setzen, folglich ist:

$$1144) \quad M = \mu\, \mathfrak{b} \sqrt{2g}\, \left[h_1 \sqrt{h + k} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{(h + k)^3} - \sqrt{k^3}\right)\right].$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für die einer vorgeschriebenen Stauhöhe h entsprechende Höhe des Unterwasserspiegels über der Ueberfallskante der Werth:

$$1145)\quad h_1 = \frac{M}{\mu \mathfrak{b} \sqrt{2g(h+k)}} - \frac{2}{3}\left(h + k - \sqrt{\frac{k^3}{h+k}}\right).$$

Wenn z. B. die Stauhöhe $h = 0^m,5$ vorgeschrieben ist, und bei dem ungestaueten Wasser die Geschwindigkeit $v = 1^m,75$, die Wassertiefe $a = 2^m$ war, so ist nach Gleichung 1139) $c = \frac{3,5}{2,5} = 1^m,4$, und nach Gleichung 1140) $k = 0^m,1$ zu setzen. Wenn ferner die Breite des Canales an der Staustelle die Grösse $\mathfrak{b} = 10^m$, an den übrigen Stellen dagegen die Grösse $b = 12^m$ hat, so ist die pro Secunde fortgeführte Wassermenge $M = 12 \,.\, 2 \,.\, 1,75 = 42$ Cubikmeter, und wenn der Ausfluss-Coefficient $\mu = 0,8$ gesetzt wird, so ergiebt sich für h_1 aus obiger Gleichung der Werth: $h_1 = 1^m,157$; und für die erforderliche Höhe der Schwelle über dem Canal-Boden der Werth: $s = a - h_1 = 2 - 1,157 = 0,843$ Meter.

Unterhalb des Wehres ist die Wassertiefe unverändert gleich a geblieben; unmittelbar oberhalb des Wehres dagegen hat dieselbe in Folge der Stauung bis auf die Grösse $a + h$ zugenommen. Stromaufwärts nimmt die Wassertiefe allmählich ab, bis dieselbe am Endpunkte der Stauweite wieder in die Grösse a übergeht. Um die sogenannte „Staucurve“ zu berechnen, oder diejenige Curve, nach welcher das Längen-Profil des gestaueten Wasserspiegels gekrümmt ist, hat man das am Schlusse des vorigen Paragraphen erklärte Verfahren anzuwenden. Man denkt sich die ganze Stauhöhe h zerlegt in die einzelnen Wassertiefen-Differenzen $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4 \ldots$, und berechnet alsdann, vom Wehre anfangend, nach und nach die zu diesen willkürlich angenommenen Tiefen-Aenderungen gehörenden einzelnen Strecken x_1, x_2, $x_3 \ldots$ mittelst der im vorigen Paragraphen gefundenen allgemeinen Gleichung 1137), welcher auch die folgende Form gegeben werden kann:

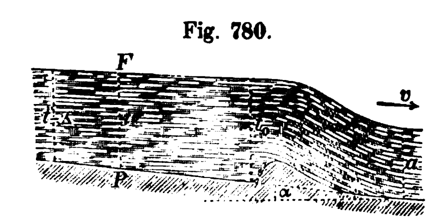
$$1146)\quad x = \frac{\frac{M^2}{2g}\left(\frac{F_1^2 - F_2^2}{F_1^2 F_2^2}\right) - (a_1 - a_2)}{\sin\alpha - \zeta \frac{M^2}{8g} \frac{(P_1 + P_2)(F_1 + F_2)}{F_1^3 F_2^3}}.$$

Für ein rechteckiges Profil von überall gleicher Breite b ist nach der in Fig. 780 gewählten Bezeichnung zu setzen: $F_2 = bt$ und $F_1 = b(t - \Delta)$; für kleine Werthe von Δ also annähernd:

$$F_1^2 - F_2^2 = b^2(t - \Delta)^2 - b^2 t^2 = -2b^2 t\Delta.$$

Wenn man ferner $a_2 - a_1 = \Delta$ setzt und hinsichtlich der übrigen Glieder die Differenz zwischen den Profilen an den beiden Endpunkten der Strecke x vernachlässigend — die Werthe $F_1 = bt = F_2$ und $P_1 = b + 2t = P_2$ substituirt, so kann man der obigen Gleichung, indem man darin zugleich wieder: $M = btv$ setzt, auch die folgende einfachere Form geben:

Fig. 780.



$$1147)\; x = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{gt}\right)\Delta}{\sin\alpha - \zeta\left(1 + \frac{2t}{b}\right)\frac{v^2}{2gt}}.$$

Den im vorigen Zahlenbeispiele für die gleichförmige Bewegung des ungestaueten Wassers angenommenen Zahlenwerthen: $a = 2^m$, $b = 12^m$ und $v = 1^m{,}75$ entspricht (nach Gleichung 1133) als Gefälle des Canalbodens pro Längeneinheit der Werth: $\sin\alpha = 0{,}000\,796\,8$. Für die Wassertiefe am Wehre wurde der Werth: $t_0 = a + h = 2^m{,}5$ angenommen, welchem die Geschwindigkeit $v_0 = 1^m{,}4$ entspricht. Um diejenige Strecke x_1 zu finden, längs welcher in der Richtung stromaufwärts die Wassertiefe von $t_0 = 2^m{,}5$ bis $t_1 = 2^m{,}4$ abnimmt, und die Geschwindigkeit von $v_0 = 1^m{,}4$ bis $v_1 = 1{,}4 \cdot \frac{2{,}5}{2{,}4} = 1^m{,}458$ zunimmt, hat man in obiger Gleichung die Werthe: $t = \frac{t_0 + t_1}{2} = 2^m{,}45$ und $v = \frac{v_0 + v_1}{2} = 1^m{,}429$ zu substituiren, welchem letzteren der Werth: $\zeta = 0{,}007\,713$ entspricht. Hiernach erhält man aus jener Gleichung, indem man darin: $\Delta = 0^m{,}1$ setzt, für die Strecke x_1 den Werth:

$$x_1 = \frac{0{,}1\left(1 - \frac{1{,}429^2}{9{,}81\,.\,2{,}45}\right)}{0{,}000\,796\,8 - 0{,}007\,713\left(1 + \frac{4{,}9}{12}\right)\frac{1{,}429^2}{2\,.\,9{,}81\,.\,2{,}45}} = 291^m{,}3.$$

Um die folgende Strecke x_2 zu berechnen, längs welcher in der Richtung stromaufwärts die Wassertiefe von $t_1 = 2^m{,}4$ bis $t_2 = 2^m{,}3$ abnimmt, und die Geschwindigkeit von $v_1 = 1^m{,}458$ bis $v_2 = 1^m{,}522$ zunimmt, hat man die Werthe: $t = \frac{t_1 + t_2}{2} = 2^m{,}35$, $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 1^m{,}49$, $\zeta = 0{,}0077$ zu substituiren, und wiederum $\Delta = 0^m{,}1$ zu setzen; man erhält dann für x_2 den Werth:

$$x_2 = \frac{0{,}1\left(1 - \frac{1{,}49^2}{9{,}81\,.\,2{,}35}\right)}{0{,}000\,796\,8 - 0{,}0077\left(1 + \frac{4{,}7}{12}\right)\frac{1{,}49^2}{2\,.\,9{,}81\,.\,2{,}35}} = 321^m{,}8.$$

Indem man die Rechnung auf gleiche Weise in Bezug auf die dritte und jede folgende Strecke wiederholt, findet man nach und nach die übrigen Theile des Längenprofiles.

§ 204.

Widerstände der Flüssigkeiten gegen bewegte feste Körper.

Gesetze oder Erfahrungsformeln, nach welchen die Widerstände ruhender Flüssigkeiten gegen bewegte feste Körper, oder die Stosswirkungen bewegter Flüssigkeiten gegen ruhende feste Körper, für beliebig gegebene Fälle im Voraus mit einiger Sicherheit berechnet werden könnten, sind bislang nicht bekannt. Für die betreffenden Erfahrungs-Coefficienten sind von verschiedenen Beobachtern sehr verschiedene Werthe gefunden. Den nachfolgenden angegebenen Mittelwerthen jener Coefficienten ist deshalb nur ein geringer Grad von Zuverlässigkeit beizumessen.

Im Allgemeinen darf man annehmen, dass der Widerstand, welcher der Bewegung eines an allen Seiten von der Flüssigkeit umgebenen (symmetrisch in Bezug auf eine der Bewegungsrichtung parallele Achse geformten) festen Körpers entgegenwirkt, ungefähr proportional ist dem Quadrate der relativen Geschwindigkeit des Körpers in Bezug auf die Flüssigkeit, oder der Geschwindigkeitshöhe, welche dieser relativen Geschwindigkeit entspricht, dass derselbe ferner proportional ist der grössten Querschnittsfläche des Körpers rechtwinkelig zu jener Achse genommen, oder der Projection des Körpers auf einer rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung stehenden Ebene, und ausserdem proportional der Dichtigkeit der Flüssigkeit. Annähernd ist daher jener Widerstand zu berechnen aus der Gleichung:

$$1148)\quad W = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

in welcher γ das Gewicht der Flüssigkeit pro Cubikeinheit, F den Flächeninhalt jener grössten Querschnittsfläche oder Projection, v die relative Geschwindigkeit und ζ einen von der Form des Körpers abhängigen Erfahrungs-Coefficienten bezeichnet.

Für ein in der Richtung seiner Achse sich bewegendes Prisma, dessen Länge das Vier- bis Sechs-Fache des mittleren Querschnittsdurchmessers nicht übersteigt, ist der Widerstands-Coefficient $\zeta = \frac{4}{3}$ zu setzen. Bei grösserer Länge des Prismas nimmt in Folge der grösseren Reibung an den Seitenflächen der Widerstands-Coefficient einen grösseren Werth an. Dasselbe gilt von dem Widerstands-Coefficienten eines in seiner Achsenrichtung sich bewegenden Cylinders. Für einen rechtwinkelig zu seiner Achsenrichtung be-

wegten Cylinder ist der Widerstands-Coefficient ungefähr halb so gross, also $\zeta = \frac{2}{3}$ zu setzen. Für eine hohle Halbkugel von geringer Wandstärke ist $\zeta = 2,5$ zu setzen, wenn die concave Fläche die Vorderfläche bildet.

Hiernach würden z. B. für einen in gewöhnlicher atmosphärischer Luft mit der Geschwindigkeit $v = 5^m,6$ vertical abwärts sinkenden Fallschirm, welcher ungefähr die Form einer hohlen Halbkugel und in seiner Horizontal-Projection einen Flächeninhalt von 20 Quadratmetern hat, die Werthe $\zeta = 2,5$, $\gamma = 1,293$, $F = 20$ und $\frac{v^2}{2g} = \frac{5,6^2}{2 \,.\, 9,81} = 1^m,6$ in Gleichung 1148) zu substituiren sein, woraus für den vertical aufwärts wirkenden Luftwiderstand der Werth $W = 103$ Kil. sich ergiebt. Es würde also das Totalgewicht des Fallschirmes nebst der an demselben hängenden Last höchstens 103 Kil. betragen dürfen, wenn beim Herabsinken aus grosser Höhe die Geschwindigkeit desselben niemals grösser werden soll als diejenige Geschwindigkeit, welche ein von der Höhe $h = 1^m,6$ im luftleeren Raume frei herabfallender Körper erlangen würde.

Für eine Kugel ist bei kleinen Geschwindigkeiten $\zeta = 0,5$ zu setzen. Bei grossen Geschwindigkeiten (wie z. B. bei den Geschwindigkeiten der Geschützkugeln) nimmt der Widerstands-Coefficient einen grösseren Werth an und kann derselbe annäherungsweise berechnet werden aus der Formel:

$$\zeta = 0,5 + 0,001 \,.\, v.$$

Wenn der Durchmesser einer Kugel 0,1 Meter und das specifische Gewicht derselben 7,2 beträgt, so ist das relative Gewicht der Kugel im Wasser gleich 3,246 Kil. Um diejenige Geschwindigkeit zu finden, bei welcher die Bewegung der im Wasser vertical abwärts sinkenden Kugel eine gleichförmige wird, hat man in Gleichung 1148) die Werthe $W = 3,246$, $\zeta = 0,5$, $\gamma = 1000$, $F = 0,007\,854$ zu substituiren und erhält alsdann für die gesuchte Grösse den Werth $v = 4$ Meter.

Für die Bewegung der Kugel in gewöhnlicher atmosphärischer Luft erhält man auf gleiche Weise nach Substitution der Werthe $\gamma = 1,293$, $W = 3,77$, indem man zunächst annähernd $\zeta = 0,5$ setzt und nachher mit dem nach obiger Formel corrigirten Werthe von ζ die Rechnung wiederholt, als Grenze der Fallgeschwindigkeit die Grösse $v = 110$ Meter.

Bei Eisenbahnzügen ist der Luftwiderstand (nach Redtenbacher) zu berechnen aus der Gleichung:

$$W = 0,0704 \left(F + \frac{1}{4}\, n f\right) v^2,$$

in welcher F die Vorderfläche der Locomotive (gewöhnlich gleich 7 bis 8 Quadratmeter), f die Vorderfläche jedes der angehängten Bahnwagen (gewöhnlich gleich 4 Quadratmeter), n die Anzahl der letzteren und v die Fahrgeschwindigkeit bezeichnet.

Bei schwimmenden, theilweise in die Flüssigkeit eingetauchten

Körpern ist in der allgemeinen Gleichung 1148) für die Grösse F die grösste Querschnittsfläche oder Projection des eingetauchten Theiles in Rechnung zu bringen. Der Widerstands-Coefficient ist bei theilweise eingetauchten Körpern stets kleiner als bei ganz von der Flüssigkeit umgebenen Körpern. Für ein in der Richtung seiner Achse bewegtes schwimmendes Prisma, dessen Länge nicht mehr als das Sechsfache der mittleren Breite des eingetauchten Theiles beträgt, ist $\zeta = 1,1$ zu setzen. Für gut gebaute Schiffe kann als Mittelwerth $\zeta = 0,2$ gesetzt werden, bei sehr scharf gebauten Schiffen kann der Widerstands-Coefficient bis auf die Grösse $\zeta = 0,05$ sich vermindern.

Die Kraftwirkungen, welche die Flüssigkeit und der in derselben sich bewegende feste Körper auf einander gegenseitig übertragen, erfolgen genau in derselben Weise auch dann noch, wenn der ganze Raum, in welchem jener Vorgang stattfindet, eine gleichförmig fortschreitende Bewegung ausführt, und sind vollkommen unabhängig von der Geschwindigkeit dieser hinzukommenden gemeinschaftlichen Bewegung. Denkt man sich den Raum, in Bezug auf welchen bei den vorigen Fällen die Flüssigkeit als ruhend zu betrachten war, eine gleichförmig fortschreitende Bewegung ausführend, deren Geschwindigkeit derjenigen des festen Körpers gleich und entgegengesetzt ist — in welchem Falle der letztere also in absolutem Ruhezustande sich befinden würde — so erkennt man leicht, dass jene Wirkungen nicht von der absoluten, sondern nur von der relativen Geschwindigkeit des festen Körpers in Bezug auf die Flüssigkeit abhängen können, und dass die allgemeine Gleichung 1148) — soweit dieselbe das Gesetz jener Wirkungen überhaupt richtig darstellt — ebensowohl für den Fall gelten muss, in welchem der feste Körper ruht und die Flüssigkeit sich bewegt, als für den Fall, in welchem jener Körper die Bewegung ausführt und die Flüssigkeit im Ruhezustande sich befindet.

Die von der Flüssigkeit auf den festen Körper übertragene Gesammtwirkung setzt sich zusammen aus den Wirkungen gegen die einzelnen Flächentheilchen seiner Oberfläche. Wenn die Vorderfläche des Körpers eine ebene Fläche ist, welche rechtwinkelig zur relativen Bewegungsrichtung steht, so setzt sich der Druck gegen diese Vorderfläche wiederum zusammen aus dem hydrostatischen Drucke, welchen unter sonst gleichen Umständen die ruhende Flüssigkeit gegen die Fläche ausüben würde, und einem Ueberdrucke, welcher in Folge der relativen Bewegung der Flüssig-

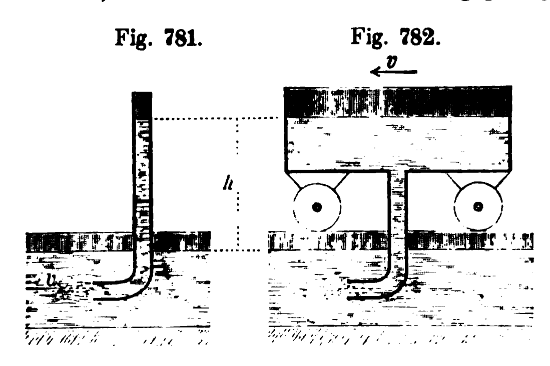
keit gegen die Fläche zu jenem hydrostatischen Drucke noch hinzukommt. In der Regel versteht man unter dem Drucke einer Flüssigkeit gegen eine relativ zu derselben bewegte Fläche nur jenen Ueberdruck. So z. B. pflegt man bei der Angabe des Druckes, welchen der Wind gegen eine rechtwinkelig zur Windrichtung stehende Fläche ausübt, nur den Ueberschuss des wirklichen Druckes über den statischen Atmosphären-Druck anzugeben. In diesem Sinne ist der Druck einer Flüssigkeit gegen eine rechtwinkelig zur relativen Bewegungsrichtung stehende ebene Fläche F zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1149) \quad D = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

in welcher die Grössen ζ, γ, v wiederum die oben angegebenen Bedeutungen haben.

Die Grösse des Erfahrungs-Coefficienten ζ für Wasser würde man z. B. auf die in Fig. 781 dargestellte Weise bestimmen können, indem man ein rechtwinkelig gebogenes, aus einem horizontalen und einem verticalen Schenkel bestehendes Rohr in den Wasserstrom auf solche Weise hineinsetzt, dass die Mündung des horizontalen Schenkels gegen den Strom gerichtet ist (Pitot'sche Röhre). Die Höhen-Differenz h zwischen der Wasserstandshöhe im verticalen Rohre und dem äusseren Wasserspiegel zeigt die Grösse jenes Ueberdruckes an, und wenn man den dieser Höhen-Differenz entsprechenden hydrostatischen Druck $\gamma F h$ dem obigen Werthe von D gleichsetzt, so erhält man die Gleichung:

Fig. 781. Fig. 782.



$$1150) \quad \gamma F h = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g}, \quad \text{oder:} \quad h = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

welche zur Bestimmung des Coefficienten ζ benutzt werden kann, sobald die Grössen h und v bekannt sind, oder auch zur Bestimmung einer der beiden Grössen h und v, sobald der Coefficient ζ und die andere von jenen beiden Grössen bekannt sind.

Nach **Weisbach's** Versuchen ist in dieser Gleichung $\zeta = 1{,}56$ zu setzen. Hiernach würde z. B. dem Werthe $h = 2^m$ die Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 2}{1{,}56}} = 5$ Meter entsprechen. Wenn also z. B. der Wasserbehälter eines Locomotiv-Tenders auf die in Fig. 782 angedeutete Art in Verbindung gesetzt wird mit einem unterhalb desselben zwischen den Schienen befindlichen Wasserbehälter, so wird bei einer Höhen-Differenz von 2 Metern zwischen den beiden Wasserspiegeln ein Hinaufströmen des Wassers in den Tender so lange stattfinden, als die Fahrgeschwindigkeit mehr als 5 Meter beträgt.

Druckfehler:

Auf Seite 36 in der dritten Zeile des § 15 muss statt: „$x = \frac{p}{2v^2} \cdot y$" gesetzt werden: „$x = \frac{p}{2v^2} \cdot y^2$".

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.

